CAPITOLO 8: I FLUIDI

8.1 Introduzione.

In questo capitolo iniziamo a trattare un nuovo argomento: il fluido. Le relazioni viste nei capitoli precedenti saranno sicuramente valide anche per gli argomenti che andremo a trattare, anche se molti concetti saranno 'nuovi'. Per **fluido** si intende una sostanza liquida o gassosa. Pertanto esempi di fluidi sono l'acqua che beviamo (H_2O), il gas metano (C_4H) e così via. Mentre nei solidi la posizione delle molecole assume un determinato ordine (struttura cristallina) nei fluidi tale ordine viene a mancare. Anzi, nei fluidi il moto è casuale e le molecole tra loro si urtano di continuo. Consideriamo due molecole che si urtano. Dopo l'urto entrambe viaggiano secondo una propria direzione e prima o poi urteranno altre molecole e così via. La distanza percorsa da una molecola dopo un urto e prima di un altro urto viene chiamata **libero cammino medio** e solitamente si indica tale cammino con il carattere λ. Ad ogni modo i fluidi sono in grado di cambiare la propria forma e di assumere la forma del recipiente che li contiene. Chiaramente i fluidi hanno dei "parametri" che in qualche modo li caratterizzano. Per esempio, possiamo caratterizzare un fluido in base alla sua densità. Abbiamo già incontrato tale grandezza. La densità per definizione è:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La densità di un fluido è quella grandezza che misura in qualche modo la quantità di massa contenuto nell'unità di volume e solitamente viene indicata con il simbolo ρ. La sua unità di misura è: $\frac{Kg}{m^3}$. Il valore della densità dipende sia dalle condizioni esterne della temperatura sia dalle condizioni della pressione. Per esempio se si riscalda un fluido esso si espande e quindi naturalmente la sua densità diminuisce. Analizziamo la relazione che intercorre tra densità e temperatura ed in particolare la relazione che esiste tra la variazione di densità di un fluido in funzione della variazione delle condizioni ambientali in termini di temperatura. In realtà tale relazione non è di tipo lineare, ma per piccole variazioni della temperatura è possibile approssimare tale legge ad una retta (un'approssimazione lineare). Il legame tra densità e temperatura è il seguente:

$$\rho - \rho_o = \alpha(T - T_0) \qquad (8.1)$$

In sostanza, ρ_0 mi rappresenta la densità del fluido alla temperatura T_0 mentre ρ mi rappresenta la densità del fluido alla temperatura T. Il coefficiente α prende il nome di **coefficiente di espansione termica** e di solito è negativo in quanto se la temperatura aumenta per forza di cose la densità deve diminuire. Oltre alla densità un'altra importante caratteristica di un fluido è la sua **comprimibilità.** Per comprimibilità si intende la proprietà che un fluido ha di variare il proprio volume in funzione di una variazione della pressione esterna. Se inizialmente il fluido ha un volume V_i ad una pressione esterna pari a P_i aumentando la pressione chiaramente ci sarà una diminuzione del volume del fluido stesso secondo una relazione del seguente tipo:

$$P - P_0 = -\beta(V - V_0)$$

β viene anche definito **modulo (coefficiente) di comprimibilità**. Per essere più precisi il modulo di comprimibilità vale.

$$\beta = -\frac{dP}{dV/_V} \qquad (8.2)$$

Siccome:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho V = m \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

Pertanto:

$$\beta = -\frac{dP}{-d\rho/_\rho} \rightarrow \beta = \frac{dP\rho}{d\rho} \qquad (8.3)$$

Mettiamo ora insieme i due risultati appena ottenuti. La densità cambia al variare sia della temperatura sia della pressione esterna in quanto è stato detto che la densità è funzione della pressione e della temperatura. Pertanto si può tranquillamente esplicitare la cosa nella seguente maniera:

$$\rho = \rho(P, T) \qquad (8.4)$$

A questo punto mettiamo insieme in un'unica relazione le due dipendenze appena viste. Quindi:

$$\frac{d\rho}{\rho}\text{=-}\frac{dT}{T} + \frac{dP}{P} \qquad (8.5)$$

Dove ovviamente:

$$(\frac{\partial\rho}{\partial T})_{P=cost.}$$

$$(\frac{\partial\rho}{\partial P})_{T=cost.}$$

Vediamo ora un esempio chiarificatore.

ESEMPIO: Supponiamo di avere un fluido con un volume iniziale pari a V_i. Il fluido subisce una variazione di pressione, che indichiamo per comodità con ΔP. Il suo volume diminuisce di una determinata percentuale (%V). Vogliamo calcolare il rapporto di comprimibilità.

Analizzando dettagliatamente il testo dell'esempio si evince facilmente che il volume diminuisce e quindi la variazione di pressione è tutta positiva. Pertanto:

$$\beta = -\frac{dP}{dV/_V} \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{\beta} \rightarrow \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -\int_{P_i}^{P_f} \frac{dP}{\beta}$$

A questo punto svolgiamo questi integrali elementari ed otteniamo:

$$\log\frac{V_f}{V_i} = -\frac{1}{\beta}\int_{P_i}^{P_f} dP \rightarrow \log\frac{V_f}{V_i} = -\frac{1}{\beta}(P_f - P_i)$$

Pertanto:

$$-\beta = \frac{(P_f - P_i)}{\log\frac{V_f}{V_i}}$$

Ricordandosi che: $\frac{V_f}{V_i} = 1 - \%\frac{V}{100} \rightarrow -\beta = \frac{(P_f - P_i)}{\log\frac{1-\%V/_{100}}{V_i}}$

L'esempio appena discusso è abbastanza semplice, ma mostra come utilizzare il modulo di comprimibilità.

8.2 La viscosità.

Un'altra caratteristica dei fluidi è la viscosità. Per definire questa importante proprietà dei fluidi vediamo di analizzare cosa può accadere ad una porzione di fluido di forma, per esempio, di parallelepipedo.

