CAPITOLO 9: LA GRAVITAZIONE

9.1 Introduzione.

Un altro tipo di forza piuttosto importante è la **forza gravitazionale**. Innanzitutto, è risaputo che nel nostro sistema di pianeti chiamato **sistema solare** il sole è la stella centrale attorno a cui ruotano tutti i pianeti. Nel sistema solare ci sono ben otto pianeti che sono:

1. Mercurio
2. Giove
3. Marte
4. Venere
5. Saturno
6. Urano
7. Terra
8. Nettuno

Al centro, come è già stato detto c'è il sole che è una stella luminosa. Tra il 1600 ed il 1620 Keplero formulò le sue tre leggi fondamentali che stanno alla base della moderna astrofisica:

1. **Prima legge di Keplero** afferma che i pianeti ruotano attorno al sole percorrendo orbite ellittiche, ed il sole occupa uno dei fuochi dell'ellisse.
2. **Seconda legge di Keplero** la quale afferma che la velocità areale di un pianeta è costante .
3. **Terza legge di Keplero** la quale afferma che il quadrato del periodo di rivoluzione do ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

Graficamente si ha:

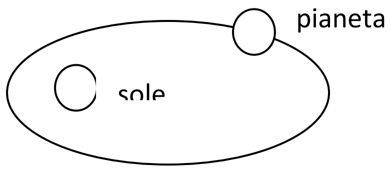

Figura 9.1

Formalmente la terza legge di Keplero si può scrivere in questo modo:

$$T^2 = kR^3 \qquad (9.1)$$

Le tre leggi di Keplero forniscono una descrizione cinematica del moto dei pianeti attorno al sole. Si noti che la velocità detta **areale** sostanzialmente è la velocità con cui varia l'area spazzata dal raggio vettore durante il suo movimento. Pertanto, matematicamente parlando, la velocità areale si definisce in questo modo:

$$V_a = \frac{dA(t)}{dt} \qquad (9.2)$$

Dove A è l'area sottesa durante lo spostamento.

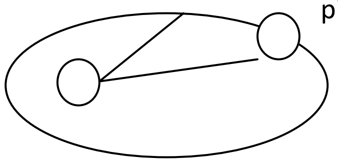

Figura 9.2

Se è vero che la velocità areale è costante allora se approssimiamo la traiettoria ellittica del piano ad una circonferenza possiamo capire facilmente che siamo di fronte ad un moto circolare uniforme e quindi:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\alpha = accelerazione\ angolare = 0$$

Detto ciò, analizziamo la relazione principale che sta alla base della teoria della gravitazione universale. Tale relazione dovuta ad Isaac Newton afferma che: due corpi di massa rispettivamente m_1 ed m_2 si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle due masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Tale forza ha la direzione parallela alla retta congiungente i baricentri dei corpi considerati.

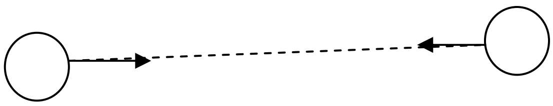

Figura 9.3

Tale legge viene espressa nel seguente modo:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \qquad (9.3)$$

La costante γ viene detta **costante di gravitazione universale** e vale circa:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \qquad (9.4)$$

Tale relazione verrà ripresa più avanti quando tratteremo l'elettrostatica in quanto la forza elettrostatica obbedisce ad una relazione del tutto simile alla (9.3). Osserviamo che, se una data massa è soggetta all'azione gravitazionale di più masse la forza risultante su di essa è chiaramente la somma vettoriale delle singole forze (**principio di sovrapposizione**). Inoltre, la legge della gravitazione universale solitamente viene enunciata per i corpi puntiformi. Se abbiamo a che fare con corpi estesi è necessario suddividere l'oggetto in tantissimi corpi di massa talmente piccola da essere considerati dei punti materiali per poi applicare correttamente il principio di sovrapposizione.

