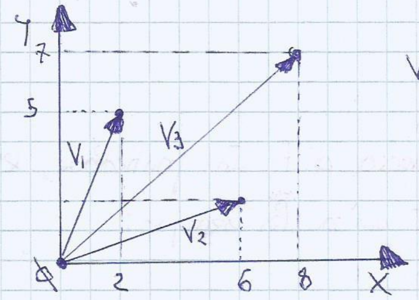
Si consideri ora la somma tra due vettori:

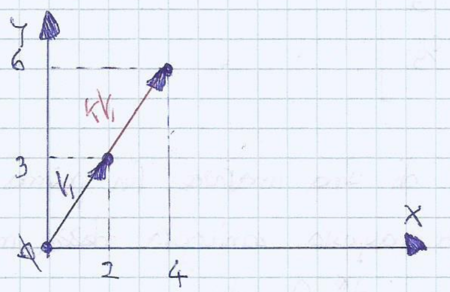


$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V_1 + V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = V_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Analogamente si consideri il prodotto di una matrice per uno scalare:



$$kV_1 = k\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{se } k = 2 \Rightarrow 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Riassumendo, una matrice può essere vista come una rappresentazione tabellare delle coordinate dei vari punti cartesiani:

Righe = coordinate (x, y, z)

Colonne = i vari punti $(P_1, P_2, \dots)$

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & \phi \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

la si può interpretare come:

$$A = \begin{bmatrix} x_{P_1} = 2 & x_{P_2} = 4 \\ y_{P_1} = 2 & y_{P_2} = \phi \\ z_{P_1} = 3 & z_{P_2} = 1 \end{bmatrix}$$

Siano ora A e B due generiche matrici di ordine "n". Se vale la relazione:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

allora la matrice B viene detta matrice inversa di A. In particolare, l'inversa di una matrice quadrata non singolare è unica. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 5 \neq 0 \text{. Quindi l'inversa è unica.}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Vediamo come si può calcolare l'inversa di una matrice. Per prima cosa definiamo la matrice aggiunta come la trasposta coniugata della matrice di partenza. Una matrice aggiunta si indica con A^*. Quindi:

$A^* = A \rightarrow A^T \rightarrow$ sostituzione ogni elemento con il complesso coniugato.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si noti che se la matrice è definita nel reale la matrice aggiunta coincide con la matrice trasposta in quanto il coniugato di un numero reale è il numero stesso.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)} \Rightarrow \text{esempio: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \text{. Provare che: } A \cdot A^{-1} = I.$$

È facile verificare che:

$\bar{\bar{A}} = A$ ⇒ la coniugata della matrice coniugata è la matrice stessa.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -2i & 3+2i \\ 3-2i & 5+i & 1-i \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2i & 3-2i \\ 3+2i & 5-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & -2i & 3+2i \\ 3-2i & 5+i & 1+i \end{bmatrix}$$

Supponiamo di avere a disposizione due matrici complesse A e B:

$$A = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ 1-i & 2-3i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & \phi \\ 5-2i & -1+2i \end{bmatrix}$$

Scriviamo:

$$(\bar{A}+\bar{B}) = \begin{bmatrix} -i & 2-i \\ 1+i & 2+3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & \phi \\ 5+2i & -1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-i & 2-i \\ 6+3i & 1+i \end{bmatrix}$$

Ma se scriviamo:

$$A+B = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ 1-i & 2-3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & \phi \\ 5-2i & -1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+i & 2+i \\ 6-3i & 1-i \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A+B} = \begin{bmatrix} 7-i & 2-i \\ 6+3i & 1+i \end{bmatrix}$$

Quindi si può affermare che $(\overline{A+B}) = \bar{A}+\bar{B}$.

Si indica con A^* la matrice aggiunta tale che:

$$A^* = (\overline{A^T})$$

Quindi la matrice aggiunta è la coniugata della matrice trasposta di A.
Si noti che:

$$A^* = (\overline{A^T}) = (\bar{A})^T.$$

Una matrice in cui vale la relazione seguente:

$$A^* = A \quad \text{ossia} \quad (\overline{A^T}) = (\bar{A})^T = A$$

si dice matrice Hermitiana. In particolare valgono le seguenti proprietà:

1) se A è hermitiana allora anche $k \cdot A$ con $k \in R$ è hermitiana
2) con $k \in I$ (insieme immaginario puro) kA è emihermitiana.
3) Una matrice ad elementi reali è hermitina solo se è simmetrica

Una matrice dove:

$$A^* = -A \quad \text{ossia} \quad (\overline{A^T}) = (\bar{A})^T = -A$$

si dice matrice emihermitiana. In particolare:

1) se A è emihermitiana kA è emihermitiana $\forall k \in R$.
2) con $k \in I$ kA è emihermitiana
3) Una matrice ad elementi reali è emihermitiana solo se è emisimmetrica.

Se A è una matrice quadrata:

$A + A^*$ = matrice ermitiana, $A - A^*$ = matrice emihermitiana.

Si supponga, per esempio, di calcolare l'aggiunta della seguente matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Si chiamano cofattori i complementi algebrici minori moltiplicati per lo scalare: $(-1)^{i+j}$

Il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} è il prodotto del suo minore complementare per $(-1)^{i+j}$. Pertanto si può scrivere:

$$\text{complementare } a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Vediamo come calcolare un minore complementare:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \phi \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & \phi & 5 \end{bmatrix}$$

Es: $M_{1,2} = (4 \cdot 5) - (-1 \cdot 1) = 21$

$\Downarrow$

complemento algebrico di $a_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot 21 = -21$

Vediamo un altro esempio:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \phi \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & \phi & 5 \end{bmatrix}$$

$M_{3,1} = (2 \times 1) - \phi = 2$

$\Downarrow$

complemento algebrico di $a_{3,1} = (-1)^{3+1} M_{3,1} = 2.$

Tornando all'esempio principale (matrice A). Calcoliamoci la sua trasposta. Abbiamo:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ora calcoliamoci i complementi algebrici:

M_{11} $\quad$ M_{12}

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Agg(A) = \begin{bmatrix} -1^2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & -1^3 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & -1^4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ -1^3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & -1^4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & -1^5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ -1^4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & -1^5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & -1^6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} +(9-16) & -(3-4) & +(4-3) \\ -(6-12) & +(3-3) & -(4-2) \\ +(8-9) & -(4-3) & +(3-2) \end{bmatrix}$$

Pertanto: $agg(A) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Se A e B sono due matrici quadrate di ordine 'n' si ha che:

$$agg\,AB = agg\,A \cdot agg\,B$$

Parliamo ora della matrice inversa. Siano A e B due matrici tali per cui:

$$AB = B \cdot A = I$$

La matrice B viene detta matrice inversa della matrice A. Una matrice singolare è una matrice quadrata con determinante uguale a zero.

Se la matrice A è singolare e si ha:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = 0$ quindi la matrice A non è invertibile.