NUMERI FUZZY
(a cura di Marco Buttolo (2006))

1 definizione:

Un **numero fuzzy** un insieme fuzzy normale e convesso. Un insieme fuzzy è normale se la sua funzione di appartenenza possiede valori che, per forza di cose, sono compresi tra 0 e 1. Un insieme fuzzy è simmetrico se la sua funzione di appartenenza è simmetrica. In termini matematici si può tranquillamente scrivere:

$$\mu_a(c+x) = \mu_a(c-x)$$

dove 'c' è il valore intermedio del supporto della funzione di appartenenza. Essendo un numero fuzzy normale e convesso si ha che valgono le seguenti condizioni:

1. $\exists\, x_0 : \mu_a(x_0) = 1$
2. μ_a è continua

Vediamo ora di definire i numeri fuzzy più utilizzati in campo industriale: i numeri fuzzy di tipo trapezoidale e di tipo triangolare.

2 I numeri triangolari e trapezoidali:

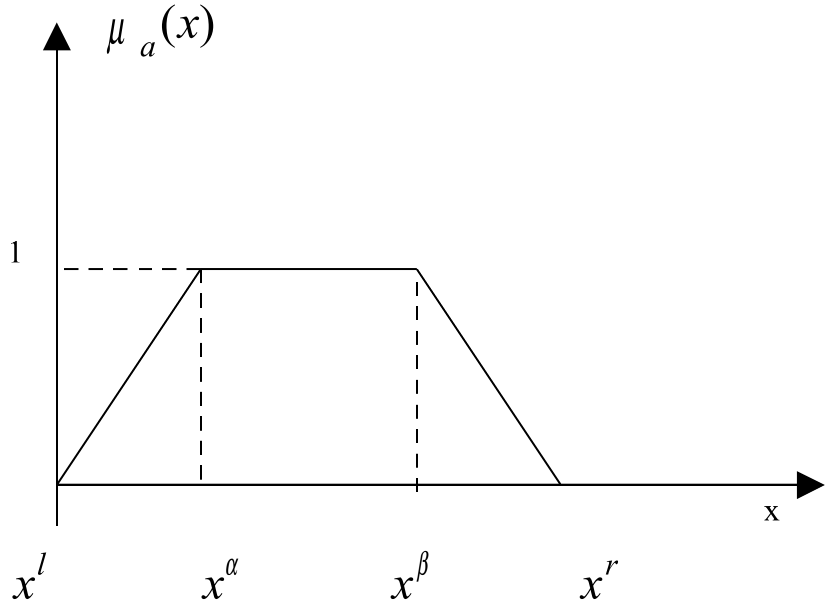
Il numero fuzzy trapezoidale è un insieme fuzzy caratterizzato da una funzione di appartenenza definita in termini rigorosi nel seguente modo:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^l}{x^\alpha - x^l} & , x^l \leq x \leq x^\alpha \\ 1 & , x^\alpha \leq x \leq x^\beta \\ \dfrac{x - x^r}{x^\beta - x^r} & x^\beta \leq x \leq x^r \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Quindi i numeri trapezoidali vengono rappresentati da una 4-pla del tipo:

$$A = (x^r \, , \, x^\beta \, , x^\alpha \, , \, x^l)$$

dove x^r e x^l sono rispettivamente il limite maggiore e minore del numero fuzzy considerato, mentre x^α e x^β sono gli elementi che hanno il maggior grado di appartenenza. Graficamente si ha:



