CAPITOLO 7: ESEMPI PRATICI:

7.1 Esempi di dinamica.

Questo capitolo vuole fornire una serie di esempi pratici dei concetti illustrati nei capitoli precedenti con qualche approfondimento. Vediamo subito un semplicissimo esempio.

ESEMPIO: Supponiamo di avere un piano privo di attrito (liscio) su cui risiedono due blocchi di massa rispettivamente m_1 e m_2 legati tra loro da una fune di massa trascurabile. Sul blocco di massa m_1 agisce una forza $\vec{F}$ avente una intensità nota. Si desidera calcolare l'accelerazione di ciascun corpo e la tensione della fune.

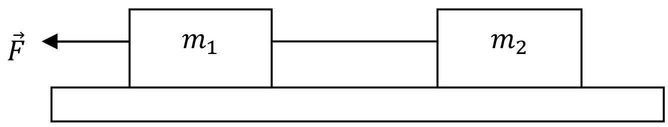


Figura 7.1

L'esempio è piuttosto semplice. Siccome non vi è attrito, e i due blocchi sono legati tra loro da una fune, essi sono vincolati a muoversi con la stessa legge oraria. Pertanto, essi avranno la stessa accelerazione. Quindi si può scrivere il bilancio delle forze in questa maniera:

$$\vec{F} = M\vec{a}$$

Dove chiaramente M è la massa complessiva data da:

$$M = m_1 + m_2$$

Pertanto la soluzione dell'esempio è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M}$$

A questo punto non ci resta che calcolare la tensione della fune. Si osservi che si ha moto solo lungo la direzione orizzontale e non verticale in quanto i corpi non fluttuano nell'aria bensì rimangono attaccati alla superficie. Calcoliamoci la tensione che indichiamo per comodità con T:

$$\vec{F} - \vec{T} = m_1\vec{a} \rightarrow \vec{T} = \vec{F} - m_1\vec{a} \rightarrow \vec{T} = M\vec{a} - m_1\vec{a}$$

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione due blocchi di massa rispettivamente $m_1$ed m_2, posti in legame tra loro tramite una fune di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola anch'essa di massa trascurabile come viene mostrato in figura:

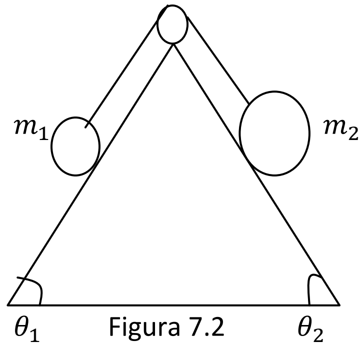
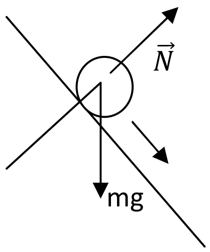


Figura 7.2

Trascurando ogni forma di attrito si desidera calcolare l'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune.

Anche questo esempio è piuttosto banale. Entrambi i corpi sono propensi a scendere lungo il piano inclinato con una determinata accelerazione che calcoliamo subito:



scomposizione lungo gli assi: y: $\vec{N} - m\vec{g}\cos\theta = 0$ $x: m\vec{g}\sin\theta = m\vec{a}$

Figura 7.3

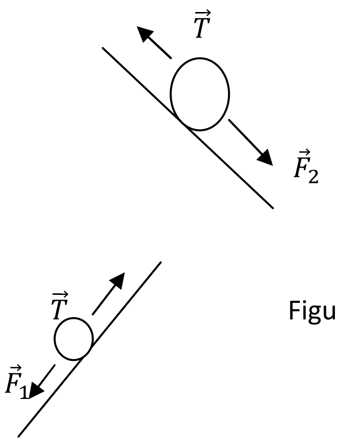
Quindi:

$$\vec{a} = \vec{g}\sin\theta$$

Se la massa m_2 è maggiore della massa m_1 vorrà dire che sarà la massa m_2 a scendere (nostra ipotesi di lavoro). Pertanto, la massa complessiva sarà data da: $M = m_1 + m_2$ e l'accelerazione sarà la medesima per entrambi i corpi. Quindi:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_T}{M}$$

