# CAPITOLO 5: Il corpo rigido

## 5.1 Introduzione.

Nei precedenti capitoli si è discusso della cinematica e della dinamica sia di un punto materiale sia di un sistema di punti materiali. In questo capitolo verrà effettuato un ulteriore balzo in avanti nella spiegazione delle interazioni che un sistema meccanico può avere con l'ambiente circostante. In particolare, in questo capitolo parleremo del **corpo rigido,** ossia di quel corpo che possiede vincoli di rigidità delle sue singole parti. Detto in altre parole, il corpo rigido è un corpo il cui volume non cambia, ed è un corpo quindi le cui distanze tra i vari punti interni allo stesso rimangono costanti. Tale **vincolo di rigidità** è chiaramente un vincolo indipendente dal tempo, e può essere formalmente espresso nel seguente modo: dati due punti $P_1$e $P_2$ appartenenti ovviamente al corpo rigido, indichiamo con $d_{1,2}$ la distanza tra i due punti, e si ha:

$$d_{1,2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Quindi possiamo definire il corpo rigido come un sistema di punti materiali le cui distanze tra questi punti non possono variare. Chiaramente questa definizione introduce una idealizzazione di ciò che effettivamente esiste in natura. Infatti, tutti i corpi, chi più chi meno, si deformano se sono sottoposti a forze intense. Per alcuni metalli come per esempio l'alluminio, l'acciaio, e così via tale definizione può approssimativamente valere, mentre per altri materiali come per esempio la gomma può valere meno. E' risaputo che un punto nello spazio è individuato in modo univoco da una terna di coordinate e pertanto se si hanno 'n' punti indipendenti tra loro per poterli individuare sono necessari 3n parametri. Ora come prima domanda ci chiediamo come è possibile individuare la posizione di un corpo rigido nello spazio. Ci facciamo questa banalissima domanda per via del fatto che se vogliamo calcolare velocità, accelerazione (il moto) di un corpo rigido dobbiamo naturalmente conoscere la posizione di ogni suo punto rispetto al sistema di riferimento preso in considerazione. Ricordando che i punti che compongono un corpo rigido mantengono inalterata la loro distanza relativa, tale condizione equivale ad assegnare i valori di sei parametri che ne definiscono la posizione durante il moto. Ora ci chiediamo perché proprio sei parametri? E' importante notare che per un corpo esteso rigido, lo spostamento è in realtà un concetto più vasto rispetto al concetto di spostamento di un punto materiale. Infatti, lo spostamento di un corpo rigido può essere visto come una sorta di **campo di spostamenti** in cui tutte le mutue distanze restano invariate. Questo perché un corpo rigido può avere soltanto spostamenti rigidi. Questi vincoli sul moto del corpo rigido naturalmente diminuiscono i gradi di libertà del sistema stesso. Il grado di libertà coincide chiaramente con il numero di parametri che bisogna specificare per individuare la posizione di un determinato corpo. Partiamo dal caso più semplice, ossia dal moto senza rotazioni. La posizione di un corpo può essere definita specificando le tre coordinate cartesiane (x,y,z). Una qualsiasi traslazione può essere pensata come la somma di tre traslazioni:

traslazione totale = traslazione lungo asse x + traslazione lungo asse y + traslazione lungo asse z

Supponiamo ora di bloccare la traslazione lungo l'asse x, l'asse y e l'asse z. Chiaramente il corpo rimane bloccato, non si muove. Se invece lasciamo bloccata la traslazione lungo l'asse x ma liberiamo le altre due traslazioni, vediamo che il corpo può muoversi lungo le direzioni y e z. Se però consideriamo anche le rotazioni che gli assi cartesiani possono subire, allora si aggiungono altri tre gradi di libertà rispettivamente per la rotazione attorno all'asse x attorno all'asse y ed attorno all'asse z.

Quindi, ricapitolando, per individuare la posizione di un corpo rigido nello spazio sono necessari sei parametri (**coordinate lagrangiane**), e lo stesso ha pertanto sei gradi di libertà. Per individuare la posizione di un punto materiale nello spazio sono necessari tre parametri, mentre per determinare la posizione di 'n' punti materiali indipendenti tra loro sono necessari 3n parametri.

## 5.2 tipi di moto.

Vediamo ora di descrivere i vari tipi di moto a cui è soggetto un corpo rigido. Per prima cosa analizziamo, seguendo il classico approccio riduzionista, il tipo di moto più semplice ossia il **moto traslatorio**. Un moto traslatorio è un moto in cui tutti i punti subiscono lo stesso spostamento. In questo tipo di moto ogni punto ha la stessa direzione e velocità del centro di massa del corpo stesso. Questo tipo di moto comporta la presenza di tanti vettori di velocità uguali in modulo e paralleli tra loro. Si genera quindi un campo vettoriale di tipo **uniforme**. In un moto del seguente tipo le grandezze veramente significative sono: la quantità di moto e l'energia cinetica. Pertanto si ha:

$$\vec{P} = m\vec{v}_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_{cm}^2$$

Naturalmente l'equazione del moto del centro di massa risulta essere:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$$

L'altro moto a cui può essere soggetto un corpo rigido è lo **spostamento rotatorio**. In uno spostamento di questo tipo, tutti i punti appartenenti ad una retta (**asse di rotazione**)hanno spostamento nullo. Vediamo di chiarire meglio questo punto. Consideriamo la seguente illustrazione:

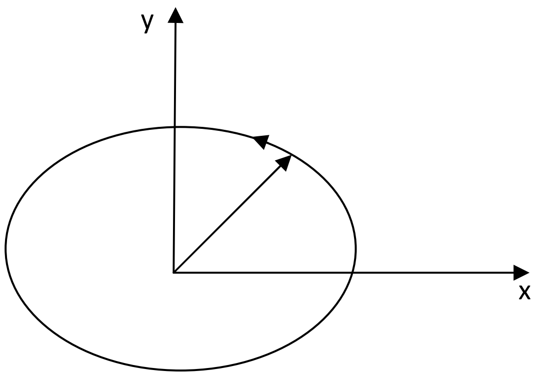



Figura 5.1

Se l'asse di rotazione è una retta uscente dal foglio allora si può facilmente intuire che tutti i punti descrivono, muovendosi, una traiettoria circolare, ma che il centro di rotazione è proprio l'asse di rotazione. Pertanto si hanno tante circonferenze parallele tra loro. Ricordando il vincolo fondamentale di rigidità del corpo, allora si intuisce immediatamente che tutti i punti hanno la medesima velocità angolare parallela all'asse di rotazione stesso.

L'equazione dinamica di base del moto rotatorio è:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (5.1)$$

Si dimostra che, il moto più generale possibile di un corpo rigido è il **moto rototraslazionale**, ossia un moto in cui ogni spostamento del corpo può essere considerato come la somma di una traslazione individuata da una velocità $\vec{v}$ ed una rotazione individuata da una velocità angolare $\omega$.