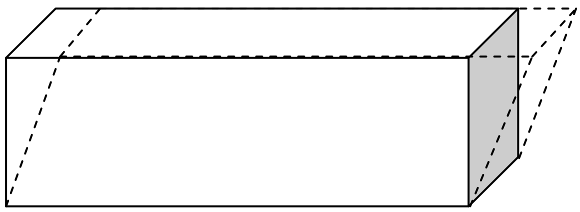


Figura 8.1

Supponiamo che una forza agisca tangenzialmente sulla superficie superiore del precedente parallelepipedo. Questo significa che la superficie verrà sottoposta ad uno **sforzo di taglio** dato da:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Dove con A indichiamo l'area della superficie superiore del parallelepipedo. La deformazione angolare che verrà prodotta sarà data da:

$$\frac{V\Delta t}{h}$$

Vediamo di chiarire quest'ultima formula. Effettuiamo uno zoom su una parte del parallelepipedo:

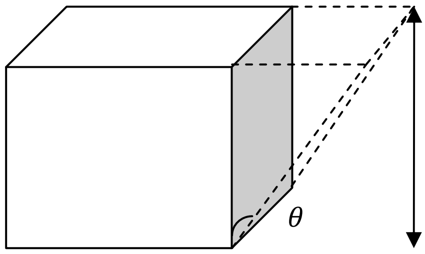


Figura 8.2

L'angolo di inclinazione viene indicato con θ mentre l'altezza del parallelepipedo viene indicata con la lettera h. Applicando uno sforzo di taglio sulla superficie superiore del parallelepipedo si ottiene che quest'ultimo si inclina rispetto alla posizione originale formando un angolo θ per l'appunto. Tale angolo si calcola facilmente osservando che in un tempo pari a Δt ci si sposta lungo l'orizzontale di uno spazio Δx pari a:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

Graficamente si ha:

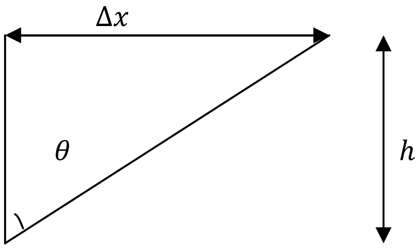


Figura 8.3

Siccome per le basi della trigonometria si ha:

$$h = \cos\theta$$

$$\Delta x = \sin\theta$$

Si ottiene con estrema semplicità:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = \sin\theta \quad \rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta x}{h} = \frac{v \cdot \Delta t}{h} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{v \cdot \Delta t}{h}$$

$$h = \cos\theta$$

Pertanto possiamo dire che $\Delta\theta \cong \frac{v\Delta t}{h}$. La velocità angolare istantanea si ottiene passando al limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta t}{h} = \dot{\theta}$$

Dove:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

Apriamo una piccola parentesi sulle notazioni utilizzate. In particolare:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Quindi, vi è una sorta di legame tra la velocità angolare e l'intensità dello sforzo di taglio. In particolare, attraverso il **coefficiente di viscosità** che viene sovente indicato con μ si scrive:

$$\tau = \mu\dot{\theta} \qquad (8.6)$$

Quest'ultima relazione permette di calcolare lo sforzo generato internamente ad un fluido nota la sua velocità di deformazione. Questa relazione è una caratteristica dei così detti **fluidi newtoniani**. Quasi tutti i fluidi di uso comune obbediscono alla relazione (). L'unità di misura del coefficiente di viscosità è:

$$\frac{N \cdot s}{m^2} \qquad (8.7)$$

Spesso si ricorre al **coefficiente di viscosità cinematica** sovente indicato con υ e che vale:

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \qquad (8.8)$$

Le cui dimensioni sono dell'ordine del: $\frac{m}{s^2}$, per distinguerla dalla **viscosità dinamica $\boldsymbol{\mu}$.** Infine si noti che siccome la densità ha una dipendenza dalla pressione, si ha che se comprimo il fluido aumento la sua densità e pertanto diminuisce la sua viscosità cinematica. Questo effetto risulta importantissimo per i gas ma meno per i liquidi. Vediamo ora un semplice esempio.

<u>ESEMPIO:</u> Supponiamo di avere a disposizione due lastre quadrate di lunghezza l messe in parallelo l'una con l'altra. Supponiamo che la lastra superiore si muova con velocità pari a v. Supponiamo invece che la lastra inferiore sia vincolata ad una molla di costante elastica pari a K e che venga spostata di una quantità generica X. Vogliamo calcolarci la velocità v.

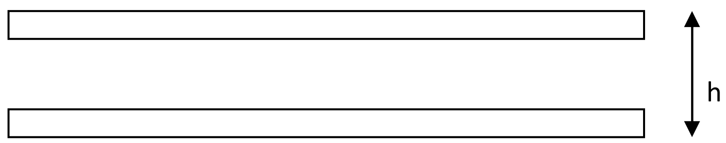


Figura 8.4

La velocità di deformazione è data da: $\dot{\theta} = \frac{v\Delta t}{h}$. Siccome lo sforzo di taglio sulla piastra è dato da:

$\tau = \mu\frac{d\theta}{dt} \rightarrow F = \int_S \tau dS$ dove S è l'area della superficie inferiore.

Questa forza deve uguagliare in qualche modo la forza della molla e pertanto:

$$kX = \int_S \tau dS \rightarrow kX = \mu\frac{v\Delta t}{h} \rightarrow v = \frac{hkX}{\mu\Delta t}$$

Pertanto si può tranquillamente affermare che quando si parla di corpi rigidi sostanzialmente ci si riferisce sempre alla materia avente una certa struttura (es: un pezzo di legno, un'asta di acciaio,…), mentre quando si parla di fluidi si è in qualche modo più interessati a quelle proprietà che possono variare da un punto all'altro del fluido stesso. Ecco che, nel mondo dei fluidi, è più interessante parlare di densità e di pressione piuttosto che di forza e di massa. Definiamo **fluido ideale** un fluido che non possiede forze tangenziali. Su un fluido ideale agiscono solo le pressioni in maniera chiaramente ortogonale. In generale su un fluido si definiscono punto per punto tre grandezze fisiche:

1. Densità
2. Pressione
3. Velocità

Se la densità del fluido è costante si dice che esso è **omogeneo ed incompressibile** mentre, se ci sono forze dissipative il fluido viene detto **viscoso.** In particolare, se il fluido ha densità costante e non è viscoso esso è ideale. Generalmente un fluido ha una densità che varia da un punto all'altro dello stesso.Pertanto si può tranquillamente scrivere:

