* Metodo di Heaviside:

Per calcolare la risposta canonica $g(\cdot)$ avendo a disposizione il modello ARMA di trasferimento, si può usare il metodo di Heaviside. Posto:

$$y_{can}(\cdot) = \frac{n(s)}{d(s)}\frac{1}{s^R} = \frac{n(s)}{s^R(s-p_1)^{q_1}(s-p_2)^{q_2}\cdots(s-p_K)^{q_K}}$$ con q_K = molteplicità del polo K.

visto che:

$y_{can}(\cdot) = G(p)U \Rightarrow$ se $\begin{cases} U = Imp(t) \to 1/s^0 \text{ è la sua trasformata di Laplace} \\ U = Sca(t) \to 1/s \quad \text{"} \\ U = Ram(t) \to 1/s^2 \quad \text{"} \end{cases}$

Th di Heaviside:

$$y_{can}(s) = \gamma_{00} + \frac{\gamma_{01}}{s} + \frac{\gamma_{02}}{s^2} + \frac{\gamma_{11}}{(s-p_1)} + \frac{\gamma_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{\gamma_{1q_1}}{(s-p_1)^{q_1}} + \dots + \frac{\gamma_{K1}}{(s-p_K)} + \dots + \frac{\gamma_{Kq_K}}{(s-p_K)^{q_K}}$$

I termini γ_{ij} si ottengono in questa maniera:

$$\frac{n(s)}{s^R(s-p_1)^{q_1}\cdots(s-p_K)^{q_K}} \equiv \gamma_{00} + \dots + \frac{\gamma_{Kq_K}}{(s-p_K)^{q_K}}$$

$\Downarrow$

Siccome la risposta all'impulso è l'antitrasformata di Laplace, nel caso continuo, della funzione di trasferimento, si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma}{(s-p)^j}\right] = \frac{\gamma t^{j-1}e^{pt}}{(j-1)!}$$

Es:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4-2s^3+2s^2-2s+1}$$, $g(\cdot)$ dell'impulso?

$\Downarrow$

Antitrasformata: $G(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-1)} + \frac{D}{(s+1)}$
$= A(s^2+1) + B(s^2+1)(s-1) + C\dots + D\dots$

Quindi:

$$\frac{s+1}{(s-1)^2(s-p_2)^{q_2}\dots} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)} + \dots \Rightarrow \dots$$

NB: Un sistema esternamente stabile $\Rightarrow g(\cdot) \to 0$

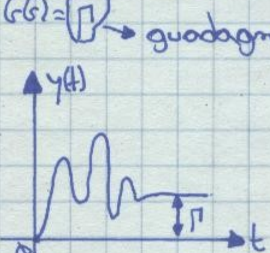
NB: Th del limite:

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \\ \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) \end{cases}$$

Si noti anche che: $Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\beta_n s^{n_b-R} + \dots + \beta_{n_b}}{\alpha_1 s^{n_b-1} + \dots + \alpha_{n_b}}$, n_b = ordine parte oss-ragg.

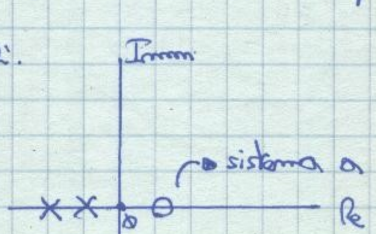
Quindi:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} Y(s) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = G(0) = \mu \to \text{guadagno.}$$



Ricordando che un sistema è a sfasamento minimo quando:

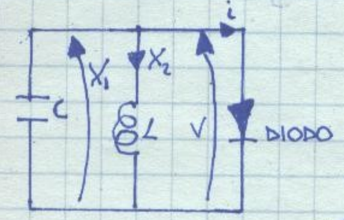
- non ci sono zeri.
- o tutti i zeri sono stabili.

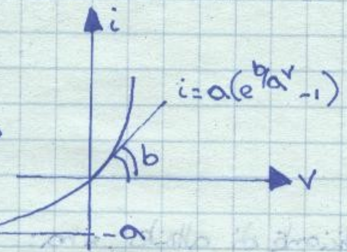


sistema a sfasamento non minimo.

* ESERCIZI SUI SISTEMI NON LINEARI E LINEARI:

1)





Verificare che il circuito non è un oscillatore per nessun valore di a, b, C e L. Studiarne il comportamento.

Legge delle correnti di Kirchhoff.