Dobbiamo, a questo punto, calcolarci la forza totale che per comodità è stata indicata con $\vec{F}_T$. Per fare ciò è sufficiente analizzare le singole forze che agiscono su ogni massa:



$$\vec{F}_2 - \vec{T} = m_2\vec{a}$$

$$\vec{F}_1 - \vec{T} = m_1\vec{a}$$

Figura 7.4

Pertanto, risolvendo il precedente sistema si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_2 - \vec{F}_1}{(m_2 + m_1)} = \frac{(m_2\vec{g}\sin\theta_2 - m_1\vec{g}\sin\theta_1)}{(m_2 + m_1)}$$

Raccogliendo l'accelerazione gravitazione si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}(m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1)}{(m_2 + m_1)}$$

La tensione della fune si calcola ricordandosi che:

$$\vec{T} = \vec{F}_2 - m_2\vec{a} \rightarrow \vec{T} = m_2\vec{g}\sin\theta_2 - m_2\vec{a}$$

ESEMPIO: Si consideri la seguente accelerazione:

$$a(t) = a_0 + b_0 t$$

Vogliamo calcolare la velocità e lo spazio percorso. L'esempio è un esempio semplicissimo di cinematica. Essenzialmente si deve effettuare un'integrazione per calcolare la velocità e lo spazio percorso. In particolare:

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t (a_0 + b_0 t)dt = \int_0^t a_0 dt + \int_0^t b_0 t dt$$

Pertanto:

$$v(t) = a_0\int_0^t dt + b_0\int_0^t tdt = a_0 t + \frac{1}{2}b_0 t^2 + v_0$$

Visto che a_0 e b_0 sono costanti. Analogamente per calcolare lo spazio percorso si integra la velocità nel tempo ottenendo:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{1}{2}b_0 t^2\right)dt$$

Pertanto:

$$x(t) = \int_0^t a_0 tdt + \int_0^t \frac{1}{2}b_0 t^2 dt = a_0\int_0^t tdt + \frac{1}{2}b_0\int_0^t t^2 dt$$

Quindi:

$$x(t) = a_0\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}b_0 t^3 + x_0$$

Si noti che v_0 e $x_0$sono rispettivamente la velocità e la posizione iniziale e sono costanti.

ESEMPIO: Supponiamo di avere un corpo di massa ‘m’ che si trovi fermo inizialmente ad una quota nota ‘h’ su un pista priva di attrito, come mostrato di seguito:

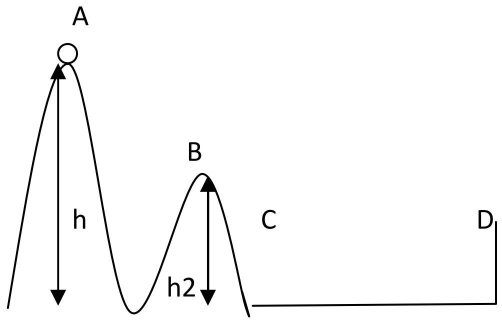


Figura 7.6

Si desidera calcolare la velocità del corpo nella posizione C sapendo che nella posizione D lo stesso si ferma, e che il tratto CD ha una determinata lunghezza L. Inoltre è nota l’altezza del punto B (h_2).

Questo esempio è un po’ meno banale rispetto ai precedenti. E’ sufficiente però notare che l’univa forza effettiva agente sul corpo di massa ‘m’ è la forza peso la quale è conservativa e pertanto vale il principio di conservazione dell’energia meccanica il quale afferma che:

$$E_{m,1=}E_{m,2}$$

Dove:

$$E_{m,1} = energia\ meccanica\ nello\ stato\ 1$$

$$E_{m,2} = energia\ meccanica\ nello\ stato\ 2$$

Quindi:

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

Dove:

$E_{m,A} = energia\ meccanica\ del\ corpo\ nel\ punto\ A$

$E_{m,B} = energia\ meccanica\ del\ corpo\ nel\ punto\ B$

Pertanto:

$$E_{m,A} = E_{p,A} + E_{c,A}$$

Dove chiaramente $E_{p,A}$ è l’energia potenziale nel punto A e $E_{c,A}$ è l’energia cinetica nel punto A. Analogo discorso vale per il punto B. Pertanto:

$$E_{m,A} = mgh + \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{m,B} = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Chiaramente nel punto A la velocità del corpo è nulla e pertanto si ha:

$$mgh = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Siccome h e $h_2$sono supposte note, si ottiene che la velocità nel punto B è data da:

$$v_B^2 = \frac{2(mgh - mgh_{2)}}{m} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2mg(h-h_2)}{m}}$$