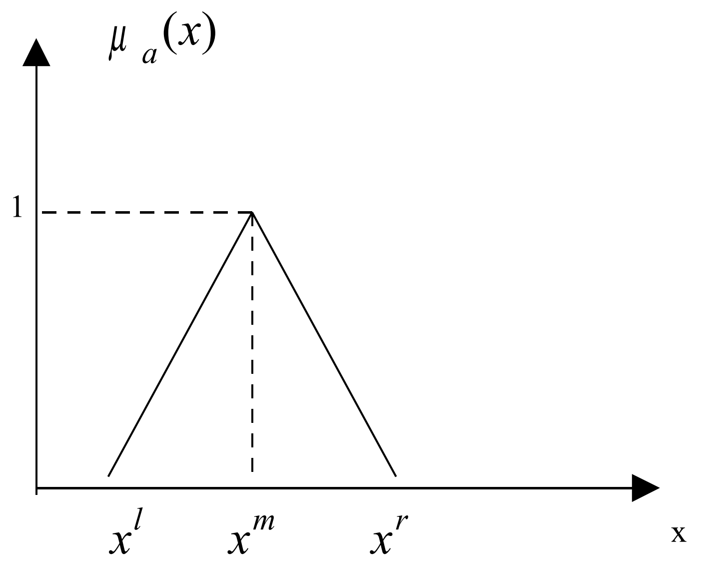
Il numero fuzzy triangolare è un insieme fuzzy caratterizzato da una funzione di appartenenza definita in termini rigorosi in questa maniera:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^l}{x^m - x^l} & , x^l \leq x \leq x^m \\ \\ \dfrac{x - x^r}{x^m - x^r} & x^m \leq x \leq x^r \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Quindi i numeri triangolari sono caratterizzati da una 3-pla del tipo:

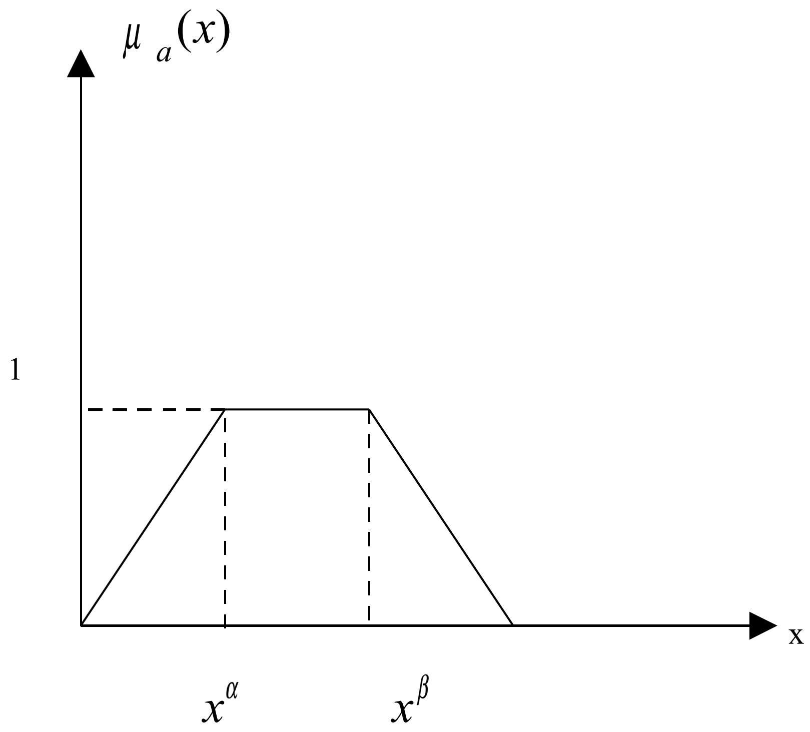
A = (x^r , x^m , x^l)

dove x^l e x^r sono rispettivamente il limite minore e maggiore del numero fuzzy considerato, mentre x^m è l'elemento che ha il maggior grado di appartenenza. Quindi graficamente si ha:



Si noti che x^m è il valore di mezzo nel supporto della funzione di appartenenza. Questo valore delle x è il valore intermedio di simmetria precedentemente indicato con 'c'.