## 5.3 Rotazioni rigide attorno ad un centro di massa.

Giunti a questo punto è necessario entrare più nel dettaglio sul concetto di momento angolare e momento di una forza. Abbiamo già visto, nel capitolo 3, che con $\vec{M}$ si indica il **momento di una forza mentre** con $\vec{L}$ si identifica il **momento angolare**. Ora ci chiediamo cosa mi rappresentano questi oggetti. Consideriamo il caso di un urto tra due bocce di biliardo. Si è visto nel capitolo precedente come in un urto oltre alla quantità di moto si conserva anche l'energia cinetica (almeno per gli urti elastici). L'energia scambiata tra i due corpi durante l'urto non può trasformarsi soltanto in energia cinetica (energia legata allo spostamento traslatorio) ma si trasforma anche in energia di rotazione. Immaginiamoci il fenomeno fisico. Supponiamo di colpire con una stecca la pallina. Se la colpiamo giusto nel mezzo, trascurando l'attrito della pallina con il tavolo, la pallina si muoverà di moto traslatorio e quindi non ruoterà. Se invece colpiamo la pallina non al centro ma lateralmente, essa si metterà anche a ruotare. Più distante si colpisce la palla rispetto al centro e più rapidamente essa ruoterà. Analizziamo ora l'urto dal punto di vista delle forze. Innanzitutto, riconsideriamo la classica figura utilizzata quando si definisce graficamente il momento di un vettore:

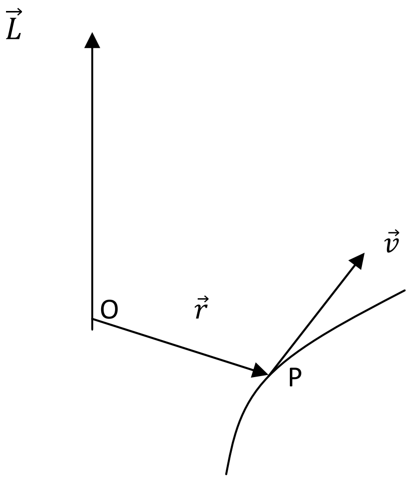



Figura 5.2

Nel primo caso (caso in cui la stecca colpisce centralmente la pallina) la forza esercitata dalla stecca sulla pallina viene applicata proprio sul polo O della pallina. In questo caso il punto P coincide con il punto O e pertanto il momento è nullo (sia il momento della forza sia il momento angolare). In questo caso non si ha alcuna rotazione. Nel secondo caso la forza viene applicata in un punto diverso dal polo (P non coincide con O) e pertanto la forza si applica sul punto P, e quindi il braccio **non** è nullo. In questo caso, la pallina ruota ma si sposta con una velocità inferiore (e quindi un'energia cinetica inferiore). Pertanto, il momento angolare è una grandezza vettoriale che possiede una direzione coincidente con l'asse di rotazione. Per un corpo rigido ruotante attorno al proprio asse, in assenza di momenti di forze esterne, si conserva il momento angolare. Pertanto il **principio di conservazione del momento angolare** è di fondamentale importanza. Prima di enunciarlo formalmente vediamo alcuni esempi pratici che sicuramente ci possono aiutare nella comprensione di questo non facile concetto. Per comprendere a fondo alcuni esempi è necessario introdurre il concetto di **momento di inerzia**. Il momento di inerzia è una grandezza scalare utile per descrivere il comportamento dinamico che possiede un corpo mentre ruota attorno al proprio asse di rotazione. In particolare, il momento di inerzia è un numero che esprime la maggiore o la minore facilità di fare ruotare un corpo rigido. Formalmente essa viene definita così:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (5.2)$$

Dove, in questo caso, $\vec{r}$ è il vettore che definisce la distanza tra ogni singola particella ed il centro di massa. Vediamo un esempio. Spesso osserviamo i tuffatori lanciarsi dal trampolino ed in volo rannicchiarsi. Questo rannicchiamento permette allo stesso di diminuire il proprio momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione passante proprio per il baricentro. Questo comporta un aumento della velocità angolare. Di conseguenza il nuotatore ruota più velocemente.

Quindi, ricapitolando, nella descrizione fisica dei fenomeni di natura rotazionale che si manifestano in un corpo rigido, la velocità angolare prende il nome di velocità mentre il momento di inerzia prende il posto della massa inerziale. Pertanto, il momento di inerzia mi rappresenta l'inerzia del corpo a modificare la propria cinematica rotazionale. E' importante notare che il momento di inerzia non dipende soltanto dalla massa del corpo ma dipende anche dalla distribuzione della massa nello spazio in quanto ogni singola particella in cui possiamo immaginare di dividere il corpo contribuisce, a modo suo, con la sua massa ma anche con la sua distanza al quadrato. Consideriamo ora, a titolo di esempio, il caso di un corpo rigido che ruota attorno all'asse di rotazione 'z'. Graficamente si ha una cosa del seguente tipo:

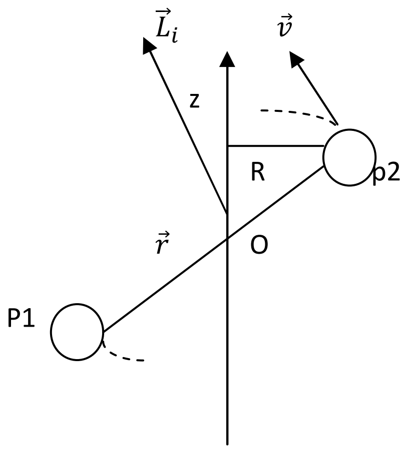


Figura 5.3

Supponiamo che O sia il polo dei momenti. Il vettore $\vec{r}$ che unisce i due corpi forma un angolo $\theta$ con l'asse z. Calcoliamoci il momento angolare del punto $P_i$ rispetto al polo O:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i x m_i \vec{v}_i$$

Ovviamente tale momento è un vettore ortogonale al piano individuato dai vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$. Siccome tra i vettori $\vec{v}$ ed $\vec{r}$ è presente un angolo retto ($\frac{\pi}{2}$), abbiamo che tra il vettore momento angolare e l'asse z si forma un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{2} - \theta$. Chiaramente il modulo del momento angolare è:

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega, \text{ visto che } v_i = R_i \omega$$

Dove $R_i$è il raggio della traiettoria della particella p-esima.

Calcoliamo,a questo punto,la proiezione del momento angolare lungo l'asse di rotazione. Si ottiene:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin\theta_i = m_i r_i \sin\theta_i R_i \omega \qquad (5.3)$$

Tale equazione mi definisce il **momento angolare assiale**. In questa ultima espressione abbiamo utilizzando una nota proprietà delle funzioni trigonometriche, ossia:

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Per maggiori informazioni si veda la relativa appendice B. A questo punto possiamo scrivere che il momento angolare del corpo vale:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \qquad (5.4)$$

In generale il momento angolare non è parallelo all'asse di rotazione. Avendo definito il momento angolare assiale, ed in precedenza il momento di inerzia, è possibile legare insieme queste due relazioni nella seguente maniera:

$$L_z = \sum_i L_{i,z} = (\sum_i m_i r_i \sin\theta_i R_i \omega) = (\sum_i m_i R_i^2)\omega = I_z \omega$$

Dove con $\mathrm{I}_z$si indica il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z.

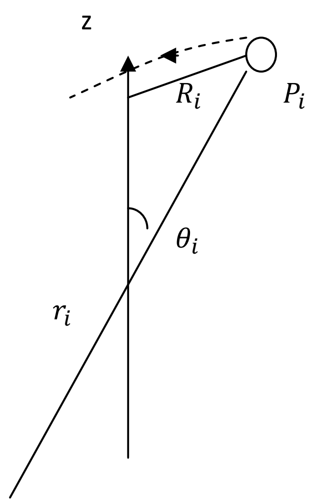


Figura 5.4

Come si può facilmente notare: $r_i \sin\theta_i = R_i$. Il momento di inerzia del corpo rispetto al'asse z è quindi dato da:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad (5.5)$$

Questa formula sostanzialmente ci riconferma che il momento di inerzia dipende dalle masse ma anche dalla loro distribuzione rispetto all'asse di rotazione. Il momento angolare, detto spesso anche **momento della quantità di moto** è pertanto il risultato del prodotto del momento di inerzia per la velocità angolare. E' una grandezza vettoriale che ha una direzione coincidente con l'asse di rotazione (nel caso in cui il corpo rigido forma un angolo di 90° rispetto all'asse di rotazione), e un verso definito dall'avanzamento di una vita destrorsa.