Ottenuta la velocità nel punto B si può ottenere la velocità nel punto C con un meccanismo simile, sapendo a priori che nel punto C la quota è nulla e pertanto:

$$E_{m,B} = E_{m,C} \rightarrow mgh_2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_c^2$$

Pertanto:

$$v_c = \sqrt{\frac{2m(gh_2+v_B^2}{m}} = \sqrt{2(gh_2+v_B^2)}$$

ESEMPIO: Supponiamo di analizzare un atomo di idrogeno (H). L'atomo di idrogeno ha un elettrone che ruota intorno ad un protone su un'orbita circolare di raggio R=5,28 $\cdot\, 10^{-11}m$, con una velocità di 2,18 $\cdot$ 106m/s. Vogliamo calcolare l'accelerazione dell'atomo di idrogeno.

Innanzitutto l'orbita è circolare e pertanto l'elettrone si muove di moto circolare uniforme. Quindi possiamo tranquillamente scrivere:

$$a = \frac{v^2}{R} = 9 \cdot 10^{22}\, {}^{m}/_{s^2}$$

In quanto l'accelerazione normale è l'unica accelerazione esistente (quella tangenziale è nulla perché il moto è circolare uniforme).

ESEMPIO: Supponiamo di avere la seguente situazione fisica:

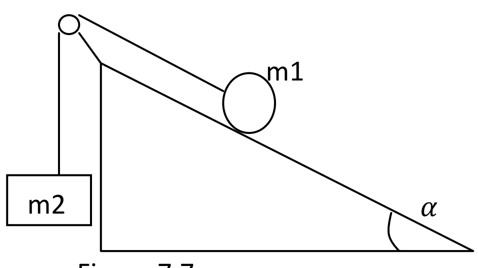


Figura 7.7

Supponiamo che la carrucola non eserciti nessun tipo di attrito, vogliamo calcolare la tensione della fune e l'accelerazione di ciascun corpo.

Osserviamo subito che l'accelerazione del corpo di massa m_1 è la stessa che ha il corpo di massa m_2. Pertanto, si può effettuare il bilancio delle forze in gioco:

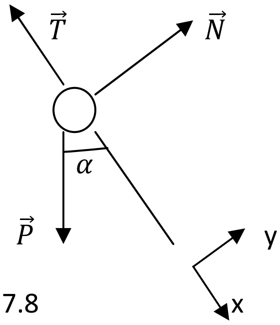


Figura 7.8

Effettuiamo la scomposizione usuale lungo gli assi cartesiani:

$asse\ y$: $N - m_1 g \sin \alpha = 0$ $perch$è $non\ vi$ è $moto$

$asse\ x$: $T - m_1 g \cos \alpha = m_1\, a$

Pertanto:

$$N = m_1 g \sin \alpha$$

Analizziamo le forze cha agiscono sul corpo di massa m_2:

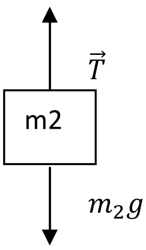


Figura 7.9

Pertanto:

$$T - m_2 g = m_2 a$$

Ora abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -T + m_2 g = m_2 a \\ T - m_1 g \cos \alpha = m_1\, a \end{cases}$$

Pertanto:

$$-m_2 a + m_2 g - m_1 g \cos \alpha = m_1 a \to a = \frac{(m_2 g - m_1 g \cos \alpha)}{m_2 + m_1}$$

La tensione invece sarà data da:

$$T = m_1 a + m_1 g \cos \alpha$$

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione un corpo di massa ‘m’ appoggiato su un piano orizzontale e supponiamo di applicare una forza ad esso come mostrato in figura:

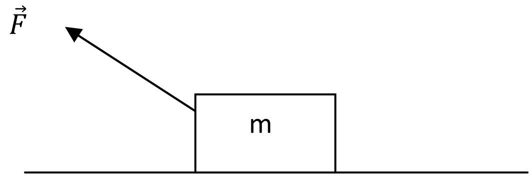


Figura 7.10

Supponiamo che α sia l’angolo di inclinazione della forza rispetto al piano orizzontale. Supponiamo che tale forza permette al blocco di spostarsi di una distanza pari a ‘d’ e che il coefficiente di attrito dinamico sia pari a μ_d. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza.

