CAPITOLO 4: DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI:

4.1 Il centro di massa.

Nel precedente capitolo si è parlato ampiamente della dinamica di un punto materiale, ossia di quel ramo della meccanica che si occupa di analizzare le cause che generano il moto di un corpo. In questo capitolo faremo un balzo in avanti, ossia analizzeremo un sistema più complesso rispetto al normale punto materiale. Vedremo di analizzare la dinamica di corpi più complessi ossia di insiemi di punti materiali. In particolare, consideriamo il seguente sistema di punti materiali, come mostrato nella figura qui sotto:

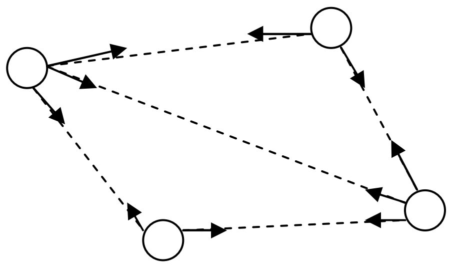

Figura 4.1

Ogni punto materiale interagisce con gli altri tramite una forza. Per esempio se il punto materiale che indichiamo per comodità con il numero 1 interagisce con il punto materiale numero 2, lo fa attraverso la forza $\vec{F}_{1,2}$. Analogamente il punto materiale 2 interagirà con il punto materiale 1 tramite la forza $\vec{F}_{2,1}$. Queste due forze avranno la stessa direzione, la stessa intensità, ma verso opposto. In sostanza, vale il terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione). Possiamo pensare di suddividere le forze agenti sul sistema in **forze interne** $\vec{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{I}}$ossia le forze che permettono le interazioni tra le varie particelle costituenti il sistema, ed in **forze esterne** $\vec{F}^{E}$ossia quelle forze che risultano esterne al sistema preso in considerazione. Si presti particolare attenzione al fatto che interno od esterno è un concetto fortemente dipendente da come viene definito il sistema in questione. Inoltre la natura delle forze interne può essere di qualsiasi tipo. Per esempio, le forze esistenti tra le particelle possono essere forze di natura elastica (molle,…), oppure forze di natura gravitazionale, e così via. E' importante notare che la risultante delle forze interne agenti su una singola particella è non nulla anche se **la risultante delle forze interne del sistema è nulla**. Quindi si ha:

$$\vec{R}^{I} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{I} = 0 \qquad (4.1)$$

Per ogni particella P_i di massa m_i è possibile associargli una posizione, una accelerazione, una velocità, una quantità di moto, eccetera. Insomma è possibile associargli tutte le grandezze scalari e vettoriali definite fino ad ora. Detto ciò vediamo di fornire alcuni importanti concetti per capire meglio come affrontare situazioni in cui siamo in presenza di un sistema di punti materiali. Innanzitutto, definiamo **centro di massa** che indichiamo per comodità con $\vec{R}_{cm}$ la seguente espressione:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} \qquad (4.2)$$

Sostanzialmente, il centro di massa è un punto geometrico individuato dalle coordinate del vettore specificato nella relazione 4.2. Scomponendo tale vettore lungo i relativi assi cartesiani si ottiene:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad (4.3)$$

$$Z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Si noti che il centro di massa rispetto agli altri n punti materiali presenti nel sistema non dipende dal sistema di riferimento scelto. Il significato di questa grandezza è quello di centro delle masse. Più specificatamente, il centro di massa di un determinato sistema ha lo stesso moto di un singolo punto materiale. Praticamente, il centro di massa da solo descrive la cinematica di tutto il sistema di punti materiale. Il seguente grafico dovrebbe chiarire le idee:

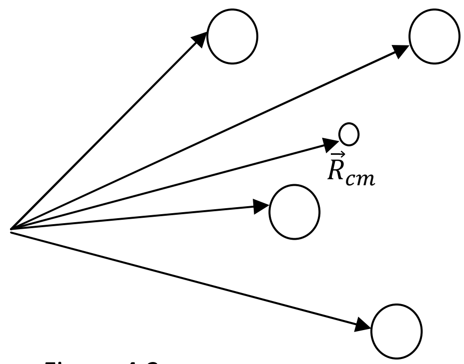

Figura 4.2

Quando il sistema di punti materiali effettua un moto di tipo traslazionale, ossia non ci sono movimenti rotativi, Anche il centro di massa ha una sua velocità così definita:allora il centro di massa descrive molto bene il moto dell'intero sistema. Ma se il sistema di punti materiale in questione subisce anche una rotazione, allora il discorso cambia. Vedremo meglio questo concetto di traslazione e di rotazione quando descriveremo il corpo rigido. In sostanza è bene sottolineare che quando si ha una rotazione il moto delle singole particelle è differente dal moto del centro di massa. Vediamo ora di definire anche la **velocità del centro di massa**:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad (4.4)$$