Vediamo ora di descrivere il motivo per cui queste due funzioni di appartenenza sono tra le più utilizzate. Innanzitutto, il numero trapezoidale può essere utilizzato per rappresentare affermazioni come: ”il guadagno nel prossimo anno avrà un valore approssimato dal 10% al 12%”. Per esempio si potrebbe voler rappresentare la seguente affermazione: “Il valore massimo della funzione di appartenenza di x in futuro varierà dal 60% all’ 80%”. Si potrebbe rappresentare graficamente la precedente affermazione in questo modo:

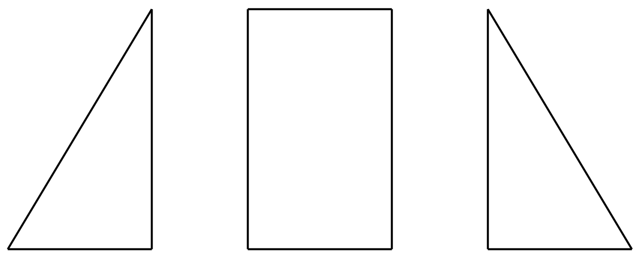


In questo caso specifico si ottiene il seguente assegnamento:

$$x^{\alpha} = 0.6$$

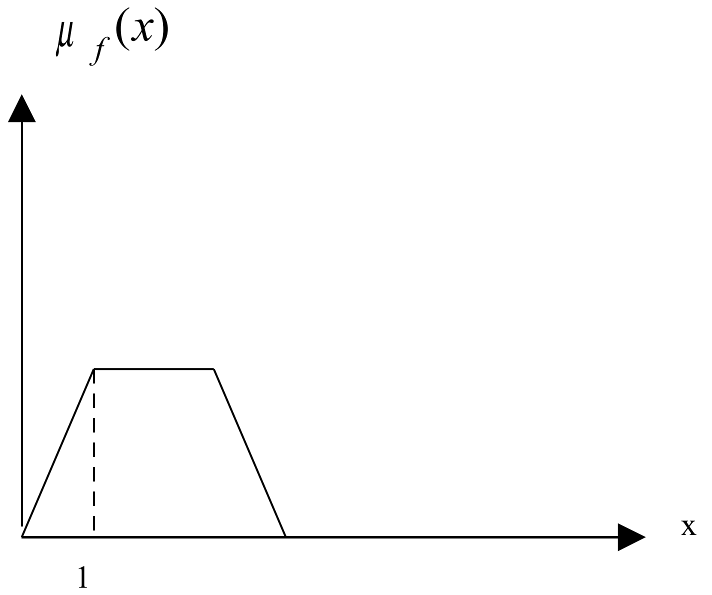
$$x^{\beta} = 0.8$$

dove i valori tra 0.6 e 0.8 hanno grado di appartenenza completa, mentre quelli rispettivamente al di sotto del 0.6 e al di sopra dell’0.8 avranno un grado di appartenenza parziale. Se la precedente funzione di appartenenza descrivesse la tossicità di un elemento chimico, allora si direbbe che la tossicità massima si avrebbe tra un dato valore α e un dato valore β. Il numero triangolare invece si può utilizzare per descrivere il concetto di "vicino a". I numeri fuzzy triangolari rappresentano un caso particolare dei numeri fuzzy trapezoidali. Analizziamo brevemente la struttura della funzione trapezoidale e triangolare. La funzione trapezoidale è composta da un tratto avente coefficiente angolare positivo (fase di salita iniziale), un tratto con pendenza nulla (il tratto dove la funzione stessa assume il suo valore massimo), ed un tratto finale con pendenza negativa. I tratti con pendenza positiva e negativa sono sostanzialmente dei triangoli rettangoli, mentre il tratto con pendenza nulla può essere visto come un rettangolo. Graficamente si ha:

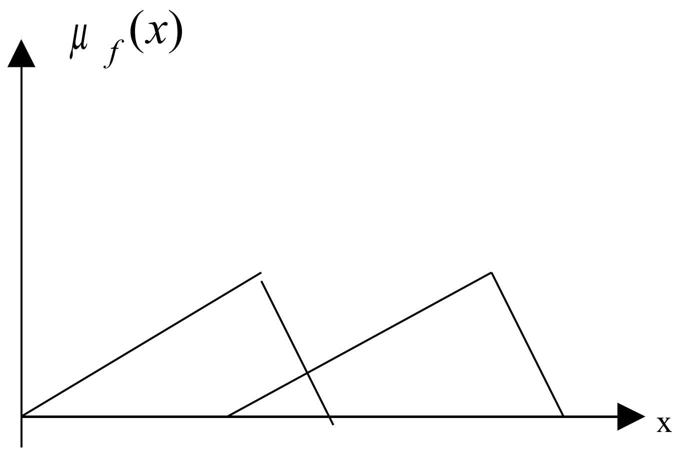


Salita stazionarietà discesa

Il triangolo inerente al tratto di salita viene chiamato **triangolo sinistro**, ed è adatto a descrivere un concetto grande. Per esempio se tale funzione di appartenenza venisse utilizzata per rappresentare il concetto di tossicità, si potrebbe affermare che il triangolo sinistro è adatto a descrivere il concetto di aumento del grado di tossicità, in quanto i valori funzionali in questo tratto sono crescenti (la funzione è monotona crescente). Quindi in questa fase la tossicità tende a diventare grande. Viceversa si ha nel caso del triangolo con pendenza negativa chiamato per comodità **triangolo destro**. In questo caso il grado di tossicità tende a diminuire, in quanto la funzione è monotona decrescente in questo tratto. Quindi quest'ultimo triangolo è adatto a descrivere un concetto basso o meglio un concetto che tende ad abbassarsi di valore. Analogamente si ha per la funzione di appartenenza di tipo triangolare. L'unica differenza è che in quest'ultimo caso non è presente un intervallo di stazionarietà bensì un singolo punto di stazionarietà (un punto dove la derivata prima della funzione di appartenenza è nulla (condizione di stazionarietà). Riassumendo, nel caso della funzione di tipo trapezoidale, ricordandosi come quest'ultima può essere utilizzata, il tratto iniziale (triangolo sinistro) corrisponde all'affermare che una certa misura fuzzy può cambiare nel tempo il proprio grado di appartenenza in maniera positiva, ovvero quest'ultimo può aumentare di un certo valore in percentuale. Nel tratto stazionario, il grado di appartenenza rimarrà stabile ossia il grado di tossicità, per determinati valori compresi in un determinato intervallo 'crisp' rimarrà inalterato. Infine nel tratto in discesa, la misura fuzzy può cambiare nel tempo il proprio grado di appartenenza in maniera negativa, ossia quest'ultimo può diminuire di un certo valore percentuale. Nel caso che la funzione di appartenenza è triangolare invece le cose cambiano leggermente. Innanzitutto cambia il tipo di concetto che questa funzione vuole rappresentare. In questo caso nel tratto con pendenza positiva, si ha un avvicinamento del grado di tossicità dell'elemento al suo valore massimo, oppure ad un determinato valore intermedio. Nel tratto con pendenza negativa invece il grado di tossicità tenderà ad avvicinarsi al valore minimo oppure, anche in questo caso, ad un determinato valore intermedio. Quindi, se per esempio consideriamo il caso della funzione di appartenenza della classe fuzzy MOLTO BASSO, e se tale funzione di appartenenza è di tipo trapezoidale, possiamo descrivere la situazione in questo modo:



Supponiamo che la x rappresenti la quantità di sostanza velenosa presente in un composto, e che tale x sia l'unico ingresso del sistema, sul quale è possibile valutare quindi la tossicità di un dato elemento chimico (l'uscita dello stesso). Per piccoli valori delle x, il grado di tossicità dell'elemento chimico tende a salire, fino a quando non raggiunge il tratto stazionario, in cui assume il massimo grado di tossicità. In corrispondenza di quel tratto l'elemento chimico possiede il più alto grado di tossicità per la classe MOLTO-BASSO. Per esempio se x vale circa 1, allora in uscita si avrà il maggior grado di tossicità per la classe MOLTO-BASSO. Man mano che il valore di x aumenta, il grado di appartenenza alla classe MOLTO-BASSO tende a diminuire in quanto per valori crescenti di x, l'uscita tende a transitare dalla classe MOLTO-BASSO alla classe BASSO. Infatti all'aumentare della x, diminuisce il grado di appartenenza alla specifica classe fuzzy (più aumento la x e meno MOLTO-BASSA è la tossicità dell'elemento chimico). In sostanza aumentando il valore delle x, si transita da una classe all'altra. Considerando l'intersezione tra le funzioni di appartenenza, aumentando x diminuisce il grado di appartenenza alla classe MOLTO-BASSO, ma contemporaneamente superata una certa soglia, aumenta l'appartenenza alla classe BASSO. Analogo discorso vale per la funzione di appartenenza di tipo triangolare, con la sostanziale differenza che quest'ultima non possiede il tratto di stazionarietà. Si noti infine che tutte le funzioni di appartenenza utilizzate in questa tesi sono simmetriche e pertanto la pendenza del tratto di salita è uguale alla pendenza del tratto di discesa. Questo fatto rappresenta una comodità. E' possibile però rendere le funzioni di appartenenza non simmetriche e quindi rendere più ripida il tratto di salita (triangolo sinistro) rispetto al tratto di discesa (triangolo destro), oppure viceversa. Quest'ultima scelta dipende dal particolare dominio applicativo. Per esempio, si potrebbe fare in modo di rendere meno ripido il triangolo sinistro in modo che l'aumento del grado di appartenenza di un dato 'crisp' alla determinata classe fuzzy risulti essere più "lento", all'aumentare costante della variabile indipendente (che usualmente chiamiamo x). Contemporaneamente si potrebbe rendere più ripido il triangolo destro, in modo che superata una certa soglia, il grado di appartenenza a quella determinata classe fuzzy diminuisca vertiginosamente. Graficamente si ha:

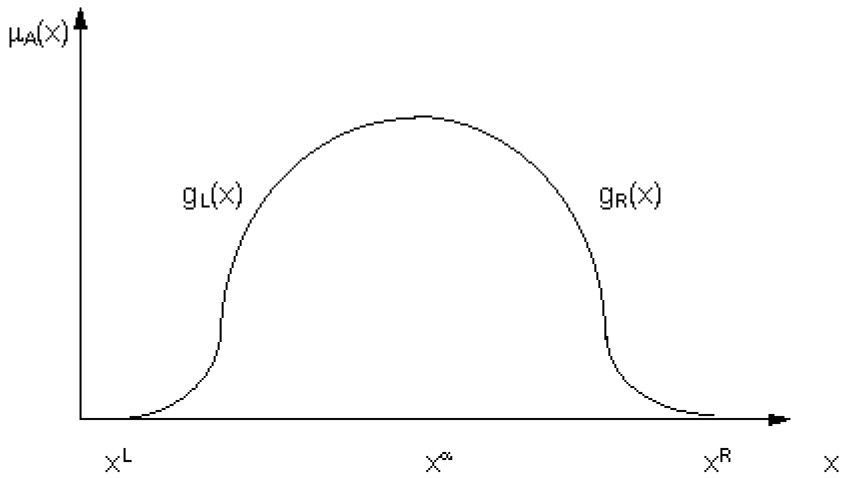


Le stesse considerazioni possono essere svolte sulla funzione di appartenenza di tipo trapezoidale. Si ricordi comunque che queste considerazioni dipendono strettamente dal tipo di applicazione, e che non esiste una precisa regola matematica oppure empirica che dica come strutturare geometricamente una funzione di appartenenza. Di solito si tende ad utilizzare funzioni di appartenenza simmetriche.

Infine vale la pena citare un terzo tipo di numero fuzzy abbastanza utilizzato in generale. Il numero fuzzy in questione è il numero fuzzy di tipo **gaussiano.** Esso viene definito formalmente in questo modo:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 0 & , x < x^l \\ g_l(x) & , x^l \leq x \leq x^\alpha \\ 1 & , x = x^\alpha \\ g_r(x) & , x^\alpha \leq x \leq x^r \\ 0 & , x > x^r \end{cases}$$

Invece graficamente si ha la seguente funzione:



BIBLIOGRAFIA:

[1] Massimiliano Veronesi, Antonio Visioli: "Logica fuzzy: teoria e applicazioni", 1998;

[2] Beatrice Lazzerini: Introduzione agli insiemi fuzzy e alla logica fuzzy, Pisa (scaricabile da web in formato PDF).