

LA LOGICA FUZZY

La logica fuzzy è una logica non binaria bensì ‘sfumata’, che prende spunto dalla filosofia buddista-zen, per la quale il mondo viene visto come un qualcosa di continuo, per l’appunto di sfumato. La vera teorizzazione della logica fuzzy deriva dall’ingegnere americano di origine persiana Lotfi Zadeh che la propose nel lontano 1965 nell’articolo intitolato Information and control. Nella logica tradizionale valgono i principi aristotelici di **non contraddizione** e del **terzo escluso**. In sostanza il principio di non contraddizione afferma che se X è un generico insieme e x un generico elemento, allora x può appartenere all’insieme X o non appartenere. Formalmente si ha una cosa di questo tipo:

$$X \cap X^c = \emptyset$$

ossia se x è un elemento di X , esso non può contemporaneamente appartenere anche a X^c (l’insieme complementare). Invece il principio del terzo escluso afferma che l’unione dell’insieme X e del suo complemento X^c costituiscono l’universo del discorso. Quindi formalmente si scrive:

$$X \cup X^c = 1$$

Riassumendo se un elemento non appartiene all’insieme preso in considerazione, deve per forza di cose appartenere al suo complementare. Questo sistema di rappresentazione della realtà è però piuttosto rigido e non tiene conto del naturale divenire delle cose. Nella logica fuzzy quindi cadono i classici principi aristotelici visti in precedenza. Nella logica fuzzy una variabile può assumere oltre ai soliti valori estremi (0 e 1) anche i valori intermedi come per esempio 0,2 oppure 0,5. Cambia però il significato che questi numeri hanno. Prendiamo a titolo di esempio il caso di un bicchiere. Se associamo al bicchiere pieno il valore 1 e al bicchiere vuoto il valore 0, che valore possiamo associare al bicchiere pieno a metà? Sarebbe auspicabile associare ad esso il valore 0,5 che rappresenta il fatto che il mio bicchiere appartiene alla classe ‘vuoto’ con un certo grado di appartenenza pari a 0,5, mentre appartiene contemporaneamente alla classe ‘pieno’ con un grado di appartenenza pari a 0,5. Quindi nel contesto della logica fuzzy, il numero rappresenta il grado di appartenenza di un dato reale ad una specifica classe. Ecco che in questo nuovo contesto, assume un’importanza rilevante il concetto di **classe fuzzy**. Per classe fuzzy si intende un **insieme fuzzy**, ossia un insieme di coppie ordinate del tipo: (dato reale, grado di appartenenza). Formalmente si definisce un insieme fuzzy in questo modo:

$$F = \{(x, \mu_a) \mid x \in X\}$$

dove con μ_a si indica la **funzione di appartenenza**, ossia quella particolare funzione che, per ogni valore reale, associa un grado di appartenenza a quella particolare classe fuzzy. Spesso vengono

utilizzate, per la loro versatilità funzioni di appartenenza **trapezoidali**, **triangolari**, oppure **gaussiane**. Graficamente si ha:



Sicuramente il lettore avrà notato una certa somiglianza tra il concetto di grado di appartenenza ed il concetto di probabilità. Si presti particolare attenzione al fatto che la probabilità di un dato evento fornisce informazioni inerenti alla frequenza relativa con cui gli oggetti di un determinato insieme possono presentarsi. La funzione di appartenenza invece fornisce informazioni sulla somiglianza esistente tra un dato oggetto ed una proprietà definita in modo vago. Consideriamo a titolo di esempio un'altra situazione. Supponiamo di avere un'automobile che viaggia lungo una strada con una certa velocità. Supponiamo che questa velocità sia di 101 km/h. Ipotizziamo ora di avere tre possibili classi di velocità: ALTA, MEDIA, BASSA. Noi per velocità alta intendiamo una velocità superiore ai 100Km/h, mentre per velocità bassa intendiamo una velocità inferiore ai 60 Km/h. In questo contesto, utilizziamo una logica positiva, cioè una logica binaria che usa questa associazione:

1 = VERO

0 = FALSO

Supponiamo inoltre di utilizzare un vettore per rappresentare le tre classi citate precedentemente:

[ALTA, MEDIA, BASSA]

Utilizzando la logica binaria si può rappresentare la precedente situazione in questo modo:

[1, 0, 0] dove 1 indica che la mia velocità è effettivamente alta.

Se la mia automobile viaggiasse alla velocità di 99 Km/h, allora la precedente rappresentazione assumerebbe la seguente forma:

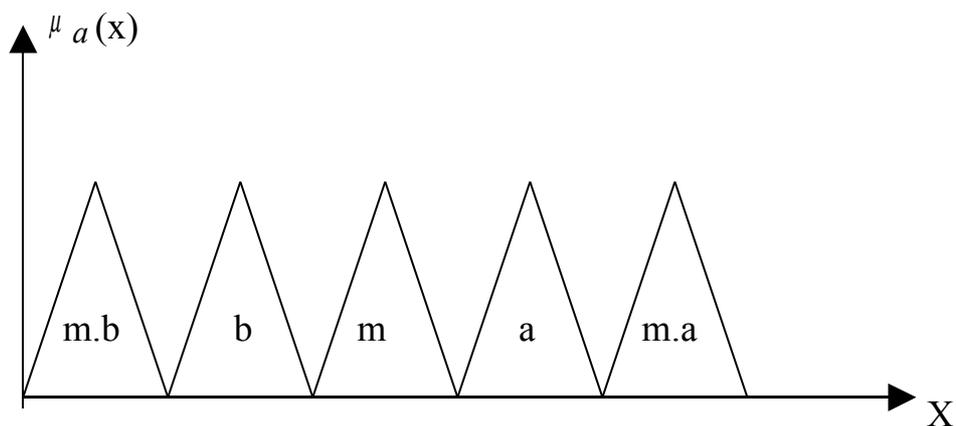
[0, 1, 0] dove in questo caso 1 mi rappresenta il fatto che la velocità è media.