Tale esempio è abbastanza banale. E’ sufficiente ricordarsi che:

$$L = F \cdot d$$

Dove chiaramente la forza F è la risultante delle forze agenti sul corpo di massa ‘m’. Pertanto effettuiamo coma al solito un bilancio delle forze:

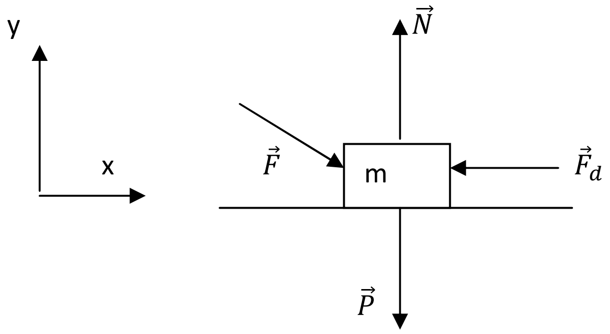


Figura 7.11

Abbiamo:

$$\begin{cases} F_y + N - mg = 0 \\ F - F_d = ma \end{cases}$$

Dato che la forza di attrito dinamico vale: $F_d = \mu_d N$ e che la componente orizzontale della forza vale: $F_x = F\cos\alpha$, possiamo scrivere:

$$N = mg - F\sin\alpha$$

E quindi:

.....

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione una stecca da biliardo. Tale stecca colpisce centralmente una palla da biliardo la quale ha una massa di 0,15 Kg,esercitando una forza di 40 N per circa 10 ms. Vogliamo calcolare la velocità della palla dopo l'urto con la stecca.

Tale esempio è banale se ci si ricorda che:

$$\vec{P} = m\vec{V} \rightarrow \overrightarrow{\Delta P} = m\overrightarrow{\Delta V}$$

Siccome la variazione di velocità è uguale all'accelerazione (per definizione) si ha:

$$m\Delta\vec{V} = \vec{F}\Delta t$$

Pertanto:

$$\Delta V = \frac{F\Delta t}{m}$$

Sostituendo le variabili coni dati numerici si trova il risultato desiderato.

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione un disco omogeneo di massa M. Attorno a questo disco è avvolta una piccola corda di massa trascurabile, come viene mostrato in figura:

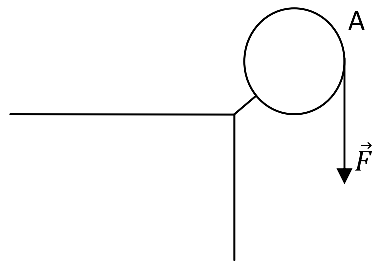


Figura 7.12

Supponiamo che nel punto A viene applicata una forza $\vec{F}$, vogliamo calcolare le accelerazioni lineari ed angolari del disco stesso. Per poter risolvere questo esempio è necessario ricordarsi che il momento di inerzia del disco è:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Mentre il momento torcente vale:

$$\tau = I\alpha$$

Il momento della forza vale:

$$M = F \cdot R$$

Siccome fisicamente il momento di una forza ed il momento torcente rappresentano la medesima cosa, si ha:

$$I\alpha = F \cdot R$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = F \cdot R \to \alpha = \frac{2F}{MR}$$

E quindi abbiamo trovato l'accelerazione angolare. Per calcolare l'accelerazione lineare basta utilizzare la seguente relazione:

$$a = R\alpha$$

Vediamo di effettuare alcune considerazioni in merito alla risoluzione di quest'ultimo esempio. In particolare, nelle rotazioni ad una forza corrisponde il momento di una forza. Anche la quantità di moto ha una grandezza corrispondente nelle rotazioni che è il momento della quantità di moto o momento angolare. Nelle rotazioni, alla massa va sostituito il momento di inerzia che sostanzialmente svolge la medesima funzione, e quindi si ha che:

$$F = ma \quad \boldsymbol{corrisponde\ all'equazione} \quad \tau = I\alpha$$