1) Equazioni di stato: NB $\rightarrow V = L\frac{di}{dt}$, $i = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow \dot{X}_1 = i/C$ e $\dot{X}_2 = V/L$. Inoltre:

$= i_1 + i_2 + X_2$

$-X_2 - i_2 = i_1$

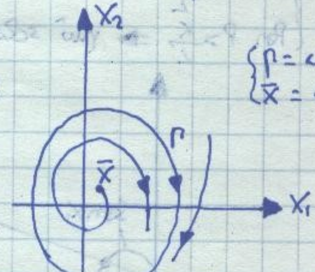
Siccome:

$V_L = X_1 \Rightarrow \dot{X}_2 = \frac{X_1}{L} = \frac{1}{L}X_1$ NB: $\boxed{V = X_1}$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{1}{C}(-X_2 - a(e^{b/a\,V} - 1)) \\ \dot{X}_2 = \frac{1}{L}X_1 \end{cases}$$

Per essere un oscillatore, il circuito dovrebbe ammettere un ciclo limite Γ stabile e un equilibrio instabile al suo interno.



$\begin{cases} \Gamma = \text{ciclo stabile.} \\ \bar{x} = \text{eq. instabile.} \end{cases}$

Ma per il teorema di Bendixon non esistono cicli limite, perché:

$$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = -b/c\; e^{b/a\,x_1}$$

$\downarrow$ sempre negativo.

NB: $\emptyset$ è uno stato di equilibrio, perché:

$\dot{X}_1 = f_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \emptyset$

$\dot{X}_2 = f_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \emptyset$

con $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \emptyset$

Si noti però che:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}=\emptyset} = \begin{bmatrix} -b/c & -1/c \\ 1/L & \emptyset \end{bmatrix}$$

Autovalori del sistema linearizzato:

$$\det\left[\lambda I - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

Quindi:

$$\left(\lambda I - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b/c & -1/c \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + b/c & -1/c \\ -\frac{1}{L} & \lambda \end{bmatrix}; \quad \det\begin{bmatrix} \lambda + b/c & -1/c \\ -\frac{1}{L} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + b/c) + \frac{1}{LC}$$

Polinomio caratteristico:

$$\Delta = \lambda^2 + \lambda b/c + \frac{1}{LC} \Rightarrow \text{Autovalori: } \lambda^2 + \lambda b/c + \frac{1}{LC} = \emptyset \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = \frac{b^2}{c^2} - 4\frac{1}{LC}$$

$$\downarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b/c \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Quindi: $\lambda_{1,2} = \frac{-b/c \pm \sqrt{b^2/c^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \Rightarrow$ L'equilibrio è un fuoco stabile se: $\frac{b^2}{c} < \frac{4}{L}$

Invece per $\frac{b^2}{c} > \frac{4}{L} \Rightarrow$ Nodo stabile. Inoltre la funzione è globalmente stabile perché:

Si noti che:

$$V = \frac{1}{2}CX_1^2 + \frac{1}{2}LX_2^2$$ che è definita positiva e $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}f_2 =$

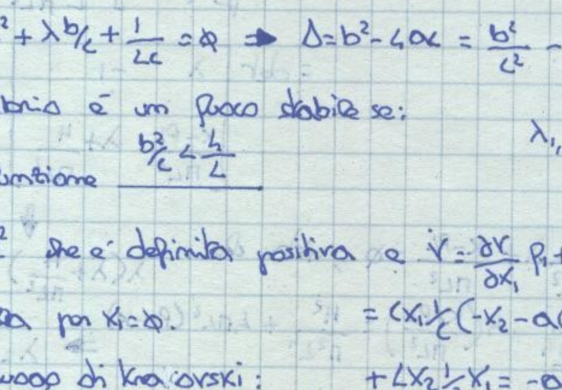
$= CX_1\frac{1}{C}(-X_2 - a(e^{b/a\,X_1} - 1)) +$

$+ LX_2\frac{1}{L}X_1 = -aX_1(e^{b/a\,X_1} - 1)$

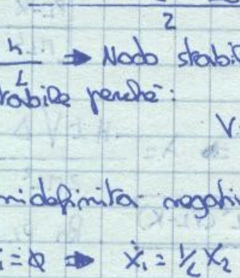
$\dot{V}$ è semidefinita negativa e si annulla per $X_1 = \emptyset$.

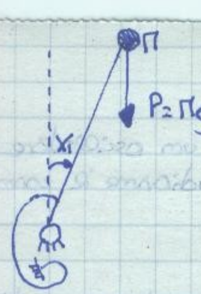
Ma:

$X_1 = \emptyset \Rightarrow \dot{X}_1 = \frac{1}{C}X_2$ e $\dot{X}_2 = \emptyset \Rightarrow$ Luogo di Krasovski:



Per il criterio di La Salle $\bar{x}$ è globalmente stabile. Comportamento circuito:



2) 

$P = \Pi g$ Si discuta la stabilità dell'asta al variare del carico $P = \Pi g$.