Come si può facilmente notare, la velocità del centro di massa è uguale al rapporto tra la quantità di moto complessiva del sistema e la massa totale dello stesso. Pertanto possiamo tranquillamente affermare che il sistema nel suo complesso si muoverà con velocità pari a $\vec{v}_{cm}$ ed avrà la sua massa totale pari a m e la sua quantità di moto pari a $\vec{P}$. Pertanto, si avrà:

$$\vec{P} = m\vec{v}_{cm} \qquad (4.5)$$

Nella maniera analoga è possibile ricavare l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m} \qquad (4.6)$$

Se il sistema di riferimento risulta essere inerziale possiamo scrivere:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E$$

Siccome però la risultante delle forze interne è nulla si può tranquillamente scrivere:

$$m\vec{a}_{cm} = \vec{R}^E \qquad (4.7)$$

Pertanto il centro di massa si muove come un punto materiale in cui si sia concentrata tutta la massa del sistema ed a cui si sia applicata la risultante delle forze esterne. Supponiamo ora che la risultante delle forze esterne risulti essere nulla. In tal caso si ha:

$$\vec{a}_{cm} = 0 \rightarrow \vec{v}_{cm} = costante \rightarrow \vec{P} = costante$$

Pertanto, se la risultante delle forze esterne è nulla allora la quantità di moto complessiva del sistema rimane costante nel tempo e pertanto il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Prendiamo, a titolo di esempio, due punti materiali P1e P2 isolati e posti ad una certa distanza l'uno dall'altro.Questi due punti possono interagire tra loro:

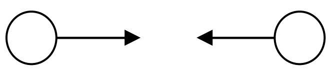

Figura 4.3

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = costante\ se\ \vec{R}^E = 0$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

Pertanto, si ottiene:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Si presti attenzione che quest'ultimo risultato non è il terzo principio della dinamica,in quanto non è detto che le due forze abbiano la stessa retta di azione. Questa cosa la rispenderemo quando descriveremo nel dettaglio il principio di conservazione del momento angolare.

Infine vale la pena citare il fatto che,a volte,quando si studiano problemi riguardanti la dinamica di un sistema di punti materiali, è opportuno considerare come sistema di riferimento il sistema di riferimento del centro di massa, ossia il sistema di riferimento che ha come origine il centro di massa.

4.1 gli urti.

Può capitare, quando si lavora con più particelle, che queste durante la loro traiettoria urtino un ostacolo o addirittura si urtino tra di loro. Anzi a volte tale urto è necessario per sprigionare l'energia occorrente. Si pensi per esempio all'esplosione di una bomba atomica. I protoni presenti nel nucleo di Uranio vengono continuamente bombardati da altre particelle chiamate neutroni (torneremo nel dettaglio del fenomeno più avanti). Innanzitutto durante un urto intervengono determinate forze che sebbene sono intense, sono anche di breve durata. Tali forze vengono dette **forze impulsive**. Chiaramente durante un urto può succedere che:

1. Ci sia la totale distruzione dei corpi coinvolti;
2. Ci sia una deformazione dei corpi coinvolti;
3. Ci sia un rimbalzo dei corpi interessati all'urto;
4. Ci sia la fusione dei corpi interessati;

Ricordandoci che un corpo di massa 'm' sottoposto all'azione di forze aventi risultante $\vec{R}$ subisce un'accelerazione $\vec{a}$ tale che:

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}$$

Chiaramente l'accelerazione è la variazione di velocità nel tempo e pertanto si scrive:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ma si può anche scrivere:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{R}}{m} \rightarrow \vec{R} = \frac{md\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Il prodotto della risultante delle forze agenti sul corpo per dt mi fornisce **l'impulso della forza**. Quindi, per definizione si ha:

$$d\vec{P} = \vec{R}dt \qquad (4.8)$$

L'impulso della forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto. Detto ciò, se al posto di un singolo corpo abbiamo più corpi, allora la quantità di moto complessiva del sistema sarà data dalla somma vettoriale di tutte le singole quantità di moto.