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Quindi, ad ogni punto del fluido viene associato un scalare (la densità è una grandezza scalare). Questa operazione porta a definire un **campo scalare** per il fluido. Analogamente, la velocità del fluido varia da un punto all'altro dello stesso. Siccome la velocità è una grandezza vettoriale, si definisce un **campo vettoriale** associando ad ogni punto del fluido la propria velocità:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Si chiamano **linee di corrente del fluido** quelle linee che hanno la velocità come vettore tangente. Vediamo ora di trattare brevemente alcuni tipi di fluidi. Innanzitutto, vediamo che grossolanamente ci sono due tipi di fluidi:

1. **Fluidi newtoniani**
2. **Fluidi non newtoniani**

Un fluido newtoniano sostanzialmente è un fluido in cui la velocità non varia con la sua viscosità. Precedentemente è stata definita la viscosità di un fluido come:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\theta}}$$

La viscosità di un fluido rappresenta la resistenza che il fluido stesso oppone al suo scorrimento. La viscosità dipende dal tipo di fluido e dalla sua temperatura. Sperimentalmente si può calcolare la viscosità di un fluido anche nel seguente modo:

$$\mu = \frac{F}{S \cdot {}^{\Delta v}/_{\Delta h}} \qquad (8.9)$$

Dove Δh è la distanza tra due strati di liquidi, Δv è la differenza di velocità tra i due liquidi, S è l'area della superficie dei due strati di liquido. L'equazione (8.9) è attribuita ad Isaac Newton.

8.2 Pressione e lavoro delle pressioni.

La pressione si è già detto che è una grandezza scalare definita dal rapporto tra la forza agente su un superficie e l'area della superficie stessa.

$$P = \frac{F}{A}$$

L'unità di misura della pressione è chiaramente $\frac{N}{m^2}$. La pressione agisce sempre ortogonalmente alla superficie. In equilibrio statico, quando il fluido è in quiete, non ci sono spostamenti e pertanto anche se ci sono delle forze il loro lavoro è nullo. Consideriamo ora la seguente situazione fisica che rappresenta in qualche modo un esempio classico. Supponiamo di possedere un cilindro al cui interno vi è un fluido. Un **cilindro** sostanzialmente è l'organo all'interno del quale scorre il **pistone** il quale,con il suo movimento rettilineo ed alternato, determina le varie fasi di funzionamento di un motore.

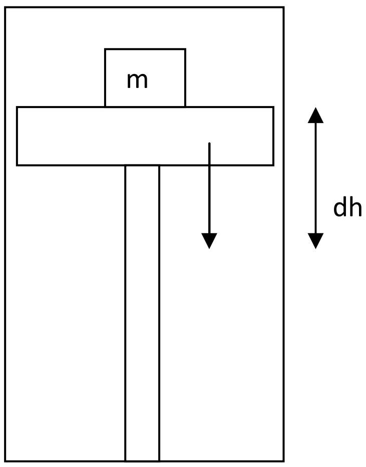


Figura 8.5

Supponiamo di porre un corpo di massa 'm' sul pistone in modo da farlo scendere. Viene ovviamente compiuto lavoro dato da:

$$dL = dF \cdot dh = P \cdot dA \cdot dh$$

Dove dh rappresenta lo spostamento del pistone verso il basso. Integrando si ottiene:

$$L = \int P \cdot dA \cdot dh = \int P \cdot dV \qquad (8.10)$$

La pressione atmosferica viene originata dalla forza gravitazionale (che vedremo nel prossimo capitolo), da parte della terra. Esiste una particolare relazione tra pressione e profondità ed è data dalla **legge di Stevino**. Tale legge afferma che: la pressione cresce linearmente con la profondità. In sostanza più si scende in profondità più la pressione che viene esercitata sulle pareti del recipiente aumenta (un aumento proporzionale). Pertanto tale legge è lineare. Formalmente la legge di Stevino si scrive così:

$$p_h = p_{atm} + \rho g h \qquad (8.11)$$

Vediamo di analizzare nel dettaglio questa importantissima relazione. Con il termine p_{atm} si indica la **pressione atmosferica** ossia la pressione che si ha sul pelo libero dell'acqua (la pressione a cui solitamente siamo soggetti quotidianamente). Tale pressione vale:

$$p_{atm} = 1{,}013\ bar$$

Il **bar** è un'altra unità di misura della pressione. In sostanza, si ha la seguente conversione:

Un'altra unità molto usata di misura per la pressione è il **pascal (PA)** che vale:

$$1\ bar = 10^5\ Pa$$

Detto ciò vediamo di analizzare la relazione 8.11. La pressione alla profondità 'h' è data dalla pressione sul pelo libero dell'acqua sommata con il prodotto della densità dell'acqua dell'accelerazione gravitazionale e della stessa profondità. Dimostriamo come arrivare a tale relazione. Un oggetto a profondità 'h' ha chiaramente una sua massa ed è soggetta ad una forza peso. Siccome la pressione è data dal rapporto tra la forza e l'area della superficie si ha:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \rho g h$$

Quindi la pressione alla profondità 'h' vale: $\rho g h$. In realtà bisogna poi sommargli la pressione atmosferica. Così si ottiene la legge di Stevino. Tale legge è di facile verifica. Basta immergersi ad una certa profondità per accorgersi degli effetti della pressione (dolore alle orecchie,..).

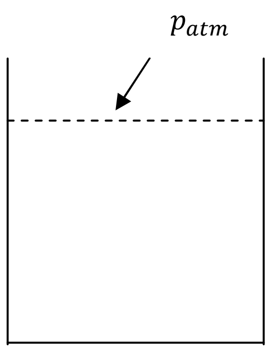


Figura 8.6

La legge è lineare e pertanto il grafico sarà una semplicissima retta,del seguente tipo:

l'equazione generale della retta è: $y = mx + q$ dove m è rappresenta la pendenza della retta e 'q' l'intersezione della stessa con l'asse delle y.