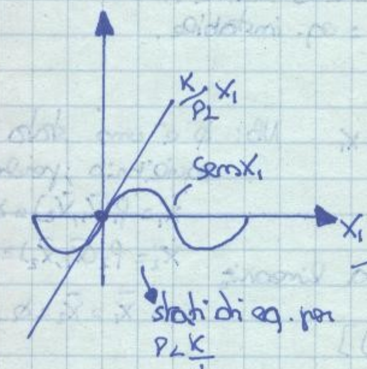
2) Sia $X_2(t)$ la velocità angolare dell'asta e H il coefficiente di attrito, si ha:

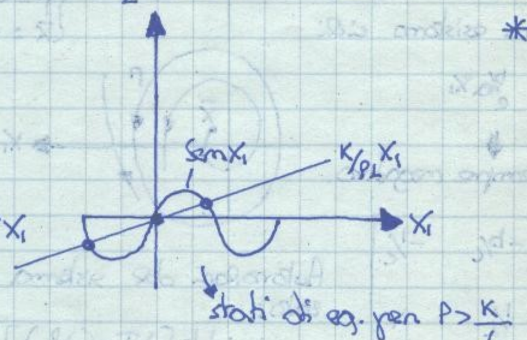
$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) = \frac{P}{\Pi L}\operatorname{sen} X_1(t) - \frac{K}{\Pi L^2} X_1(t) - \frac{H}{\Pi L^2} X_2(t) \end{cases}$$, con ΠL^2 = momento di inerzia del sistema.

Stati di equilibrio: $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0 \Rightarrow \bar{X}_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} X_1 = \frac{K}{PL} X_1$. Infatti: $\frac{P}{\Pi L}\operatorname{sen} X_1(t) - \frac{K}{\Pi L^2} X_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{P}{\Pi L}\operatorname{sen} X_1 = \frac{K}{\Pi L^2} X_1(t)$

Quindi:

$\operatorname{sen} X_1 = \frac{K}{PL} X_1$. $\begin{cases} \text{Per } P < \frac{K}{L} \Rightarrow \text{unica soluzione} \\ \text{Per } P > \frac{K}{L} \Rightarrow \text{più soluzioni isolate.} \end{cases}$





* studio stabilità nell'origine:

$$\delta \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}} \delta x$$

dove: $$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{P}{\Pi L}\cos X_1 - \frac{K}{\Pi L^2}\right) & \frac{-H}{\Pi L^2} \end{bmatrix}_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{PL-K}{\Pi L^2} & \frac{-H}{\Pi L^2} \end{bmatrix}$$

Autovalori del sistema linearizzato:

$$\det\left[\lambda I - \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right] = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{PL-K}{\Pi L^2} & \frac{-H}{\Pi L^2} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{K-PL}{\Pi L^2} & \lambda + \frac{H}{\Pi L^2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{H}{\Pi L^2}\lambda + \frac{K-PL}{\Pi L^2} = 0,$$ visto che: $$\lambda\left(\lambda + \frac{H}{\Pi L^2}\right) - 1\left(\frac{K-PL}{\Pi L^2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-H \pm \sqrt{\Delta}}{2\Pi L^2}$$ con $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = \frac{H^2}{\Pi^2 L^4} - 4\left(\frac{K-PL}{\Pi L^2}\right) = \frac{H^2}{\Pi^2 L^4} + 4\Pi L^2 (PL-K)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 + 4\Pi L^2 (PL-K)}}{2\Pi L^2}$$. Per $P < \frac{K}{L} \rightarrow$ autovalori con parte reale neg.

Per $P > \frac{K}{L} \rightarrow$ 1 autov. positivo.

Dunque per $P < \frac{K}{L}$ l'equilibrio considerato è asintoticamente stabile, mentre per $P > \frac{K}{L}$ è instabile. NB: $\frac{K}{L}$ viene detto CARICO CRITICO.

3) $$\begin{cases} \dot{X}_1 = -X_1 - X_1^2 X_2^2 \\ \dot{X}_2 = X_1 + X_2 \end{cases}$$ dimostrare che non ammette cicli che contengano l'origine.

3) Il criterio di Bendixon non fornisce informazioni in quanto:

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_1x_2^2$, ha il segno di x_1 che varia nel ciclo contenente l'origine.

Poniamo:

$$\dot x_1=\dot x_2=0 \Rightarrow -x_1=x_2 \Rightarrow x_2-x_2^4=0 \begin{cases} x_2=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \text{stati di equilibrio: } \bar x^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \bar x^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

È possibile linearizzare nell'intorno dell'origine il sistema:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar x=0}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\bar x=0}=\begin{bmatrix}-1-2x_1x_2^2 & -2x_2x_1^2\\ 1 & 1\end{bmatrix}_{\bar x=0}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$ → NB: la matrice è in forma triangolare e quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale.