Per l’ormai noto principio di azione e reazione, durante la collisione tra due corpi, agiscono due forze uguali ma opposte e quindi si hanno due impulsi uguali ma opposti. Pertanto, in base a quanto appena detto si ottiene:

$$d\vec{P}_1 = -d\vec{P}_2$$

Consideriamo,a titolo di esempio, due particelle che collidono tra loro. Se il sistema complessivo è composto soltanto da queste due particelle, allora le uniche forze agenti sono forze di natura interna dovute chiaramente all’urto e pertanto si ottiene la costanza della quantità di moto:

$$d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = 0$$

Quindi se la risultante delle forze esterne è nulla, allora la quantità di moto si conserva. Tale principio è detto **principio di conservazione della quantità di moto.** Quando si dice che la risultante delle forze esterne è nulla significa che forze esterne al mio sistema meccanico composto dai corpi interessati dall’urto si annullano a vicenda. Forze esterne al sistema meccanico possono essere, per esempio, la forza di attrito, la forza gravitazionale, e così via. Durante la collisione tra i corpi però le forze impulsive sono così intense da rendere trascurabili le forze esterne. Quindi il principio di conservazione della quantità di moto si può sempre utilizzare, a patto che vengano considerati, nei calcoli, l’istante **immediatamente precedente** all’urto e l’istante **immediatamente successivo** allo stesso. Analizziamo ora i principali tipi di urto, partendo dall’**urto completamente anelastico** dove i corpi dopo l’urto rimangono attaccati.

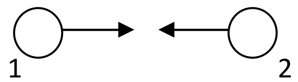

Figura 4.4

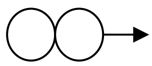

Figura 4.5

Nelle figure 4.4 e 4.5 vengono mostrati due corpi di massa rispettivamente m_1 e m_2 poco prima e poco dopo l’urto. Appena dopo l’urto si avrà un corpo con massa totale pari a: $m_1 + m_2$. Vediamo come si conserva la quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{cm}$$

Quindi la somma delle quantità di moto dei due corpi appena prima dell’urto è pari alla quantità di moto del sistema complessivo appena dopo l’urto, dove però si considera la quantità di moto del centro di massa, visto che a tutti gli effetti il sistema risultante è un sistema di punti materiali, e quindi un sistema complesso. Pertanto la velocità del centro di massa sarà:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.9)$$

Vediamo ora come si comporta l'energia cinetica a causa dell'urto completamente anelastico:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

E' necessario notare fin da subito che l'energia cinetica finale ovviamente inferiore rispetto all'energia cinetica iniziale, e questo perché in questo tipo di urto viene assorbita proprio l'energia cinetica,in quanto dopo l'urto il sistema comprensivo dei due corpi si muove con velocità minore. Vediamo un esempio di urto completamente anelastico.

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione un recipiente verticale al cui interno è presente una molla avente una determinata costante elastica che per comodità indichiamo con il carattere K. Sulla molla viene appoggiato un disco di massa M . Supponiamo che un corpo di massa m urta in maniera completamente anelastica il disco. La velocità del corpo prima dell'urto è v. Vediamo come calcolarci l'energia dissipata durante l'urto.

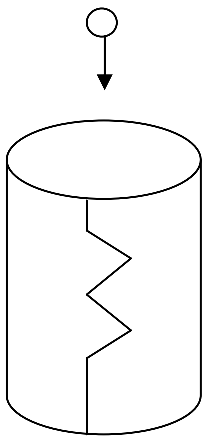

Figura 4.6

Siccome l'urto è completamente anelastico si conserva soltanto la quantità di moto e non l'energia cinetica. Pertanto possiamo tranquillamente scrivere:

$$mv = (m + M)V$$

Pertanto possiamo tranquillamente ricavarci la velocità finale del disco più la pallina:

$$V = \frac{mv}{m + M}$$

Siccome l'energia cinetica non si conserva si ha:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m + M)V^2$

Possiamo, dato che conosciamo V, calcolarci la variazione di energia cinetica come:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m + M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

Al contrario dell'urto completamente anelastico, nell'**urto elastico** si conserva anche l'energia cinetica, e questo implica che le forze interne sono di natura conservativa. In questo tipo di urto, si ha una deformazione, come nel caso dell'urto completamente anelastico, con la sola differenza che successivamente all'urto, le particelle riprendono il loro stato iniziale, ossia il loro stato poco prima dell'urto. Graficamente si ha:

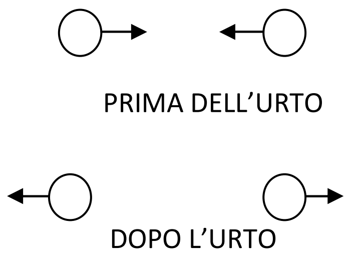

Figura 4.6

Pertanto in questo tipo di urto si conserva sia la quantità di moto sia l'energia cinetica. Pertanto si ha:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,fin}^2$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{1,fin} + m_2v_{2,fin}$$

Vediamo subito un esempio.