Figura 8.7

Nel nostro semplicissimo caso l'asse delle y è rappresentato dalle pressioni, l'asse delle x dalla profondità ed infine la pendenza della retta dal prodotto della densità dell'acqua per l'accelerazione gravitazionale 'g'. La legge di Stevino è valida **soltanto per i fluidi a densità costante**. L'acqua è un fluido a densità costante:

$$\rho_{acqua} = 10^3 \frac{Kg}{m^3} \qquad (8.12)$$

Pertanto vale la legge di Stevino. La pressione atmosferica invece diminuisce con l'altezza anche se tale decrescita non è lineare con l'altezza per via del fatto che la densità dell'aria non è costante. Concludiamo questo paragrafo con due principi fondamentali e piuttosto elementari da capire: il **principio dei vasi comunicanti** ed il **principio di Pascal**. Il primo principio afferma che, dati due serbatoi pieni di fluido ma aventi differenti livelli, se vengono collegati tra loro mediante una tubatura, raggiungono un equilibrio tra loro, ossia i livelli di fluido nei due serbatoi sono uguali.

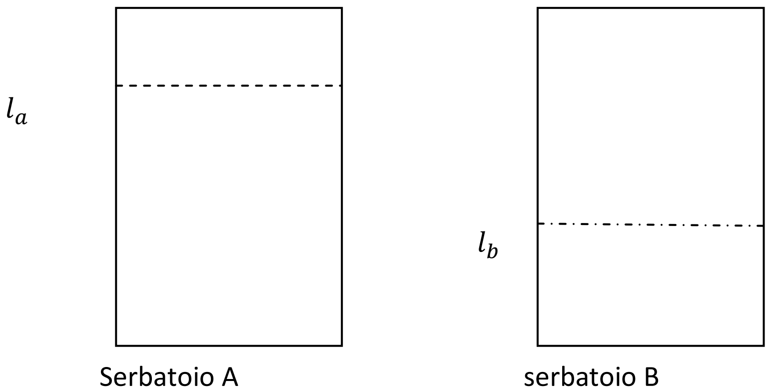
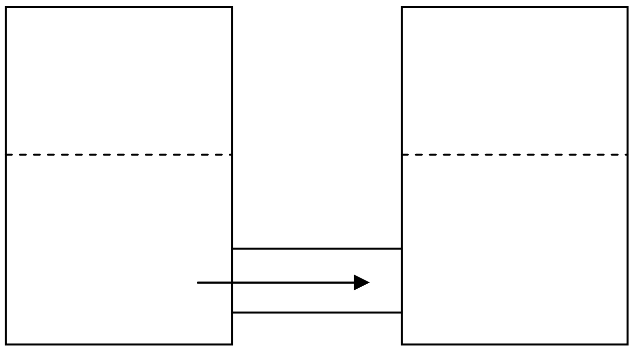


Figura 8.8



Serbatoio A Serbatoio B

Figura 8.9

Chiaramente nella condizione di equilibrio si ha:

$$l_a = l_b$$

Dove con l_a intendiamo il livello di fluido presente nel serbatoio A mentre con l_b indichiamo il livello di fluido presente nel serbatoio B. Il fluido viaggia sempre dal serbatoio con livello di fluido maggiore verso il serbatoio avente minor fluido. Il secondo principio da enunciare invece è il principio di Pascal il quale afferma che se consideriamo una massa di fluido, in un punto qualunque di questa massa (**alla stessa profondità)** di fluido la pressione è uguale in tutte le direzioni.

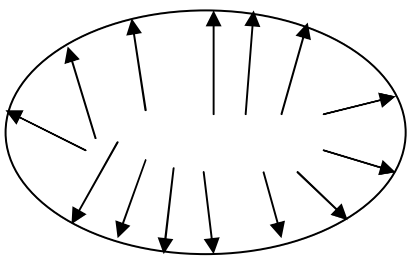


Figura 8.10

Quest'ultima affermazione è nota come **principio di pascal**.

8.3 Principio di Archimede.

Introduciamo ora un altro importante principio dell'idrostatica. Il **principio di Archimede**. Il principio di Archimede afferma che un corpo immerso in un fluido è soggetto ad una forza diretta verso l'alto pari in modulo al peso del fluido spostato ed applicata nel centro di massa di quest'ultimo. Vediamo di capire meglio questo importantissimo principio. Consideriamo un corpo di massa m e che occupa un volume V immerso in un liquido (acqua).

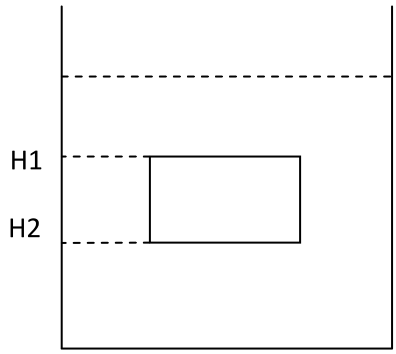


Figura 8.11

Se la superficie superiore del corpo si trova ad una profondità che indichiamo con h_1 allora su di essa agirà la pressione:

$$p_{h1} = p_{atm} + \rho g h_1$$

Analogamente sulla superficie inferiore che si trova ad una profondità che indichiamo con h_2 agirà la pressione:

$$p_{h2} = p_{atm} + \rho g h_2$$

Allora la differenza di pressione sarà uguale a:

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Siccome h_2 è maggiore di h_1 ne segue che la pressione p_2 risulta essere maggiore della pressione p_1 e pertanto la differenza precedente risulta essere maggiore di zero.

$$p_2 - p_1 > 0$$

Per il principio di Pascal, tutte le forze orizzontali si annullano e quindi ne segue che:

$$p_2 - p_1 = \frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} > 0$$

Quindi:

$$\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} = \rho g(h_2 - h_1) > 0 \rightarrow se\ A_1 = A_2 \rightarrow \rho g(h_2 - h_1)A = F_2 - F_1$$