Quindi $\lambda=-1$, $\lambda=1$ ⇒ l'origine è una sella. Ricordando che un ciclo deve contenere un numero dispari di equilibri, non esistono cicli contenenti selle.

b)

Descrivere il sistema e dire se ammette stati di equilibrio per $u=\bar u\neq 0$.

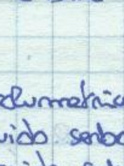
DATI:

u = portata volumetrica di ingresso
x_1 = livello liquido serbatoio 1
x_2 = livello liquido serbatoio 2
x_3 = livello liquido serbatoio 3
y = volume totale di liquido immagazzinato nei serbatoi.

b) Stato generico del sistema:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Facciamo il bilancio volumetrico su ogni serbatoio:



$\dot x = u - y \Rightarrow \dot x$ = Ingresso − uscita

$$\begin{cases}\dot x_1=\frac{u}{2}-k_1x_1\\ \dot x_2=\frac{u}{2}-k_2x_2\\ \dot x_3=x_1+x_2+x_3\end{cases}$$

Equazioni di stato:

$\dot x_1=\frac{u}{2}-k_1x_1$

$\dot x_2=\frac{u}{2}-k_2x_2$

$\dot x_3=k_1x_1+k_2x_2$

$y(t)=(x_1(t)+x_2(t)+x_3(t))$

Siccome il sistema è lineare e continuo si ha: $\begin{cases}\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=\end{cases}$

Quindi:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + b\,u(t) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0\\ 0 & -k_2 & 0\\ k_1 & k_2 & 0\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

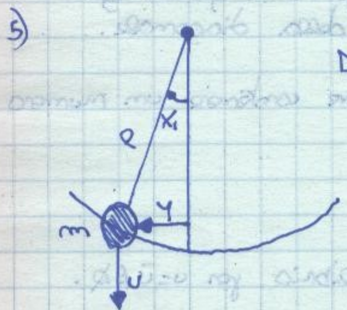
$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Per $u = \bar{u} \neq 0$ si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \dfrac{\bar{u}}{2k_1}\\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = \dfrac{\bar{u}}{2k_2}\end{cases} \Rightarrow \text{sostituiti nella terza equazione di stato non si ha } \dot{x}_3 = 0$$

Quindi per $u = \bar{u} \neq 0$ non esistono stati di equilibrio.

5)



Descrivere il pendolo e linearizzarlo nell'intorno dell'equilibrio:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}$$

DATI: $x_1(t)$ = Posizione angolare
$x_2(t)$ = Velocità angolare
$y(t)$ = distanza della massa m dall'asse verticale
$u(t)$ = forza applicata alla massa m.

NB: $\underline{\bar{u} = mg}$.

5) Equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{u\,\mathrm{sen}\,x_1(t)}{ml}\end{cases}, \quad y(t) = l\,\mathrm{sen}\,x_1$$

. Infatti $x_2(t) = \text{vel.}$, $\dot{x}_2(t) = \text{accelerazione}$. Per la legge di Newton si ha: $F = m\cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

Quindi:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{F}{m} = \frac{u\,\mathrm{sen}\,x_1(t)}{l}\Big/ m = \frac{u\,\mathrm{sen}\,x_1(t)}{ml}$$

Il sistema dato non è lineare quindi:

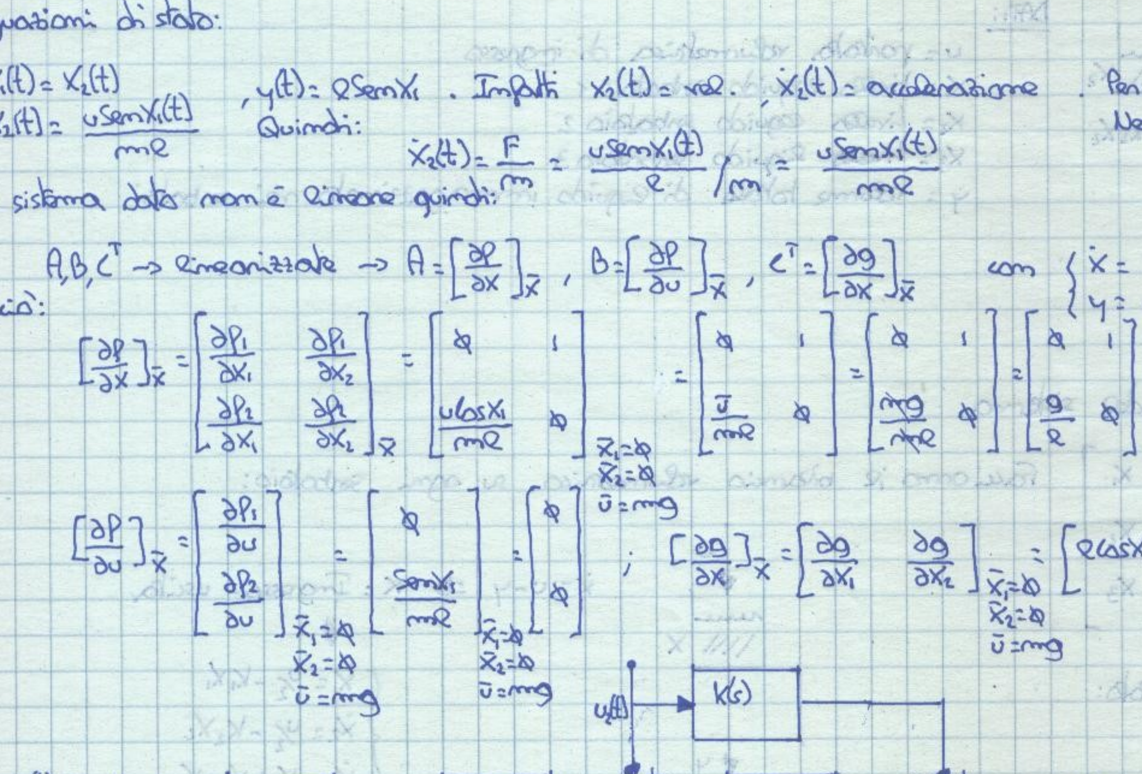
$$A, B, C^T \to \text{linearizzate} \to A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}}, \quad B = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\bar{x}}, \quad C^T = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{\bar{x}} \quad \text{con } \begin{cases}\dot{x} = f(x,u)\\ y = g(x)\end{cases}$$

Perciò:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ \dfrac{u\cos x_1}{ml} & 0\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}_1 = 0\\ \bar{x}_2 = 0\\ \bar{u} = mg}} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ \dfrac{\bar{u}}{ml} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ \dfrac{mg}{ml} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ \dfrac{g}{l} & 0\end{bmatrix};$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}_1 = 0\\ \bar{x}_2 = 0\\ \bar{u} = mg}} = \begin{bmatrix} 0\\ \dfrac{\mathrm{sen}\,x_1}{ml}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}_1 = 0\\ \bar{x}_2 = 0\\ \bar{u} = mg}} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}; \quad \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}_1 = 0\\ \bar{x}_2 = 0\\ \bar{u} = mg}} = \begin{bmatrix} l\cos x_1 & 0\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}_1 = 0\\ \bar{x}_2 = 0\\ \bar{u} = mg}} = \begin{bmatrix} l & 0\end{bmatrix}$$

6)



$$\begin{cases} Y(s)/U_1(s) \;?\\ Y(s)/U_2(s) \;?\end{cases}$$

6) Utilizziamo la formula di Mason: $G_{TOT}(s) = \dfrac{\sum_k C_k D_k}{D}$

con:

$$D(p) = 1 - \sum_i L_i + \sum_i \sum_j L_i L_j + \dots \quad , \; C_K = F(s)G(s)H(s) \rightarrow$$ in quanto è il guadagno del cammino diretto.

Tra l'uscita y e l'ingresso u_1 sono presenti due anelli di trasmittenza che sono:

$$\begin{cases} L_1 = -F(s)G(s)H(s)J(s) \\ L_2 = -F(s) \end{cases}$$ Si noti che non ci sono anelli disgiunti "dall'anello" del cammino diretto.

Quindi:

$$\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{F(s)G(s)H(s)}{1 - L_1(s) - L_2(s)} = \frac{F(s)G(s)H(s)}{1 + F(s) + F(s)\,(s)H(s)J(s)}$$

Analogamente per $Y(s)/U_2(s)$.

$$\begin{cases} C_1 = K(s) \\ C_2 = H(s) \end{cases}, \quad D(p) = 1 - L_1(s) - L_2(s).$$ Si noti però che il secondo cammino ($\underline{L_2(s)}$) tocca il secondo cammino diretto perciò:

$$\frac{Y(s)}{U_2(s)} = \frac{C_1(s)D_1(s) + C_2(s)D_2(s)}{D(s)} \; ; \; \text{con} \begin{cases} D_1(s) = 1 - L_1(s) - L_2(s) \\ D_2(s) = 1 - L_1(s) \end{cases}$$ i rispettivi determinanti ridotti.