<u>ESEMPIO:</u> Supponiamo di avere un corpo di massa m che procede con velocità v e che urta un altro corpo di massa M che è in quiete. Ritenendo l'urto perfettamente elastico si vuole determinare la velocità con cui i due corpi si muovono dopo l'urto. Graficamente si ha:

Figura 4.7

Siccome l'urto è elastico si ha la conservazione sia della quantità di moto sia dell'energia cinetica e pertanto si può tranquillamente scrivere:

$$mv = mv_f + MV_f$$

Dove con v_f si indica la velocità della particella di massa m dopo l'urto, mentre con V_f si indica la velocità della particella di massa M subito dopo l'urto. Analogamente si ha per l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2$$

Pertanto, date le due espressioni appena citate (principio di conservazione dell'energia cinetica e principio della quantità di moto), è possibile calcolare le due velocità finali richieste dal problema. Pertanto:

$$m(v - v_f) = MV_f$$

$$mv^2 = mv_f^2 + MV_f^2$$

Analizziamo il principio di conservazione dell'energia cinetica:

$$m(v^2 - v_f^2) = MV_f^2 \rightarrow m(v - v_f)(v + v_f) = MV_f^2$$

Dividendo ora ambo i membri delle due equazioni appena ottenute si ha:

$$\frac{m(v-v_f)(v+v_f)}{m(v-v_f)} = \frac{MV_f^2}{MV_f} \rightarrow v + v_f = V_f$$

Con:

$$v_f = \frac{mv-MV_f}{m} = \frac{mv-M(v+v_f)}{m} \rightarrow v_f = \frac{2mV_f}{m+M}$$

Nell'**urto anelastico** invece i corpi dopo l'urto si separano come avviene nell'urto elastico con la sola differenza che non si conserva l'energia cinetica in quanto una certa frazione di essa viene assorbita. Giunti a questo punto possiamo tracciare una conclusione del presente paragrafo fornendo una descrizione di massima dell'urto e dei vari tipi di urto. Innanzitutto, un urto è una iterazione tra due o più corpi, e tale iterazione avviene in un piccolissimo (tendente all'infinito) istante di tempo. In tale lasso di tempo, i corpi esercitano tra loro forze intense di breve durata chiamate forze impulsive. Un urto può essere elastico, ed in tal caso si ha la conservazione, oltre che della quantità di moto anche dell'energia cinetica. Un urto può anche essere anelastico ed in tal caso si ha una perdita dell'energia cinetica. Infine nel caso di un urto completamente anelastico, abbiamo che i due corpi rimangono attaccati dopo l'urto e si ha la massima dissipazione di energia cinetica. Esempi classici di urti elastici sono gli urti tra le palle da biliardo. In urti di questo tipo non si ha alcuna deformazione del corpo. La dissipazione dell'energia cinetica avviene mediante scambio di energia termica con l'ambiente circostante. Ma analizziamo ora un caso particolare di urto, ossia l'urto di un corpo in movimento contro una parete.

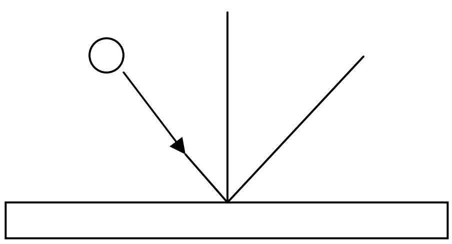

Figura 4.8

Il corpo di massa 'm' quando urta la parete trasmette alla stessa un **impulso** che è uguale alla differenza della quantità di moto prime e dopo 'urto. Pertanto si scrive:

$$I = \Delta\vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i$$

Siccome l'urto è elastico si conserva anche l'energia cinetica e pertanto si scrive:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Si noti inoltre che, scomponendo il moto lungo gli assi cartesiani 'x' e 'y' si ottiene:

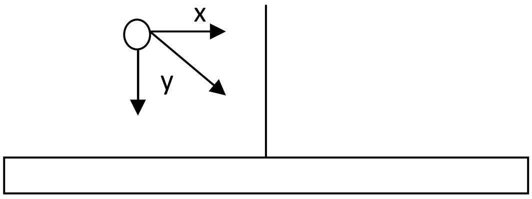

Figura 4.9