Pertanto se indichiamo con $F_t$la differenza delle precedenti forze si ottiene:

$$F_t = \rho g V = mV$$

In sostanza, se immergiamo un determinato corpo solido in un liquido, il livello di tale liquido si alza e questo significa ovviamente che una certa quantità di liquido viene per forza di cose spostata verso l'alto. Maggiore è il volume del corpo solido inserito nel fluido e maggiore è la quantità di liquido spostata. Un corpo solido immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto uguale in modulo al peso di liquido che sposta. Il peso di liquido spostato è dato dalla seguente relazione:

$$peso\ liquido = m_l \mathrm{g}$$

Dove con m_l sin indica la massa del liquido e 'g' è chiaramente l'accelerazione gravitazionale. Si può riscrivere la precedente formula anche nel seguente modo:

$$peso\ liquido = m_l\ g = \rho_l V_l g$$

Siccome il volume di liquido spostato è uguale al volume del corpo solido si può anche riscrivere la precedente relazione nella seguente maniera:

$$peso\ liquido = m_l\ g = \rho_l V_s g$$

Dove V_l è il volume del liquido mentre V_s è il volume del solido. Pertanto la spinta di Archimede è data da:

$$spinta\ S = m_l\ g = \rho_l V_s g$$

Quindi quando un corpo è immerso in un fluido esso subisce due forze. Una forze peso diretta verso il basso ed una spinta di Archimede diretta verso l'alto. Siccome:

$$peso\ corpo = \ m_s g = \rho_s V_s g$$

$$Spinta\ S = m_l g = \rho_l V_s g$$

Ne segue che se il peso è maggiore della spinta di Archimede allora il corpo scende verso il basso ed affonda. Questo equivale a dire che:

$$\rho_s V_s g > \rho_l V_s g \rightarrow \rho_s > \rho_l \qquad (8.13)$$

Pertanto, se la densità del corpo solido è maggiore della densità del corpo liquido allora il corpo sprofonda. Viceversa se la densità del corpo è minore della densità del liquido il corpo emerge. Quando il corpo è parzialmente fuori dal liquido, il volume della parte immersa diminuisce e quindi diminuisce la spinta di Archimede. Il corpo continua a emergere finché si raggiunge l'equilibrio, cioè finché la spinta diventa uguale al peso. Pertanto si ha la seguente condizione:

$$\rho_s = \rho_l$$

Analogo discorso vale in generale se un corpo viene immerso in un gas. Vediamo qualche esempio semplice.

ESEMPIO: Supponiamo di avere a disposizione il seguente torchio idraulico:

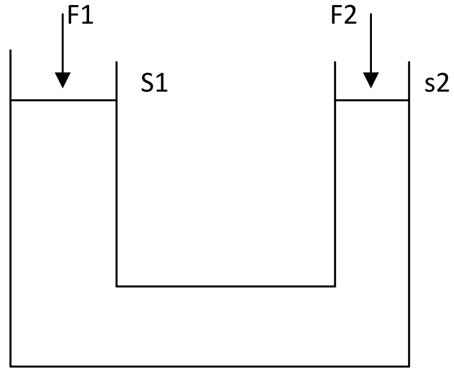


Figura 8.12

Un **torchio idraulico** è una macchina idraulica che permette di alzare o abbassare con estrema semplicità un carico applicando ad un'altra estremità una determinata forza. Supponiamo di avere la sezione maggiore denominata con s1 di area $2dm^2$ e vogliamo calcolare l'area della sezione più piccola. I dati in nostro possesso sono: la forza $F_1 = 30\ KN$, la forza $F_2 = 50\ KN$. L'esercizio è piuttosto banale. Infatti la pressione che indichiamo con p_1 vale:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \cdots$$

In base al principio di Pascal la pressione si trasmette sotto il pistone di sezione S_2. Pertanto:

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Pertanto ottengo facilmente: $S_2 = \frac{F_2}{F_1} S_1$

Sostituendo i dati numerici si ottiene: $S_2 = 3{,}33333dm^2$

Precedentemente sono state accennate alcune tra le principali proprietà di un fluido. Un fluido di importanza cruciale in moltissime applicazioni di natura industriale è **l'acqua**. Tale liquido infatti, grazie alle sue caratteristiche, viene utilizzato in svariate applicazioni di natura industriale e non solo. L'**idraulica** è quel ramo della scienza che si occupa di studiare le leggi fisiche che riguardano in generale i liquidi ma in particolare proprio l'acqua. Essa si divide sostanzialmente in due parti:

1. **L'idrostatica** che si occupa di studiare i liquidi che si trovano nello stato di quiete
2. **L'idrodinamica** la quale si occupa di studiare i liquidi in movimento.

E' bene cercare di capire fin da subito cosa si intende per liquido in quiete o liquido in movimento. Siccome il liquido principale studiato in idraulica è l'acqua allora d'ora in avanti parleremo soltanto dell'acqua. Consideriamo il seguente recipiente contenente acqua allo stato liquido:

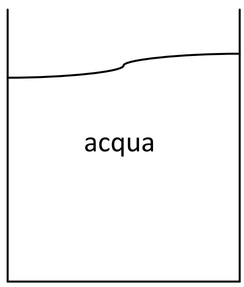


Figura 8.13

Se l'acqua è ferma nel recipiente, ossia se le sue molecole non si muovono allora l'acqua si dice in quiete, altrimenti se le molecole si muovono (perché magari con la mano agitiamo l'acqua) allora tale stato è non di quiete bensì di movimento. Nel caso che l'acqua nel recipiente è in quiete la stessa è chiaramente soggetta alle leggi dell'idrostatica, ma se tale acqua è in movimento rispetto al recipiente che la contiene, allora tale liquido è soggetto alle leggi dell'idrodinamica. Un altro aspetto da tenere bene a mente è il seguente. Supponiamo di essere in un treno che si muove con velocità costante. Supponiamo che al nostro fianco ci sia un secchio pieno di acqua. Supponendo che l'acqua sia ferma, la domanda da porsi immediatamente è: ma l'acqua sarà soggetta alle leggi dell'idrostatica oppure dell'idrodinamica? La risposta è piuttosto semplice. L'acqua sarà soggetta alle leggi dell'idrostatica, perché anche se ci muoviamo rispetto al sistema di riferimento terrestre, il secchio con l'acqua è in quiete rispetto al sistema di riferimento che chiamiamo per comodità "sistema di riferimento del treno". Pertanto possiamo concludere l'illustrazione di questo concetto affermando che lo stato dell'acqua si riferisce sempre al recipiente che la contiene. Si Ricordi inoltre che le due proprietà fondamentali di un liquido sono la sua incomprimibilità e la sua fluidità.