Perciò:

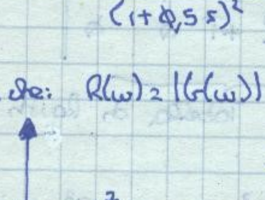
$$\frac{Y(s)}{U_2(s)} = C_1(s) + \frac{C_2(s)D_2(s)}{D(s)} = K(s) + \frac{H(s)(1+F(s))}{1 + F(s) + F(s)G(s)H(s)J(s)}$$

7) Sia:

$$G(s) = \frac{10s}{(1+0{,}5s)^2}$$ Determinare sinusoide corrispondente a $u(t) = 4\,\mathrm{sen}(2t + \frac{\pi}{4})$.

7) Si sa che: $R(\omega) = |G(\omega)|$ e $\varphi(\omega) = \arg(G(\omega))$. Siccome:
- $z = x + iy$ (forma algebrica di un numero complesso)

NB:



$$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

- $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ (forma trigonometrica di un numero complesso).
- $z = \rho e^{i\theta}$ (forma esponenziale di un numero complesso).

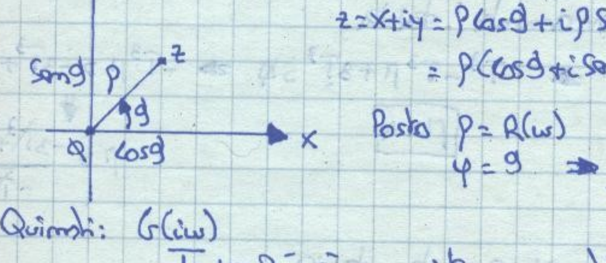
Posto $\rho = R(\omega)$, $\varphi = \theta \Rightarrow \underline{G(s) = R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}}$

Quindi: $\underline{G(i\omega)}$ perché è un sistema continuo. $G(i\omega) = \frac{10 i\omega}{(1+0{,}5i\omega)^2} \Rightarrow R(\omega) = \frac{10}{1+0{,}25\omega^2}$

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, 0{,}5\omega$. La sinusoide di ingresso ha pulsazione $\underline{\omega = 2}$. Pertanto: $y(t) = R(2)\,4\,\mathrm{sen}(2t + \frac{\pi}{4} + \varphi(2))$

Poiché $R(2) = 10$ e $\varphi(2) = 0 \Rightarrow y(t) = 4 \cdot 10\,\mathrm{sen}(2t + \pi/4) = 40\,\mathrm{sen}(2t + \pi/4)$.

8)



Per quali valori di Π_1, Π_2, Π_3 il sistema è esternamente stabile?

8) Un sistema è esternamente stabile quando i poli hanno parte reale negativa.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{\Pi_1}{1+sT} \cdot \frac{\Pi_2}{1+sT}}{1 + \frac{\Pi_1}{1+sT}\frac{\Pi_2}{1+sT}\frac{\Pi_3}{1+sT}} = \frac{\frac{\Pi_1\Pi_2}{(1+sT)^2}}{1 + \Pi_1\Pi_2\Pi_3/(1+sT)^3} = \frac{\Pi_1\Pi_2(1+sT)}{(1+sT)^3 + \Pi}$$ ($\Pi = \Pi_1\Pi_2\Pi_3$ guadagno di anello).

Bisogna verificare il segno delle radici del polinomio a denominatore:

$\Delta(s) = (1+sT)^3 + \mu = T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + \mu$. Posto $\Delta(s) = d_0 s^3 + \dots + d_3$ si applica il metodo di Routh:

$\Delta(s) = d_0 t^m + \dots + d_m \Rightarrow$ Tabella di Routh:

$$\begin{matrix} d_0 & d_2 & \dots & d_m \\ d_1 & d_3 & \dots & 0 \\ ? & ? & & \\ & & & \vdots \end{matrix}$$

? è l'elemento da trovare. Basta fare:

$$\begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & \dots \\ R_{10} & R_{11} & \dots \\ & \vdots & \\ & & \end{bmatrix}, \quad R_{i+1,j} = -\frac{1}{R_{i0}} \det|*|$$

con $* = \begin{vmatrix} R_{i-1,0} & R_{i-1,j+1} \\ R_{i0} & R_{i,j+1} \end{vmatrix} \Rightarrow ? \equiv R_{3,0} \Rightarrow R_{3,0} = -\frac{1}{R_{2,0}} \det \begin{vmatrix} R_{1,0} & R_{1,1} \\ R_{2,0} & R_{2,1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{d_1} \det \begin{vmatrix} d_0 & d_2 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{d_1}(d_0 d_3 - d_2 d_1)$.