Abbiamo già visto che per un sistema di punti materiali isolato, ossia non soggetto a forze esterne, la quantità di moto totale si conserva. Questo fatto comporta che in un tal sistema si conserva anche la somma di tutti i momenti angolari. Pertanto il principio di conservazione del momento angolare che qui di seguito viene esposto, è di importanza cruciale per tutti i problemi legati alla rotazione (ma non solo) di un corpo rigido. **Il momento angolare $\vec{L}$ di un sistema è costante nel tempo se e soltanto se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema.** Chiaramente Il principio deriva dall'ipotesi di isotropia dello spazio fisico. In poche parole in uno spazio isotropo ogni punto ha lo stesso "peso" per la verifica dei fenomeni fisici, ossia non esiste nessun punto privilegiato. Pertanto,se il sistema è isolato e pertanto la somma delle forze esterne risulta nulla, si conserva il momento angolare, che prende il posto del concetto di quantità di moto per il moto semplice di una particella. Pertanto, il momento angolare misura la tendenza di un corpo che ruota a persistere nel suo moto rotatorio e dipende dalla sua massa e dalla sua velocità di rotazione. Si pensi, a titolo di esempio, alla ruota di una bicicletta. Se pedaliamo piano, chiaramente la ruota della bicicletta ruoterà lentamente e pertanto il momento angolare avrà intensità bassa. E' sufficiente una piccola perturbazione dall'esterno per rompere l'equilibrio della bicicletta stessa e farci di conseguenza cadere.

Facciamo ora un passo in avanti. Definito e chiarito il significato del momento angolare, dobbiamo chiarire e definire il significato del momento di una forza per poter successivamente legare questi due potenti concetti. Abbiamo già definito formalmente il momento di una forza come quel vettore dato da:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il momento di una forza si misura in Newton*metro (Nm) e l'effetto di un momento è quello di produrre una rotazione attorno ad un punto di riferimento. Chiaramente si prende come positivo il momento che permette una rotazione in senso orario attorno al proprio asse, mentre si assume come negativo quel momento che permette una rotazione del corpo in senso antiorario.

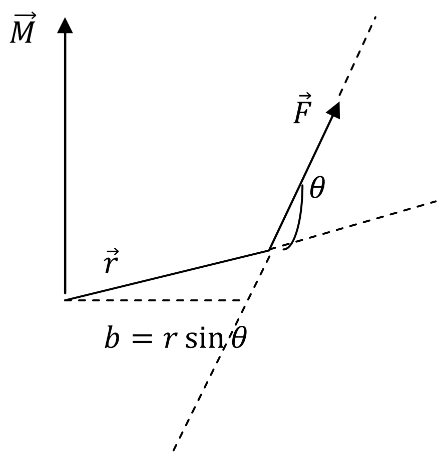



Figura 5.5

Mentre il momento angolare per i corpi rigidi in rotazione sostituisce il concetto di quantità di moto per i corpi più semplici, il momento di una forza rappresenta una misura della capacità di mettere in rotazione un corpo rispetto ad un determinato asse. Attenzione a non confondere questi due fondamentali e molto vicini concetti. Il momento angolare mi rappresenta la tendenza del corpo al persistere nel suo stato di rotazione, il momento di inerzia mi rappresenta la maggiore o minore propensione del corpo alla rotazione, mentre il momento di una forza mi rappresenta per l'appunto la capacità di mettere in rotazione un corpo. Quindi, in sostanza, il momento di inerzia è assimilabile come concetto alla massa inerziale, mentre il momento angolare è assimilabile alla quantità di moto per un sistema più semplice. Pertanto, nel caso più semplice possibile si scrive:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\frac{d\vec{w}}{dt} = I_z\vec{A}$$

Pertanto:

$$\vec{M} = I_z\vec{A} \qquad (5.6)$$

Quest'ultima equazione prende anche il nome di **equazione del moto di rotazione**. Pertanto la conoscenza del momento delle forze ci permette di calcolare l'accelerazione angolare chiaramente se è noto il momento di inerzia. Giunti a questo punto è possibile perfino fornire le condizioni del moto rotazionale. Essendo un moto accelerato si ha:

$$A = \frac{M}{I_z} \rightarrow \omega(t) = \omega_o + \int_0^t A dt \rightarrow \theta(t) = \theta_o + \int_0^t \omega dt$$

Chiaramente se M=0, si ottiene che il corpo rimane fermo o si muove di moto rotazionale uniforme (velocità angolare costante e quindi accelerazione angolare nulla), mentre se M=costante si ottiene un moto rotativo uniformemente accelerato. Vediamo a questo punto, come si comporta l'energia cinetica ed il lavoro in questo nuovo "mondo". Sappiamo che l'energia cinetica è data da:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Nel nostro caso essendo il corpo rigido un corpo composto da più punti materiali, si ottiene:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i R_i^2 w^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \qquad (5.7)$$

Pertanto anche l'energia cinetica dipende dal momento di inerzia del corpo. Quando l'energia cinetica subisce una variazione vuol dire che è stato compiuto lavoro e pertanto si scrive:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}I_z\omega_{fin}^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_{in}^2$$

## 5.4 Corpo continuo.

Fino ad ora abbiamo analizzato un corpo rigido come un corpo formato da tanti punti materiali distanti tra loro e la cui distanza non può variare (un sistema di punti materiali). Un corpo reale però appare come un corpo continuo ossia come un corpo. Ogni singolo atomo che compone il corpo può essere pensato come un punto materiale (particella) di massa $dm$ e volume $dV$. Ogni particella ha una propria densità. La **densità** è una grandezza che riscopriremo spesso più avanti ed è assai importante come grandezza. La densità viene definita come il rapporto tra la massa del corpo ed il suo volume:

$$densità = \frac{massa}{volume} \qquad (5.8)$$

L'unità di misura della densità è: Kg/$m^3$. Pertanto la densità di ogni singola particella si può definire come:

$\rho = \frac{dm}{dV}$

E' possibile calcolare la massa totale che il corpo possiede semplicemente integrando rispetto al volume del corpo stesso, ossia:

$$m = \int dm = \int_V \rho dV$$

Un corpo dove la densità rimane costante si dice che è un corpo **omogeneo** ed in un corpo omogeneo vale la seguente espressione:

$$m = \rho V \qquad (5.9)$$

Classici esempi di corpi omogenei sono i blocchi di metallo, l'acqua, eccetera. Un esempio di corpo non omogeneo è un pezzo di legni che viene incollato con un altro pezzo di legno opportunamente lavorato, oppure un metallo saldato con un altro tipo di metallo, e così via. La densità che abbiamo analizzato è una densità a livello di volume. Possiamo però pensare però che la massa sia distribuita su una superficie invece che su un determinato volume. In questo caso si parla di **densità superficiale** e tale densità viene definita come:

$$\rho_s = \frac{dm}{ds} \rightarrow m = \int \rho_s ds \qquad (5.10)$$

L'unità di misura della densità superficiale è: $\frac{Kg}{m^2}$. Analogo discorso vale se la massa si distribuisce lungo una linea. In questo caso si parla di **densità lineare**, e viene così definita:

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \rightarrow m = \int \rho_l dl \qquad (5.11)$$

L'unità di misura della densità lineare è: $\frac{Kg}{m}$. La densità può essere pensata come la massa contenuta nell'unità di volume. Un'altra grandezza assai importante è il **volume specifico** definito nel seguente modo:

$$\upsilon = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \qquad (5.12)$$

Il volume specifico può essere pensato come il volume occupato dall'unità di massa. L'unità di misura $\frac{m^3}{Kg}$. I concetti illustrati di densità lineare, superficiale, e volumica, verranno ripresi più avanti e si capirà la loro importanza quando si parlerà delle distribuzioni di carica elettrica.