8.4 Liquidi in rotazione.

Fino ad ora abbiamo considerato soltanto liquidi fermi (in quiete). Analizziamo ora cosa succede quando un liquido è in movimento ed in particolare analizziamo il caso di un liquido posto in un recipiente cilindrico posto in rotazione attorno al suo asse verticale, che per comodità chiamiamo 'z'.

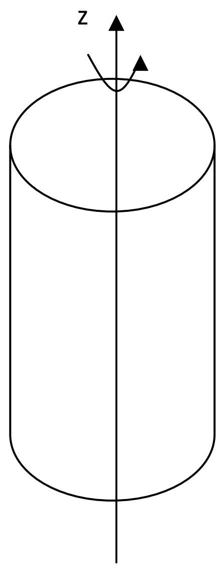


Figura 8.14

Supponiamo costante la velocità di rotazione (velocità angolare). Si osserva facilmente che posto il cilindro in rotazione, anche il liquido in esso contenuto ruota attorno all'asse 'z' e si osserva che la superficie libera non è più piana bensì è concava. Ciascun elemento del liquido ha come traiettoria una circonferenza e pertanto, la superficie del liquido posto in rotazione con moto circolare uniforme assume un profilo parabolico come viene mostrato in figura sottostante:

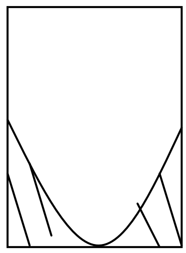


Figura 8.15

Se consideriamo un elemento di liquido avente una densità ρ e una massa dm, allora è facile constatare che esso è sottoposto a due forze: la forza peso e la **forza centrifuga**. La forza centrifuga è una forza che compare quando il corpo si muove di moto curvilineo. E' un tipo di forza non reale. Consideriamo ad esempio una persona che sta ferma su un treno che si muove di moto rettilineo uniforme. La persone rimarrà in quiete fintanto che il treno accelera, si ferma, oppure curva. Supponiamo che all'improvviso il treno curvi verso sinistra. Ovviamente la persona sarà spinta verso destra. Per un osservatore esterno fermo magari su un marciapiede la persona sul treno si sposterà di moto rettilineo uniforme sia prima che il treno devi la sua traiettoria sia dopo in quanto effettivamente è il treno a spostarsi e non la persona al suo interno. Quindi? Nasce chiaramente un dilemma in merito a codesta situazione. La verità è che il treno diventa un sistema di riferimento rotante e pertanto non vale più la legge di inerzia e quindi il sistema di riferimento del treno è non inerziale. Se però associamo ad un tale sistema di riferimento una forza diretta verso destra rendiamo ancora valida la legge di inerzia. Ecco quindi che tale forza che in realtà non esiste ma che ci è comodo utilizzare per rendere inerziale il sistema è proprio la forza centrifuga. Quindi quest'ultima è una forza apparente. Consideriamo, a titolo di esempio, una lavatrice mentre sta lavorando. La centrifuga della lavatrice permette di mostrare l'acqua che fuoriesce dal cestello ruotante secondo una traiettoria tangente al moto circolare del cestello, come viene mostrato in figura:

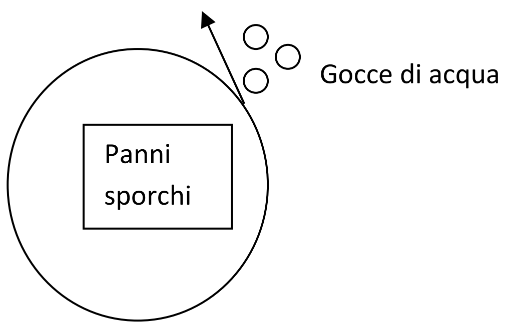


Figura 8.16

La forza centrifuga ha la stessa direzione della forza centripeta (normale), verso opposto e stessa intensità pari a:

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

Dove R è il raggio di curvatura:

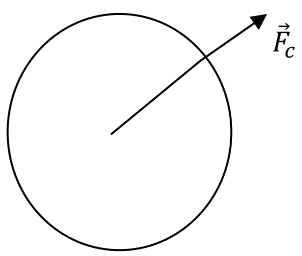


Figura 8.17

Siccome:

$$\omega = \frac{v}{R} \rightarrow F_c = m\frac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R \qquad (8.14)$$

Consideriamo ora la seguente situazione fisica:

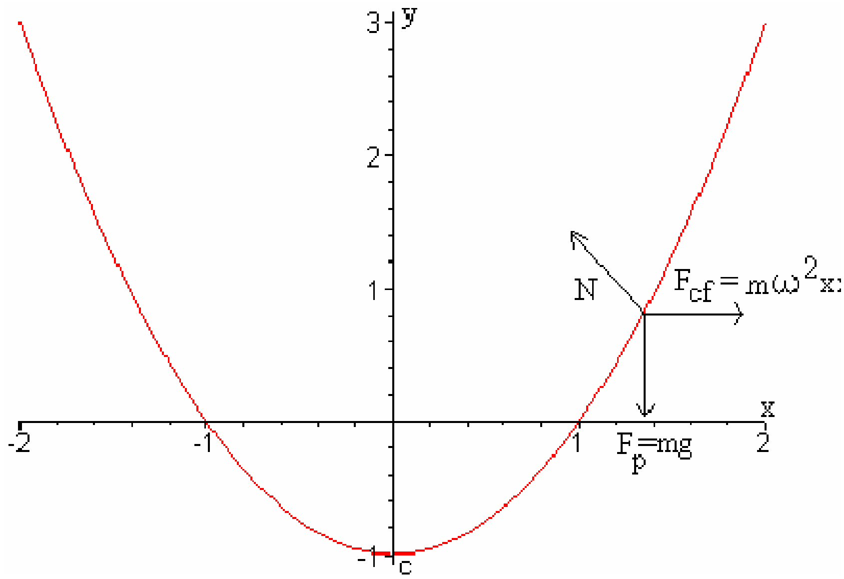


Figura 8.18

La traiettoria è proprio una parabola. Effettuiamo il bilancio delle forze ed otteniamo:

$$asse\ x:\ N_x - m\omega^2 x = 0$$

$$asse\ y: N_y - mg = 0$$

Pertanto:

$$mg = N_y$$

$$N_x = m\omega^2 x$$

La tangente dell'angolo, che chiamiamo per comodità α, formato dalla retta tangente alla curva parabolica nel punto preso in considerazione in figura 8.18 è dato da:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{N_x}{N_y} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} \qquad (8.15)$$