Quindi:

$$\begin{vmatrix} T^3 & 3T & 0 \\ 3T^2 & 1+\mu & 0 \\ ? & ? & ? \end{vmatrix} \quad ? \to X_1, \; ? \to X_2, \; ? \to X_3$$

NB: La tabella di Routh ha le dimensioni degli d.

$$X_1 = -\frac{1}{3T^2} \det \begin{vmatrix} T^3 & 3T \\ 3T^2 & 1+\mu \end{vmatrix} = -\frac{1}{3T^2}(T^3 + T^3\mu - 3T \cdot 3T^2) = -\frac{T^3}{3T^2} - \frac{T^3\mu}{3T^2} + \frac{T\cancel{T^2}}{\cancel{T^2}}$$

$$X_1 = \frac{-T^3 - T^3\mu}{3T^2} + T$$

$$X_2 = -\frac{1}{1+\mu} \det \begin{vmatrix} 3T & 0 \\ 1+\mu & 0 \end{vmatrix} = 2 \to -\frac{1}{1+\mu}(0-0) = 0 \qquad X_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} T^3 & 3T & 0 \\ 3T^2 & 1+\mu & 0 \\ \frac{-T^3-T^3\mu}{3T^2} + T & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Tabella di Routh}}$$

Perché il sistema sia asintoticamente stabile è che:

$$\left\{ T^3, \; 3T^2, \; \frac{-T^3 - T^3\mu}{3T^2} + T \right\} > 0 \Rightarrow \text{Per } \mu < 2 \text{ il sistema è esternamente stabile.}$$

NB: $\frac{-T^3 - T^3\mu + 3T^3}{3T^2} > 0 \Rightarrow -T^3 - T^3\mu + 3T^3 > 0 \Rightarrow -T^3\mu > -3T^3 + T^3$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu < 2} \qquad \mu > \frac{-3\cancel{T^3} + \cancel{T^3}}{-\cancel{T^3}}$$

9) Si dimostri che nel sistema

$$\dot{X}_1 = -X_1 + 2X_2$$
$$\dot{X}_2 = -2X_1 - X_2 - X_2^3$$

l'origine è un'equilibrio globalmente stabile.

9) L'origine è un punto di equilibrio. Infatti: $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -X_1 + 2X_2 = 0 \\ -2X_1 - X_2 - X_2^3 = 0 \end{cases}$ per $\underline{X_1 = X_2 = 0}$

Inoltre:

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + d X_2^2)$. def. positiva. $\underline{(d > 0)}$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial X_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial X_2} f_2 = X_1(-X_1 + 2X_2) + dX_2(-2X_1 - X_2 - X_2^3) = -X_1^2 - dX_2^2(1+X_2^2) + 2(1-d)X_1X_2$$

Per $d = 1 \Rightarrow \dot{V} = -X_1^2 - X_2^2(1+X_2^2)$ è def. negativa e quindi prova la stabilità nell'origine.

10)

Descrivere il sistema, privo di attrito, e tracciare le traiettorie per $u = \bar{u}$.

10) Posto X_1 = posizione e X_2 = velocità. $\Rightarrow \dot{X}_1 = X_2$, $\dot{X}_2 = \frac{1}{m}(F)$ dove $F = m \cdot a$ e $F = \underline{F_{ris}}$ ← forza risultante

$\underline{u - F_e = 0} \Rightarrow$ eq. statico $\Rightarrow \underline{F_e = u}$. Siccome $F_e = kX_1 \Rightarrow \dot{X}_2 = \frac{1}{m}(u - k_1X_1)$

$\Downarrow$

Quindi:

$$\begin{cases}\dot X_1 = X_2\\ \dot X_2 = \frac{1}{m}(u - kX_1)\end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{k}{m}&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix},\quad C^T=[1\ \ 0]$$ in quanto $\underline{y = X_1}$.

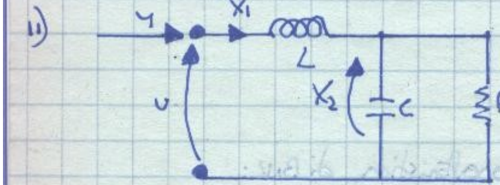
Dunque:

$u=\bar u \Rightarrow \dot X_1 = \dot X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 0$ e $u - kX_1 = 0 \Rightarrow u = kX_1 \Rightarrow \bar u/k = X_1 \Rightarrow \bar X = \begin{bmatrix}\bar u/k\\ 0\end{bmatrix}$

con attrito $\Rightarrow$ il movimento è smorzato.

NB: $\dot X_1 > 0$ per $X_2 > 0$
$X_2 < 0 \Rightarrow \dot X_1 < 0$

11)



Determinare banda passante nell'ipotesi che R, L, C soddisfano: $\boxed{4R^2\frac{C}{L} < 1}$.