La posizione di ogni punto in un corpo rigido è individuato dal suo raggio vettore, come abbiamo più volte ribadito. La posizione del centro di massa alla luce delle ultime relazioni trovate si ottiene anche nel seguente modo:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\int \vec{R} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{m} \qquad (5.13)$$

Se il corpo risultasse essere omogeneo, la precedente relazione si trasformerebbe nel seguente modo:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\rho}{m} \int \vec{R}\, dV = \frac{1}{V} \int \vec{R} dV \qquad (5.14)$$

Vediamo un semplice **ESEMPIO**. Supponiamo di avere a disposizione la seguente barra rettilinea omogenea avente massa m=10Kg e lunghezza l=2m.

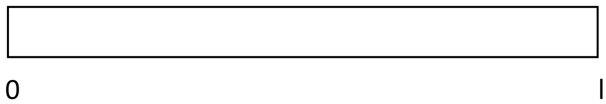



Figura 5.6

Si vuole determinare il centro di massa della barra. L'esempio è piuttosto banale. Infatti, è sufficiente suddividere la barra in tanti piccoli pezzetti ognuna avente massa dm, e successivamente effettuare l'integrale sulla lunghezza della barra. In questo caso la barra si suppone sottile. In questo modo si considera come densità la densità lineare e pertanto si ha:

$$\rho = \frac{dm}{dl}$$

Quindi:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^l x\rho dx = \frac{\rho}{m}\frac{l^2}{2}$$

Sostituendo i dati si trova la posizione desiderata del centro di massa.

Supponiamo ora di avere a disposizione un corpo rigido e continuo sottoposto alla forza peso. Chiaramente su ogni elemento che compone il corpo agirà la forza peso seguente:

$$\vec{g}dm$$

Pertanto, la risultante di tutte le forze sarà:

$$\int \vec{g}dm = \vec{g}\int dm = m\vec{g}$$

La risultante delle forze sarà applicata ovviamente al centro di massa.

Torniamo ora brevemente al momento di inerzia. Calcoliamoci ora il momento di inerzia per un corpo continuo. In particolare, abbiamo già visto che un corpo continuo può essere immaginato come una serie infinita di particelle contenenti masse infinite. In questo nuovo contesto, al posto della massa totale del corpo, che si è sempre indicata con 'm', sostituiamo la massa infinitesimale della singola particella 'dm'. La somma ovviamente cambierà diventando un integrale. In sostanza si effettua la classica operazione di sostituzione delle grandezze e degli operatori in gioco per poter passare dal mondo discreto al mondo continuo. Pertanto il momento inerziale nel caso continuo vale:

$$I = \int R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV \qquad (5.15)$$

La seguente tabella mostra i momenti di inerzia dei corpi rigidi principali:

| Corpo rigido | Momento d'Inerzia |
|---|---|
| Anello rispetto all'asse del cilindro | $mr^2$ |
| Cilindro pieno rispetto all'asse del cilindro | $\frac{1}{2}mr^2$ |
| Sbarra sottile rispetto ad un asse perpendicolare alla lunghezza | $\frac{1}{12}ml^2$ |
| Sfera piena rispetto ad un suo diametro | $\frac{2}{5}mr^2$ |
| Sfera vuota rispetto ad un suo diametro | $\frac{2}{3}mr^2$ |
| Anello rispetto ad un diametro | $\frac{1}{2}mr^2$ |
| Cilindro cavo rispetto all'asse del cilindro | $\frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ |
| Cilindro pieno rispetto all'asse del cilindro o disco | $\frac{1}{2}mr^2$ |

## 5.5 Moto di puro rotolamento.

Il tipo di moto che analizziamo in questo paragrafo è il **moto di puro rotolamento**. Un moto di questo tipo è un moto in cui un corpo rotola sopra una determinata superficie ed il cui **punto di contatto**, che indichiamo per comodità con C, è in quiete. Detto in poche parole, non vi è alcun moto di trascinamento. Un classico esempio di moto di questo tipo è il moto di una ruota. La seguente figura chiarisce le idee:

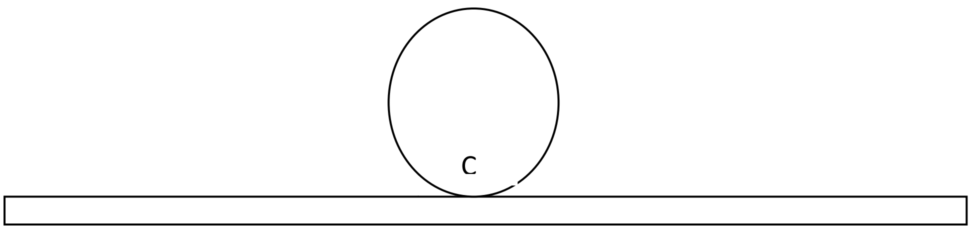



Figura 5.7

In un moto di questo tipo l'asse di rotazione passa per il punto di contatto C e tale asse è ortogonale al piano su cui giace superficie e corpo (asse uscente dal foglio per intenderci). Pertanto, in ogni istante di tempo dt un generico punto appartenente al corpo ruota con velocità angolare $\omega$. Pertanto la velocità di ogni singolo punto P risulta essere ortogonale alla retta che congiunge il punto di contatto con il punto P. Graficamente si ha:

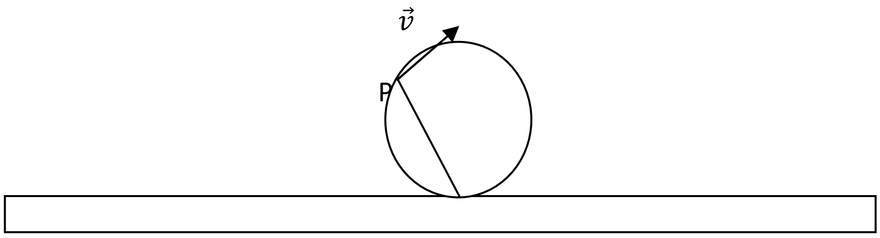



Figura 5.8

Siccomela velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{v}{R} \rightarrow \omega R = v$$

Pertanto dato che R vale in modulo $|\overrightarrow{PC}|$, possiamo tranquillamente scrivere:

$$v = \omega|\overrightarrow{PC}| \qquad (5.16)$$

Una caratteristica peculiare di questo tipo di moto risiede nel fatto che il punto di contatto C del corpo con il suolo rimane fermo rispetto al suolo stesso, e quindi da qui il nome di rotolamento senza strisciamento. Consideriamo adesso due istanti di tempo che per comodità chiamiamo t1 e t2 con t2>t1. Quindi l'istante t2 sarà successivo all'istante t1. Notiamo che lo spostamento subito dal centro del corpo che rotola è pari alla distanza tra i punti di contatto del corpo rispettivamente agli istanti di tempo t1 e t2.