Consideriamo ora il caso in cui un corpo di massa ‘m’ si trovi su un pianeta di massa ‘M’. Vogliamo per esempio calcolare l’accelerazione di gravità su tale pianeta. Innanzitutto scriviamo la relazione generale:

$$F_g = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

Siccome R è il raggio del pianeta possiamo supporlo noto e quindi:

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2} \rightarrow g = \gamma \frac{M}{R^2} \qquad (9.5)$$

Ovviamente, se il corpo si trova ad un’altezza ‘h’ dalla superficie del pianeta si scrive la precedente relazione nel seguente modo:

$$g = \gamma \frac{M}{(h+R)^2} \qquad (9.6)$$

Consideriamo ora un generico corpo ruotante attorno ad un pianeta (per esempio un generico satellite) come viene mostrato di seguito:

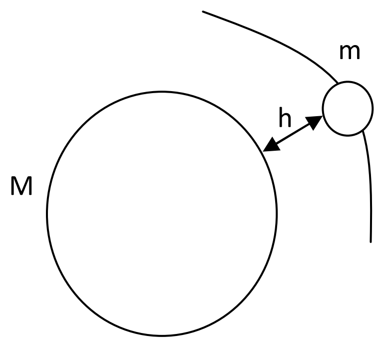

Figura 9.4

La forza attrattiva sarà data da:

$$F_g = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}$$

Mentre la forza centrifuga (la quale è pari alla forza centripeta (forza normale) in modulo) sarà data da:

$$F_c = m\omega^2(R+h) = m\frac{v^2}{(R+h)}$$

Per una definizione più precisa della forza centrifuga si veda il capitolo 8 sulle proprietà dei fluidi. Ad ogni modo, la permanenza in orbita si ha quando:

$$F_c = F_g \qquad (9.7)$$

E pertanto:

$$m\frac{v^2}{(R+h)} = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2} \rightarrow v^2 = \frac{\gamma M}{(R+h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma M}{(R+h)}} \qquad (9.8)$$

La relazione 9.8 mostra la velocità orbitale del satellite.

9.2 Energia potenziale gravitazionale.

La forza gravitazionale è una forza conservativa, quindi è possibile applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica ed ha senso parlare dell'energia potenziale. Tale energia potenziale si calcola semplicemente integrando la forza gravitazionale lungo un cammino congiungente le due masse, e quindi:

$$U_p = \int_l F_g dl$$

Dove 'l' è proprio tale cammino. Quindi:

$$\int_r \gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{dr} = \gamma \frac{mM}{r}$$

Pertanto l'**energia potenziale gravitazionale** è data da:

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} \qquad (9.9)$$

Vediamo il significato del segno meno. Innanzitutto, osserviamo che l'energia potenziale decresce al crescere della distanza dal corpo e pertanto l'energia potenziale e si annulla per r→ ∞. Pertanto il suo massimo valore (0 per l'appunto) si ha per distanze infinite. Vediamo ora di calcolare il lavoro che compie la forza gravitazionale su un corpo che cade da un'altezza 'h'. Siccome:

$$L = \Delta E_p = -\gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r+h}$$

Raccogliendo si ottiene:

$$L = -\gamma mM (\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h})$$

Se la distanza r dei corpi è molto maggiore del salto di caduta h allora possiamo tranquillamente scrivere:

$$L = -\gamma mM \left(\frac{(r+h)-r}{r(r+h)} \right) \rightarrow -\gamma mM (\frac{(r+h)-r}{r^2})$$

In quanto per h<<r abbiamo:

$$r(r+h) \rightarrow r^2$$

Quindi, siccome è nota la relazione 9.5 possiamo utilizzarla e scrivere:

$$gr^2 = \gamma \rightarrow L = -mgr^2 \frac{(r+h)-r}{r^2} \rightarrow L = \Delta E_p = -mgr^2 \frac{h}{r^2} = -mgh$$

Pertanto abbiamo dimostrato che l'energia potenziale, per h<<r assume l'usuale definizione. Vediamo un esempio.