Usando invece la logica fuzzy le precedenti rappresentazioni prenderebbero la seguente forma:

[0.6, 0.4, 0] nel caso in cui la velocità è di 101Km/h

[0.4, 0.6, 0] nel caso che la velocità è di 99 Km/h

In sostanza la velocità di 101Km/h appartiene alla classe ALTA con un certo grado di verità (appartenenza al 60%), mentre appartiene alla classe BASSA con un altro grado di verità (appartenenza al 40%). Analogo discorso vale per il secondo caso. Quindi si nota che la rappresentazione della realtà è più precisa. Inoltre sono caduti i principi aristotelici di non contraddizione e del terzo escluso. Quindi se assumiamo una situazione del seguente tipo:



Dove:

- M.B = classe molto-bassa
- B = classe bassa
- M = classe media
- A = classe alta
- M.A = classe molto-alta

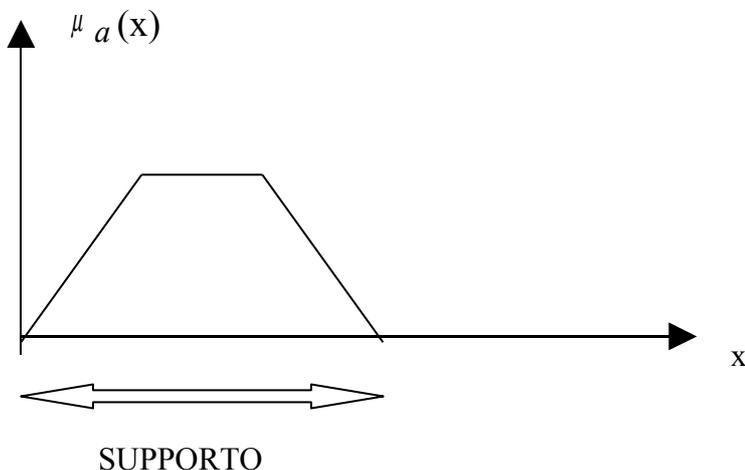
Si nota subito che all'aumentare del valore delle x (il nostro dato reale), il suo grado di appartenenza cambia, o meglio esso transita dall'appartenenza alla classe molto-bassa, verso la classe bassa, e così via, fino al raggiungimento della classe molto-alta. Per esempio se x rappresenta la tossicità di un dato elemento chimico, allora all'aumentare del valore di x , il suo grado di appartenenza cambia, ma ovviamente cambia anche la relativa classe di appartenenza (in questo caso sarà la classe di tossicità). Quindi l'utilizzo delle funzioni di appartenenza e delle classi fuzzy dipende moltissimo dal dominio applicativo. Si definisce **insieme fuzzy normalizzato** un insieme con una funzione di appartenenza tale che:

$$\mu_a(x) = 1$$

Invece un insieme fuzzy si dice **singleton** quando esiste un solo valore di x per cui la funzione di appartenenza è positiva. Formalmente si scrive:

$$\exists! x : \mu_a(x) > 0$$

L'**intervallo di fuzzificazione** è l'intervallo di valori per la variabile x in cui la funzione di appartenenza è positiva. Spesso l'intervallo di fuzzificazione prende il nome di **supporto**.



Definiamo ora un altro concetto importante della teoria della logica fuzzy, ossia il concetto di **insieme α cut**. Un insieme α -cut è un particolare insieme fuzzy definito formalmente nel seguente modo:

$$\alpha - cut = \{x : \mu_f(x) \geq \alpha\}$$

Quindi α viene visto come una **soglia** che delimita in qualche modo l'appartenenza di una variabile reale ad una determinata classe fuzzy. Per esempio consideriamo come classe fuzzy la classe MEDIA, e indichiamo con 'x' la visibilità su un tratto stradale in presenza di nebbia. Assumiamo come valore di soglia il seguente:

$$\alpha = 50m$$

Pertanto consideriamo media quella visibilità che supera il precedente valore di soglia, mentre scartiamo tutti quei valori inferiori in quanto implicano una scarsa o insufficiente visibilità del manto stradale. La logica fuzzy pertanto prende spunto dal misticismo orientale, il quale solitamente descrive la natura come un qualcosa di continuo, e soprattutto descrive l'andare delle cose in maniera sfumata e non rigida, come accade nelle religioni e filosofie occidentali. Per questo motivo negli ultimi anni tale logica sta prendendo piede soprattutto nel campo della teoria del controllo, ma non solo. Utilizzando la logica fuzzy è possibile addomesticare molti dei paradossi presenti nella matematica, ed è possibile elaborare dati ed informazioni che magari possono presentare dei rumori. Infatti uno dei punti di forza della logica fuzzy sta proprio nella sua possibilità di trattare con l'incertezza.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Massimiliano Veronesi, Antonio Visioli: "Logica fuzzy: teoria e applicazioni", 1998;
- [2] Aldo Rossi: "Logica Fuzzy: Applicazione al controllo di sistemi meccanici", corso di meccanica dei robot, Università di Padova.