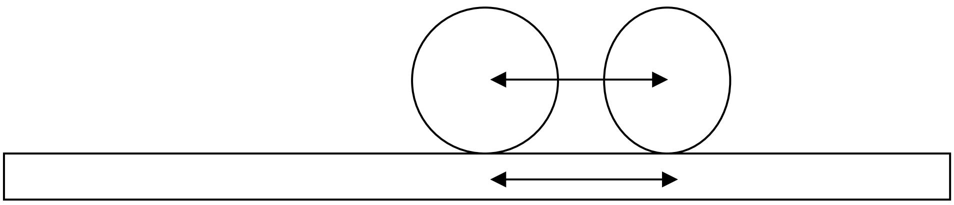


Figura 5.9

Come viene mostrato in figura, nell'istante di tempo t2 la ruota ha traslato di una distanza ben definita piccola a piacere. Lo spostamento che si ha avuto a livello di centro di massa è uguale allo spostamento che si ha avuto a livello di punti di contatto. Contemporaneamente la ruota avrà subito anche una rotazione e pertanto uno spostamento angolare. In un moto di puro rotolamento esiste una precisa relazione tra questi due movimenti. Tale relazione è la seguente:

$$|\Delta x| = R|\Delta\theta| \qquad (5.17)$$

Siccome, come abbiamo già avuto modo di vedere,  lo spostamento angolare è positivo se è antiorario, ne consegue che se aumenta la distanza sull'asse delle x, si ha uno spostamento orario e quindi negativo.

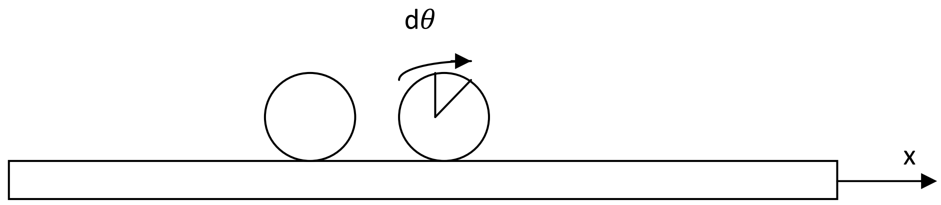



Figura 5.7

Pertanto la condizione di puro rotolamento si può scrivere nel seguente modo:

$$\Delta x = -R\Delta\theta$$

Dividendo per $\Delta t$ ed effettuando l'operazione di limite si ottiene la velocità istantanea, e pertanto si può scrivere:

$$v_x = -R\omega \qquad (5.18)$$

Analogamente, derivando ancora rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione:

$$a_x = -R\alpha \qquad (5.19)$$

Le tre condizioni (5.17), (5.18), (5.19) avvengono contemporaneamente e vengono chiamate **condizioni di puro rotolamento**. A questo punto ci chiediamo, per forza di cose, che ruolo ha la forza di attritoin tutto questo discorso. Come abbiamo visto, quando abbiamo trattato la dinamica di un punto materiale, la forza di attrito è una forza che si oppone al moto di un determinato corpo. La medesima cosa avviene in questo nuovo contesto, con la sola differenza che il punto di contatto rimane fermo al suolo proprio a causa della forza di attrito. Questa forza di attrito è chiaramente una forza di attrito statica in quanto permette al punto di contatto di rimanere in quiete.  Ora viene naturale domandarsi: la forza di attrito statica permette di mantenere fermo il punto di contatto, ma come mai se agiscono forze intense il mio punto di contatto non è più in quiete ma, per esempio, trasla? Si pensi alla ruota di una autovettura. Mentre l'autovettura si muove il punto di contatto tra ruota ed asfalto rimane fermo, ma se l'autovettura frena bruscamente, si ha uno slittamento della stessa.

## 5.6  Altri tipi di momenti.

In questo paragrafo verranno illustrati altri tipi di momenti. Consideriamo la situazione in cui un uomo al volante della propria autovettura deve affrontare una curva. Esso girerà chiaramente il volante nella direzione più opportuna. Sostanzialmente l'autista sta applicando un momento ad una coppia di vettori. Per questo motivo, questo tipo di momento viene chiamato **momento di una coppia**. Ma vediamo di chiarire meglio il concetto. Consideriamo due forze aventi la stessa intensità la stessa direzione ma verso opposto come viene mostrato in figura:

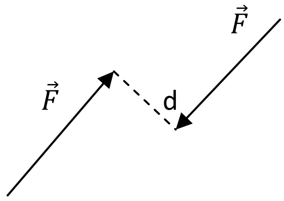



Figura 5.8

Nella figura si evince facilmente che ‘d’ è la distanza tra le due forze (il braccio). Si chiama **coppia** l’insieme di due forze opposte che agiscono su due punti di una massa m. L'azione della coppia è quella di far ruotare la massa . Formalmente, l’azione rotante si scrive nella seguente maniera:

$$M = F \times d$$

Naturalmente è possibile guidare una autovettura semplicemente appoggiando una sola mano sul volante. In quest’ultimo caso, agisce soltanto una forza e quindi si parla di momento di una forza. Ovviamente, tornando all’esempio di prima (figura 5.8), se si applica un momento di una coppia, è naturale che ci sarà anche un **momento resistente**. Infatti, la cremagliera che fa sterzare le ruote esercita un momento resistente quando si gira il volante. Sorge spontanea a questo punto la domanda: cosa è la cremagliera? Una **cremagliera** è sostanzialmente una ruota dentata che gira su un ingranaggio lineare, come viene mostrato in figura:

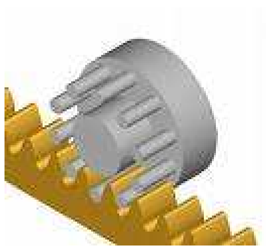


Figura 5.9

La cremagliera viene utilizzata in meccanica per convertire il moto rotativo in moto lineare e viceversa. Il meccanismo ingranaggio-cremagliera viene chiamato anche **rocchetto-dentiera**. Tornando al momento resistente, appare evidente che se si desidera avere una velocità di rotazione costante è necessario che il momento motore ed il momento resistente sia uguali, e quindi:

$$M_m = M_r$$

Dove con $M_m$ si indica il **momento motore** ossia il momento che si crea quando giriamo il volante con le mani, e con $M_r$ si indica il momento resistente. Chiaramente se il momento motore risulta essere maggiore del momento resistente la velocità di rotazione cresce, altrimenti se il momento motore risulta essere minore del momento resistente allora la velocità di rotazione decresce.

Gli ultimi due momenti che vengono brevemente descritti sono due momenti molto importanti in meccanica ma non solo, anche nella scienza delle costruzioni, ed in tante altre discipline connesse al campo edile, meccanico, civile. Questi momenti sono il **momento flettente** ed il **momento torcente**. Analizziamo brevemente il momento flettente. Consideriamo, a titolo di esempio, una trave vincolata ai suoi estremi, come viene chiaramente mostrato in figura:

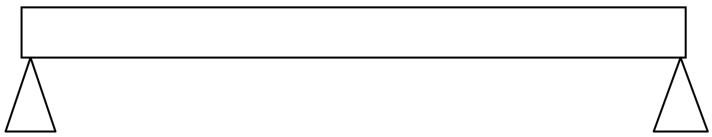


Figura 5.10

Supponiamo ora di applicare una forza normale alla trave stessa, diretta verso il basso. La trave chiaramente si fletterà (s'incurverà).