ESEMPIO: Supponiamo di avere una sfera di piombo avente raggio R, ed al suo interno viene praticata una cavità sferica nel seguente modo:

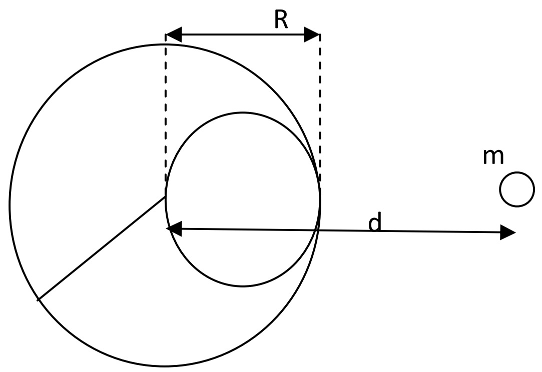

Figura 9.5

Prima di praticare la cavità, la massa della sfera era pari a M Kg. Supponiamo di avere anche un corpo di massa m distante 'd' dalla sfera di piombo. Vogliamo calcolare la forza di attrazione tra il corpo di massa m e la sfera di piombo.

Chiaramente la forza gravitazionale è data da:

$$F_g = \gamma \frac{mM}{d^2}$$

Siccome però la sfera originaria viene privata di una sua "porzione" si ottiene:

$$F_g = \gamma \frac{mM}{d^2} - \gamma \frac{M'm}{(d - {}^{R}/_{2})^2}$$

Dove chiaramente M' è la massa della sfera asportata e quindi:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\rho V'}{\rho V} = \frac{V'}{V}$$

Dove:

$$V' = \frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(R)^3$$

Pertanto si ottiene:

$$\frac{M'}{M} = 1/8$$

Dunque la forza gravitazionale è data da:

$$F_g = \gamma Mm(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2})$$

Vediamo ora cosa succede se voglio liberare un corpo di massa ‘m’ dalla forza gravitazionale di un pianeta. Supponiamo che tale corpo di massa ‘m si trovi su un pianeta avente un raggio R ed una massa M. Supponiamo di lanciare verso l’alto tale corpo con una velocità ‘v’. Allora tale corpo possiederà una energia meccanica data da:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r}$$

Il corpo sarà completamente libero dall’effetto dell’attrazione gravitazionale quando:

$$E_t = 0$$

Ossi quando la sua energia totale sarà nulla. Questo vuol dire che, il corpo di massa ‘m’ sarà completamente libero dall’azione gravitazionale quando sarà ad una distanza infinita dal pianeta con una velocità nulla. Quindi formalmente si può scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{mM}{r} \qquad (9.10)$$

Pertanto la **velocità di fuga** ossia la velocità necessaria al corpo per sfuggire dall’azione gravitazionale sarà data da:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} \qquad (9.11)$$

Vediamo un esempio

<u>ESEMPIO</u>: Supponiamo di avere un satellite che deve essere lanciato ad un’altezza ‘h’ dalla superficie della terra. Vogliamo che tale satellite possa muoversi sull’orbita circolare terrestre. Conoscendo il raggio terrestre (R=6400 Km), si desidera chiaramente calcolare la velocità che permette di verificare la precedente condizione ed il periodo di rotazione del satellite.

Tale esempio non è particolarmente impegnativo. Infatti sappiamo che la forza gravitazionale è data da:

$$F_g = \gamma\frac{mM}{R^2}$$

Siccome il satellite ruota su un’orbita circolare subisce l’accelerazione normale data da:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Quindi, possiamo scrivere:

$$\gamma\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

Ottenendo:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}$$

Il periodo di rotazione è dato da:

$$T = \frac{2\mu R}{v}$$