Siccome,per definizione della derivata, il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in un dato punto è la derivata dell'equazione della curva proprio in quel punto. Pertanto, possiamo scrivere:

$$y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Ed integrando si ottiene:

$$y(x) = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{x^2}{2} + k \qquad (8.16)$$

Pertanto il moto delle particelle di fluido obbedisce alle equazioni appena accennate.

8.5 La portata.

In questo paragrafo definiamo il concetto fondamentale di portata. Innanzitutto la portata è una grandezza scalare che solitamente si indica con la lettera Q. Analizziamo il caso di un tubo in cui scorre del fluido, per esempio acqua:

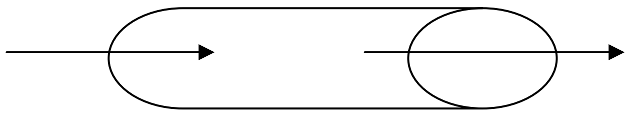


Figura 8.19

Il tubo ha una sezione di area A (m^2) ed una lunghezza L (m). la portata mi rappresenta la quantità di fluido (in questo caso di acqua) che attraversa una determinata sezione di area A nell'unità di tempo t. Formalmente la portata si definisce nel seguente modo:

$$Q = \frac{A \cdot L}{t} = \frac{V}{t} \qquad (8.18)$$

Dove V è il volume di fluido. L'unità di misura della portata è: $\frac{m^3}{s}$.

Ovviamente, è possibile esprimere la portata in svariati modi, esplicitando la dipendenza dalla velocità o dalla densità. Per esempio:

$$Q = A\frac{v}{t} \qquad (8.19)$$

Dove viene esplicitata la dipendenza dalla velocità. 'A' è sempre l'area della sezione del condotto (tubo). Siccome:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} \rightarrow Q = \frac{m}{\rho t} \qquad (8.20)$$

Con quest'ultima relazione abbiamo esplicitato anche la dipendenza della portata dalla densità.

8.5 Trinomio di bernoulli.

Uno dei teoremi cardini della fluidodinamica, ossia del ramo della fisica che studia la dinamica dei fluidi è il **teorema di Bernoulli**. Consideriamo in merito un fluido ideale e quindi un fluido dove la viscosità è nulla. Consideriamo il fluido che percorre un tratto di condotto a sezione variabile. Ipotizziamo inoltre che tale fluido abbia densità costante.

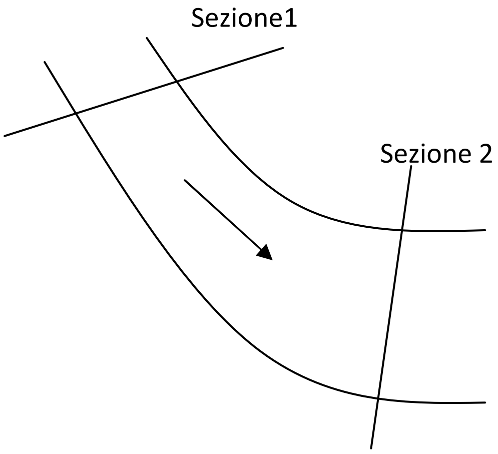


Figura 8.20

Cerchiamo di essere precisi e puntigliosi e vediamo di analizzare cosa realmente accade ad un piccolo volume di fluido compreso tra le sezioni denominate sezione 1 e sezione 1', come viene mostrato in seguito:

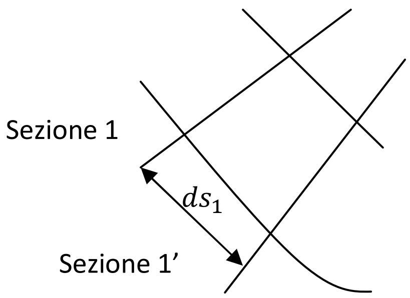


Figura 8.21

Chiaramente il fluido si sposta di una quantità pari a ds_1. Analogamente vale per la sezione denominata sezione 2 dove il fluido si sposterà di una quantità ds_2. Pertanto:

$dV_1 = ds_1 A_1$

$dV_2 = ds_2 A_2$

Dove con $A_1 \, e \, A_2$ si indicano rispettivamente le aree delle apposite sezioni. Siccome il fluido è incomprimibile (essendo ideale) possiamo tranquillamente affermare che $dV_1 = dV_2$ e pertanto:

$$ds_1A_1 = ds_2A_2$$

Siccome:

$$ds_1 = v_1dt$$

$$ds_2 = v_2dt$$

Ne consegue che:

$$v_1dtA_1 = v_2dtA_2 \rightarrow v_1A_1 = v_2A_2 \qquad (8.21)$$

Quest'ultima relazione è nota come **equazione di continuità**.