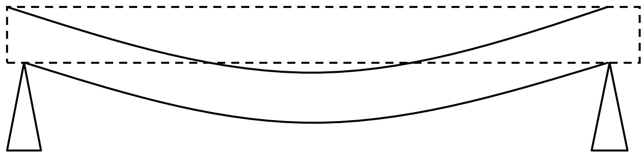


Figura 5.11

Anche il momento flettente è una coppia di due forze parallele aventi verso opposto. Si ha la flessione per via del fatto che la forza che agisce verso il basso e che provoca tale flessione è perpendicolare all'asse della trave stessa. Consideriamo la trave vista in precedenza ed inseriamo un po' di valori numerici. Supponiamo che tale trave sia lunga L, e che la forza F che agisce perpendicolarmente sulla trave agisce proprio nel mezzo:

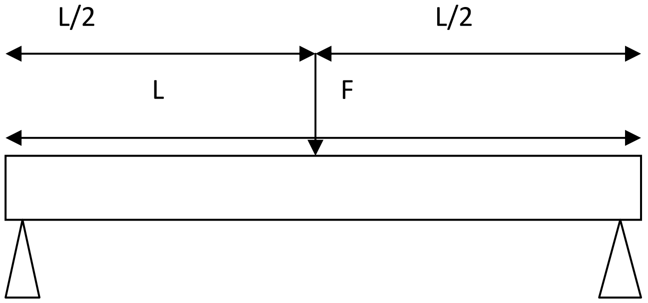



Figura 5.12

Agli estremi abbiamo una forza diretta verso l'alto pari a F/2. Si avrà una deformazione che genererà un arco di circonferenza. In questo arco di circonferenza la trave originaria svolge la funzione di corda. Si ricordi infatti che in geometria una **corda** altro non è che un segmento che unisce due punti diversi di una curva,come viene mostrato di seguito:

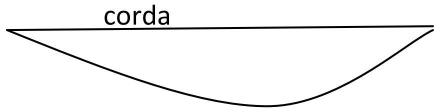



Figura 5.13

Analizzando nel dettaglio la situazione fisica mostrata in figura 5.12, è necessario premettere che non necessariamente la trave si deformerà. Magari può semplicemente flettersi facendo in modo che la sua lunghezza complessiva rimanga inalterata. Ad ogni modo se la trave si flette ci sarà una naturale rotazione di alcuni punti della trave.

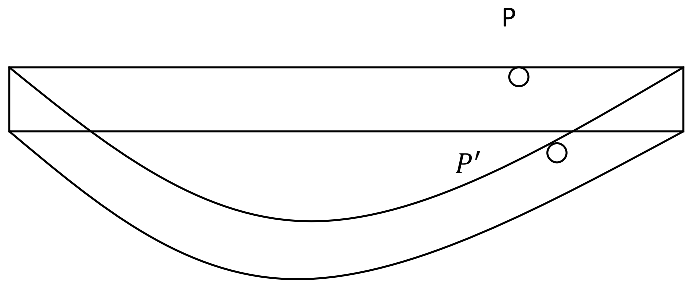



Figura 5.14

Il punto P verrà ruotato durante la flessione di un angolo compreso tra 0 e $\theta_{max}$. La rotazione è tanto minore quanto più grossa è la trave e quanto più resistente è il materiale di cui essa è composta. La causa di questa rotazione dei punti della trave è proprio il momento flettente, ossia il momento delle forze esterne. Rivedremo meglio il concetto di momento flettente in maniera anche formale nel successivo capitolo quando tratteremo le proprietà dei solidi. L'altro momento che ci mance di accennare è il momento torcente. Supponiamo di avere a disposizione una forza che agisce su una chiave come viene mostrato in figura:

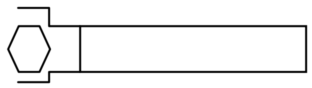


Figura 5.15

Girando la chiave sul dado si produce un momento torcente che fa appunto ruotare il dado attorno al proprio asse. Pertanto il momento torcente è un caso particolare di momento di una forza: Il momento torcente si ha quando la forza viene applicata perpendicolarmente rispetto all'asse di rotazione. Vediamo ora alcuni concetti di base sul concetto di trave e carico. La **trave** è un elemento in cui la lunghezza è una misura predominante rispetto alle altre dimensioni. Una trave può essere:

1. **Appoggiata agli estremi**

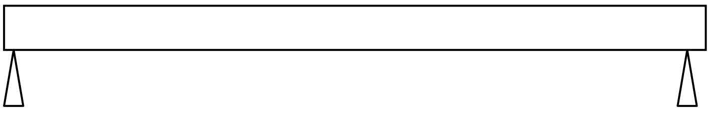


Figura 5.16

2. **Trave a mensola**

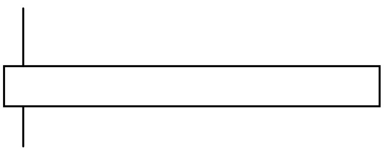


Figura 5.17

3. **Trave a sbalzo con carico**, in cui un punto di appoggio non è in corrispondenza di un estremo.

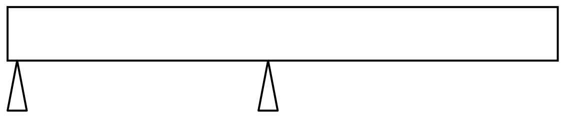


**Figura 5.18**

Per quanto riguarda i **carichi essi** possono essere:

1. **Concentrati**
2. **Distribuiti**

## 5.7 Cenni di statica del corpo rigido.

Si è già visto che in generale la condizione per la staticità di un punto materiale consiste nell'annullare la risultante delle forze agenti sul punto stesso. Per un corpo rigido, si ha l'equilibrio statico quando:

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{M} = 0 \qquad (5.20)$$

Ponendo a zero la risultante delle forze si realizza l'equilibrio statico del relativo centro di massa, mentre ponendo a zero il momento delle forze risultanti si ottiene l'annullamento dei moti rotativi.

## 5.8 Le leve.

Particolare importanza assume nella fisica il concetto di **leva**. Naturalmente per prima cosa dobbiamo chiarire per bene cosa è una leva. Il passo successivo sarà quello di definire i vari tipi di leve. Quindi, per prima cosa definiamo cosa è una leva. Una leva è una semplicissima macchina che può essere utilizzata, per esempio, per sollevare senza compiere molta fatica un determinato corpo. Tale macchina è essenzialmente composta da due bracci solidali tra loro che ruotano incernierati per una estremità ad un **fulcro**. Vediamo meglio di capire quest'ultima frase. Innanzitutto ci chiediamo cosa si intende per fulcro, e successivamente che cosa si intende per incernierati. Innanzitutto due bracci solidali sono due bracci che ruotano dello stesso angolo e si muovono con la stessa velocità angolare.  Il fulcro è il punto di appoggio della leva. Si veda in merito la seguente illustrazione:

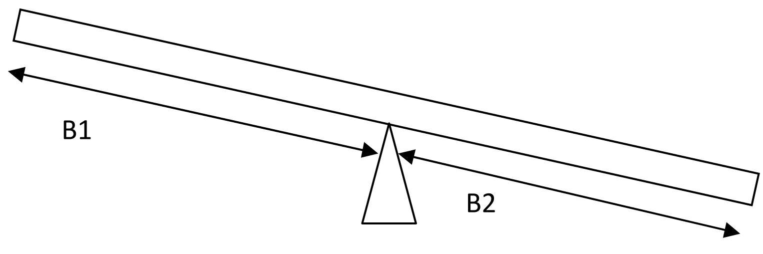



Figura 5.19

I due bracci incernierati per una estremità al fulcro significa che tali bracci sono legati tra loro proprio nel fulcro. La condizione di equilibrio nella leva è una condizione abbastanza semplice. Sostanzialmente la leva è in equilibrio quando non vi è alcuna rotazione e pertanto quando la somme dei momenti delle forze risulta essere nulla. Siccome, per definizione il momento di una forza risulta essere (in modulo):

$$M = bF$$

Allora tale equilibrio si può scrivere così:

$$b_1F_1 = b_2F_2$$

Graficamente si ha:

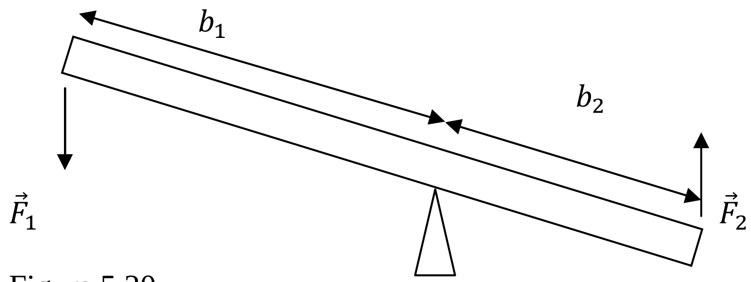



Figura 5.20

E' facile notare che se si imprime all'estremità del braccio lungo della leva una forza, l'estremità del braccio corto si muoverà con una forza moltiplicata di un fattore. Tale fattore sarà:

$$\vec{F}_2 = \frac{b_1}{b_2}\vec{F}_1 \qquad (5.21)$$

In base al precedente rapporto si possono avere:

1. **Leve vantaggiose** se la forza $F_1$è minore della forza $F_2$, ossia se il **braccio potenza b1** è maggiore del **braccio di resistenza** b2.
2. **Leve svantaggiose** se la forza $F_1$ risulta essere maggiore della forza $F_2$, ossia se il braccio b1 è minore del braccio b2.
3. **Leve indifferenti**, ossia le due forze si equivalgono e quindi le lunghezze dei due bracci si equivalgono.

Un'altra importante classificazione delle leve è la seguente:

1. Leva di 1°specie, ossia una leva dove il fulcro si trova tra le due forze e queste leve possono essere vantaggiose, svantaggiose oppure indifferenti.

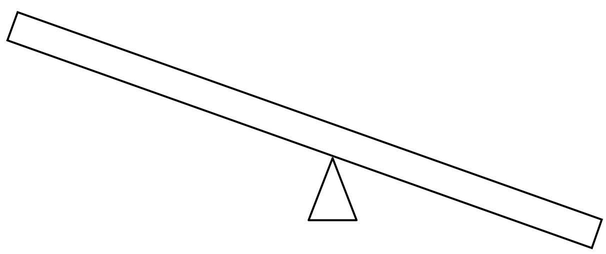


Figura 5.21

2. Leva di 2° specie, ossia una leva dove la forza resistente si trova tra il fulcro e la forza applicata. Questo tipo di leve sono sempre leve di tipo vantaggioso.

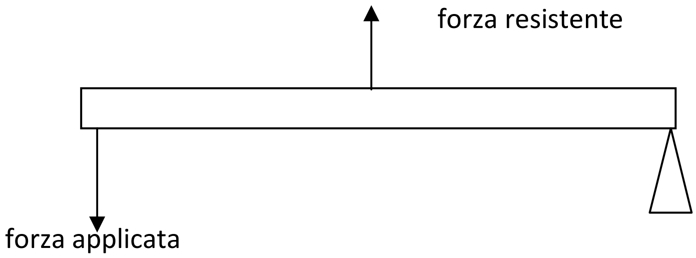



Figura 5.22

3. Leva di 3° specie, ossia una leva dove la forza applicata si trova tra il fulcro e la forza resistente. Questo tipo di leve sono sempre leve svantaggiose.

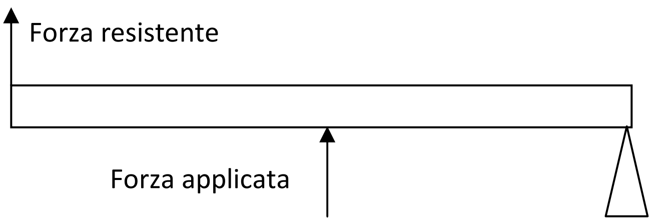



Figura 5.23

Vediamo un esempio di leva di prima specie. Consideriamo, a titolo di esempio, una carrucola. Ad una estremità della carrucola agganciamo un corpo di massa m, mentre all'altra estremità applichiamo una forza F che permette il sollevamento del corpo.

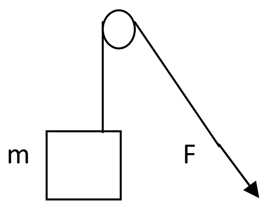



Figura 5.24

L'oggetto da sollevare mi rappresenta la mia forza resistente, F è la forza applicata. Il fulcro sta proprio nella carrucola. Questo è un esempio di leva di 1° specie. Vediamo ora un esempio di leva di 2° specie. Consideriamo una carriola. I manici rappresentano il punto dove applicare la forza, il peso da trasportare rappresenta la forza resistente, mentre il fulcro è rappresentato dall'asse della ruota. Un esempio di leva di 3° specie invece è il braccio umano. Infatti, il gomito mi rappresenta il fulcro, la forza applicata è rappresentata dal muscolo, ed il carico sulla mano mi rappresenta la forza resistente. Vediamo ora un esempio:

**ESEMPIO**: Supponiamo di avere a disposizione una trave lunga 120cm su un fulcro a 40 cm da un estremo sul quale agisce una forza resistente del peso di 22 Kg. Vogliamo trovare quale forza deve essere applicata all'altro estremo dell'asta per fare in modo che la stessa rimanga in equilibrio.

Il problema non si presenta difficile. Infatti notiamo subito che la leva è una leva del primo tipo.

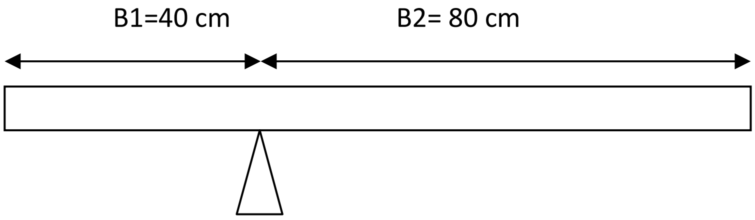



Figura 5.25

L'equilibrio si ha quando:

$$b_1F_1 = b_2F_2 \quad \text{ossia} \quad \frac{b_1F_1}{b_2} = F_2$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene la forza desiderata.

## 5.9 Trasmissione del moto.

I concetti fin qui illustrati servono a fornire le basi per una comprensione circa le loro applicazioni pratiche. In particolare le equazioni della dinamica e del corpo rigido vengono intensamente utilizzate nel campo della trasmissione del moto. Consideriamo, a titolo di esempio, due corpi collegati tra loro mediante un determinato mezzo di collegamento:

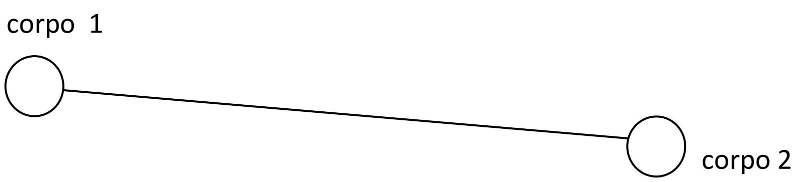



Figura 5.26

Se il corpo 1 si muove, allora per forza di cose anche il corpo 2 dovrà muoversi. Tale tipo di moto si dice **vincolato** in quanto il moto del corpo 1 condiziona il moto del corpo 2. Se i due corpi fossero separati allora il corpo 1 molto probabilmente si muoverebbe senza influenzare il moto del corpo 2. Una tale situazione si può definire come **moto libero**. Si può definire **moto diretto** il moto del corpo 1 rispetto al corpo 2 e **moto inverso** il moto del corpo 2 sul corpo 1. Supponiamo ora di avere a disposizione un sistema composto da questi due corpi collegati insieme e che inizialmente si trovano in una determinata posizione. Se dopo un certo tempo e dopo un certo moto tali corpi ritornano nella loro configurazione originale, allora si dice che il sistema ha effettuato un **moto rotativo**. Chiaramente se il movimento avviene senza che i corpi si fermino allora tale movimento si dice **continuo** altrimenti si dice **intermittente**. L'organo attraverso cui avviene il trasferimento di moto viene chiamato **organo di trasmissione**.

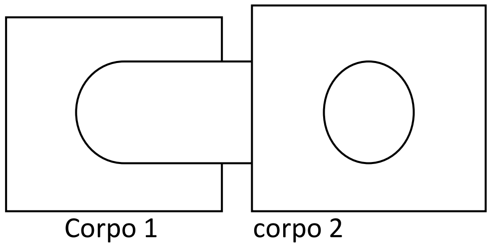



Figura 5.27

L'organo di trasmissione può tranquillamente essere una cinghia, una catena, o quant'altro. Consideriamo a titolo di esempio pratico il caso della trasmissione di moto tramite cinghia tra due pulegge. Innazitutto una **puleggia** è essenzialmente una ruota la cui circonferenza è incisa da un binario al cui interno vi è l'organo di trasmissione.

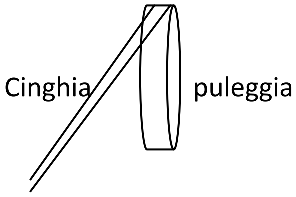



Figura 5.28

La puleggia trainante ossia la puleggia collegata direttamente al motore elettrico tramite un organo di trasmissione viene detta **puleggia motrice,** mentre l'altra puleggia viene detta **puleggia condotta**.

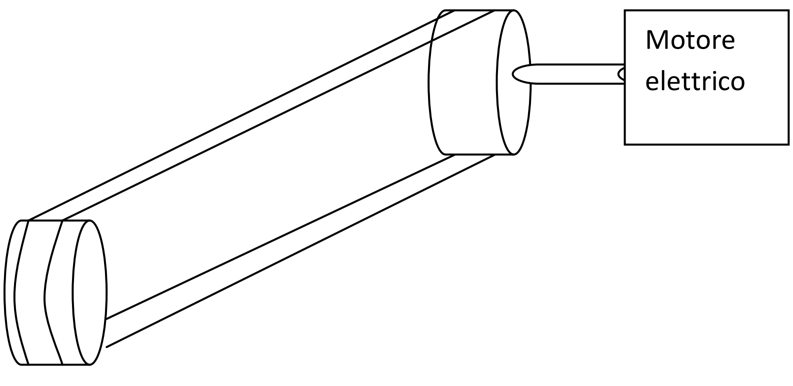



Figura 5.29

Per un corretto dimensionamento della cinghia di trasmissione è necessario possedere alcuni dati fondamentali come per esempio:

1. La velocità della cinghia
2. Diametro delle due puleggia (indichiamo per comodità con $d_1$il diametro della puleggia allacciata al motore elettrico e con $d_2$ l'altra puleggia.)

3. Il rapporto di trasmissione .
4. L’interasse.
5. La lunghezza della cinghia.

Vediamo di definire alcuni concetti di base. Il **rapporto di trasmissione** essenzialmente è il rapporto tra i due diametri delle pulegge. Formalmente si ha:

$$k = \frac{d_1}{d_2} \qquad (5.22)$$

**L’interasse** (che indichiamo con $I$ ) invece rappresenta la distanza dei centri delle due pulegge. Graficamente si ha:

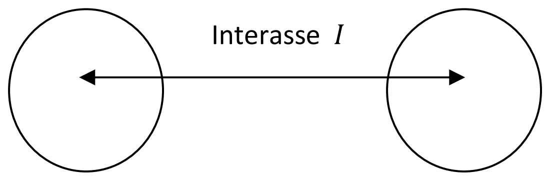



Figura 5.30

Con tutti questi dati è possibile calcolare la lunghezza della cinghia se tale dato non è disponibile tramite la formula:

$$L = 2I \cdot 1{,}57 \cdot (d_1 + d_2) + \frac{(d_1 - d_2)^2}{4I} \qquad (5.23)$$

Mentre l’ampiezza dell’area di contatto che graficamente viene rappresentata in questo modo:

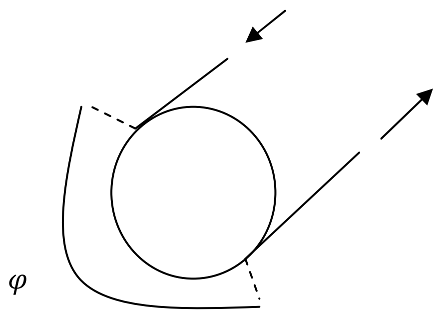



Figura 5.31

L’angolo $\varphi$ quindi rappresenta **l’ampiezza dell’area di contatto** della cinghia con la puleggia. La formula per il calcolo di tale ampiezza è la seguente:

$$\varphi = 180 - 57 \cdot \frac{d_1 - d_2}{I} \qquad (5.24)$$

Le cinghie possono essere suddivise grossolanamente in due tipi fondamentali:

1. Le **cinghie piatte**
2. Le **cinghie trapezoidali**

Oltre a queste due vale la pena citare la **cinghia dentata**.

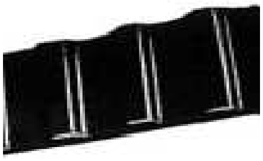


Figura 5.32

La cinghia dentata permette di effettuare una perfetta accoppiata tra i denti della cinghia e le insenature della puleggia. La penetrazione e l'uscita del dente dall'insenatura avviene in maniera dolce e senza particolari attriti. Ci viene a questo punto spontanea una semplicissima domanda: senza conoscere l'ampiezza dell'area di contatto, è possibile ottenere il numero di denti presenti in quell'area ossia è possibile conoscere il **numero di denti in presa**? La risposta è affermativa. Basta utilizzare i parametri elencati precedentemente ed utilizzare la seguente banalissima relazione:

$$denti\ in\ presa = (0{,}5 - \frac{(d_1 - d_2)}{I}) \cdot N \qquad (5.25)$$

Dove:

$$N = numero\ di\ \ denti\ della\ puleggia\ condotta$$

Un altro tipo di mezzo trasmissivo del moto è la ruota dentata. Sostanzialmente, una ruota dentata è un mezzo studiato apposta per poter trasmettere un momento torcente ad un altro elemento. Se prendiamo in considerazione due ruote dentate:

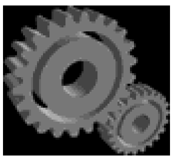
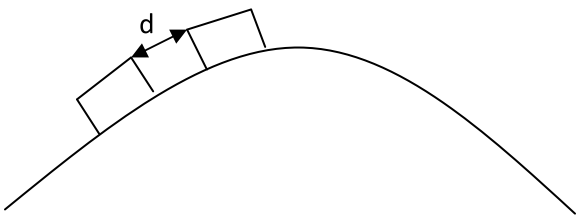


Figura 5.33

La ruota più grande prende il nome di **corona** mentre la ruota più piccola viene comunemente chiamata **pignone**. Prendiamo in considerazione due ruote dentate che lavorano tra loro come è stato mostrato in figura 5.33. Il rapporto di conversione della velocità è inversamente proporzionale al rapporto tra il numero dei rispettivi denti:

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{n_2}{n_1} \qquad (5.26)$$

Il segno negativo è legato al verso di rotazione delle due ruote. Chiaramente $V_1$e $V_2$sono rispettivamente le velocità della ruota 1 e della ruota 2. Analogamente, $n_1$ e $n_2$ sono i numeri di denti della ruota 1 e della ruota2.  Appare abbastanza evidente che se le due ruote devono perfettamente ingranare tra oro è necessario che il **passo**, ossia la distanza tra le creste, sia uguale per entrambi.




d=passo

Figura 5.34

Il rapporto tra le coppie è dato da:

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{n_1}{n_2} \qquad (5.27)$$