Dato che il fluido è ideale abbiamo supposto implicitamente che non ci siano alcune forze di attrito e quindi le uniche forze che agiscono sul volumetto di fluido sono: la forze peso e le forze di superficie. Le forze di superficie sono quelle forze che permettono al fluido di spostarsi. Pertanto il lavoro di queste forze di superficie vale:

$$L_{s1} = p_1A_1ds_1$$

Analogamente si ha per il fluido nella sezione 2:

$$L_{s2} = p_2A_2ds_2$$

Dove chiaramente $p_1\ e\ p_2$ sono le rispettive pressioni nella sezione 1 e nella sezione 2. Pertanto il lavoro complessivo compiuto dalle forze di superficie è dato da:

$$L_s = L_{s1} + L_{s2} = p_1dV_1 - p_2dV_2$$

Analogamente il lavoro compiuto dalla forza peso per spostare il fluido è dato da:

$$L_p = mgh_1 - mgh_2$$

A questo punto il lavoro totale sarà ovviamente uguale alla variazione di energia cinetica in quanto il lavoro, per definizione, è sempre uguale alla variazione di energia cinetica:

$$L = L_s + L_p = \Delta E_c$$

Quindi:

$$p_1dV_1 - p_2dV_2 + mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Quest'ultima relazione può essere riscritta in maniera più ordinata nel seguente modo:

$$p_1dV_1 + mgh_1 + \tfrac{1}{2}mv_1^2 = p_2dV_2 + mgh_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 \qquad (8.22)$$

Quest'ultima relazione è nota come **trinomio di Bernoulli** e sostanzialmente afferma che la somma dell'energia cinetica dell'energia potenziale e dell'energia di pressione rimangono costanti. Infatti:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p = mgh$$

$$E_{pr} = pdV$$

Quindi:

$$E_c + E_p + E_{pr} = cost.$$

Molte sono le applicazioni del trinomio di Bernoulli. Vediamo alcune. Innanzitutto, per poter comprende tali applicazioni è necessario introdurre alcune nozioni teoriche indispensabili.

8.6 Applicazioni di bernoulli.

La parte della meccanica dei fluidi che si occupa di studiare i fluidi (liquidi e gas) in movimento prende il nome di **fluidodinamica**. Spesso, per semplicità, un fluido viene considerato ideale. Per liquido ideale si intende un liquido incomprimibile, a densità costante, e privo di viscosità. E' bene osservare che, mentre la condizione di in comprimibilità è presso che soddisfatta sempre, la non viscosità varia da liquido a liquido. Si definisce **linea di corrente** quella curva che ha come tangente in ogni suo punto il vettore velocità delle particelle del fluido. Si chiama invece **vena fluida** quella parte di fluido limitata da due sezioni. Un fluido è in **regime stazionario** quando scorre in modo che le linee di corrente non si alterano nel tempo, e quindi la pressione e la velocità rimangono costanti nel tempo. Sostanzialmente in regime stazionario, detto anche **regime permanente**, le linee di corrente coincidono con le traiettorie delle particelle di fluido. Un fluido invece è in **regime laminare** quando i differenti strati del fluido scorrono gli uni sopra gli altri senza mescolarsi (per esempio quando si apre poco i rubinetto ed esce poca acqua). Infine un fluido si muove in **regime turbolento** quando ci sono dei moti vorticosi che producono inevitabilmente un rimescolamento della massa di fluido (per esempio si apre di colpo e tanto il rubinetto dell'acqua di casa). Vedremo più avanti come distinguere effettivamente questi tipi di moto. Consideriamo ora un serbatoio, e pratichiamo un foro il cui baricentro sia ad una profondità 'h' dal pelo libero del fluido (per esempio acqua), come viene mostrato di seguito:

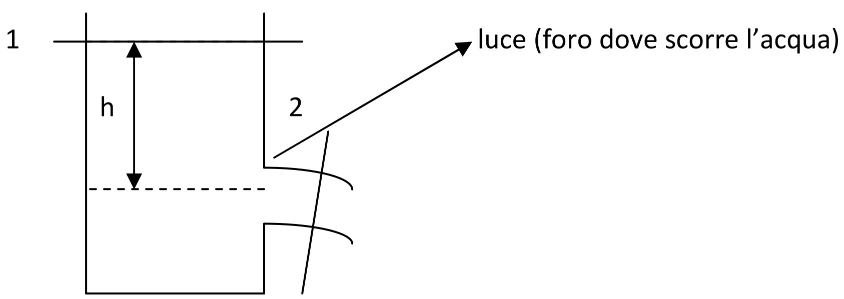


Figura 8.22

Scriviamo il trinomio di Bernoulli prima per la sezione 1 e poi per la sezione 2. Quindi:

$$p_1 dV_1 + mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 \ \ per\ la\ sezione\ 1$$

$p_2 dV_2 + mgh_2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \; per \; la \; sezione \; 2$

Siccome vale l'uguaglianza dei trinomi di Bernoulli si ha:

$$p_1 dV_1 + mgh_1 + \tfrac{1}{2} mv_1^2 = p_2 dV_2 + mgh_2 + \tfrac{1}{2} mv_2^2$$

Siccome sul pelo libero dell'acqua la velocità si può considerare nulla si scrive:

$$v_1 = 0$$

Analogamente, la pressione sulla sezione 1 è quella atmosferica, come del resto la pressione sulla sezione 2. Quindi:

$$p_1 = p_2 = p_{atm}$$

Quindi possiamo riscrivere il tutto nel seguente modo:

$$p_{atm} dV_1 + mgh_1 = p_{atm} dV_2 + mgh_2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

Pertanto:

$$\frac{1}{2} mv_2^2 = p_{atm} dV_1 + mgh_1 - p_{atm} dV_2 - mgh_2$$

L'energia di pressione si può anche scrivere nel seguente modo:

$$E_{pr} = P \frac{p}{\gamma}$$

Dove:

$$\gamma = peso \; specifico = \frac{P}{V}$$

Infatti:

$$V = \frac{P}{\gamma} \rightarrow E_{pr} = p \frac{P}{\gamma}$$

Anche l'energia cinetica può essere riscritta esplicitando opportunamente nella seguente maniera:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$$

Raccogliendo la forza peso P nel trinomio di Bernoulli otteniamo:

$$P \left(h_1 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) = P \left(h_2 + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

Quindi:

$$v_2^2 = (h_1 - h_2) 2g \rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \qquad (8.23)$$

La relazione 8.23 è la ben nota **relazione di Torricelli** che essenzialmente afferma che la **velocità di eflusso** di un liquido da una luce è uguale a quella di un corpo che cade nel vuoto da un'altezza uguale al carico. In realtà, durante lo spostamento del fluido nel tubo ci saranno delle naturali dispersioni che in qualche modo renderanno non vera l'uguaglianza del trinomio di Bernoulli. In realtà bisognerebbe scrivere:

$$p_1 dV_1 + mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = p_2 dV_2 + mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + perdite$$