NB: $\underline{y = X_1}$.

11) Induttore: $V = L\frac{di}{dt}$, $i = C\frac{dv}{dt}$ → per il condensatore. $\Rightarrow \dot X_1 = \frac{V}{L} = \frac{1}{L}V = \frac{1}{L}(u - X_2(t))$

$\frac{dv}{dt} = \dot V_C = \frac{1}{C} i = \frac{1}{C} i_C$ con $i_C = X_1 - \frac{X_2}{R}$ in quanto:

X_2 C R V_R $\quad X_2 = V_R \Rightarrow X_R = \frac{V_R}{R}$

Quindi: $\begin{cases}\dot X_1 = \frac{1}{L}(u - X_2(t))\\ \dot X_2 = \left(X_1(t) - \frac{X_2(t)}{R}\right)/C\end{cases}$. Siccome per Laplace:

$\begin{cases} sLX_1(s) = u(s) - X_2(s)\\ sCX_2(s) = X_1(s) - \frac{X_2(s)}{R}\end{cases} \Rightarrow X_2(s) = u(s) - sLX_1(s)$

$\Downarrow$

$sC(u(s) - sLX_1(s)) = X_1(s) - \frac{u(s) - sLX_1(s)}{R}$

legge delle correnti: $X_1 = i_C + X_R = i_C + \frac{X_2}{R}$

$\Downarrow$

$X_1 - \frac{X_2}{R} = i_C$

Ra: $\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}\,\frac{RCs+1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$

con $X_1(s) = y(s) \Rightarrow sC(u(s) - sLy(s)) = y(s) - \frac{u(s) - sLy(s)}{R} \Rightarrow y(s) - \frac{sLy(s)}{R} + s^2Ly(s)C = Cs\,U(s) + \frac{u(s)}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(s)\left(1 + s^2LC - \frac{sL}{R}\right) = sCu(s) + \frac{u(s)}{R} \Rightarrow y(s) = \underbrace{\frac{sCu(s) + u(s)/R}{\left(1 + s^2LC - \frac{sL}{R}\right)}}_{u(s)\left(sC + \frac{1}{R}\right) = u(s)\left(\frac{sCR+1}{R}\right) \Rightarrow \frac{1}{R}(sCR+1)u(s)} \Rightarrow \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}\,\frac{RCs+1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$

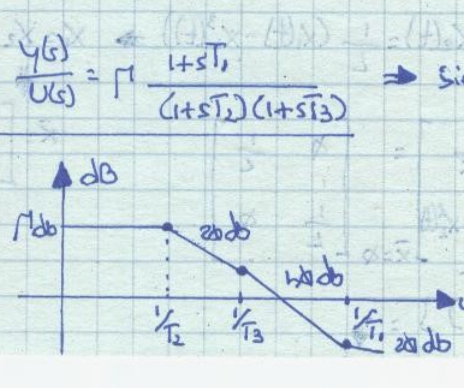
Si può anche scrivere:

$$\mu = \frac{1}{R},\quad T_1 = RC,\quad T_2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R}\left(1 + \sqrt{1 - 4R^2\frac{C}{L}}\right),\quad T_3 = \frac{1}{2}\frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - 4R^2\frac{C}{L}}\right)$$

Perciò:

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \mu\,\frac{1+sT_1}{(1+sT_2)(1+sT_3)}$$ $\Rightarrow$ Siccome: $4R^2\frac{C}{L} < 1 \Rightarrow R^2C < \frac{1}{4}L \Rightarrow T_1 < T_2$ e $T_2 > T_3$

Quindi:



$R(\omega) = |G(i\omega)| = |\mu|\,\frac{|1+sT_1|}{|1+sT_2|\,|1+sT_3|} = |\mu|\,\frac{|1+i\omega T_1|}{|1+i\omega T_2|\,|1+i\omega T_3|}$

$= |\mu|_{db} + |1+sT_1|_{db} - \left(|1+sT_2| * |1+sT_3|\right)_{db}$

$\Downarrow$

$$20\log_{10}\sqrt{10}\,db + 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T_1^2} - \left(20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T_2^2}\ 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T_3^2}\right)$$

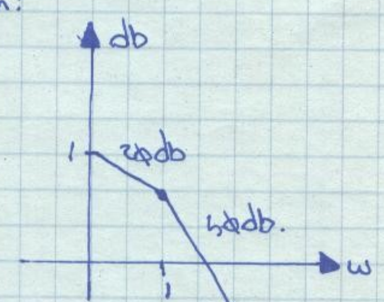
NB: $20\log_{10}\omega^4 = 20\cdot 4\log_{10}\omega$

12) Disegnare il diagramma di Bode della seguente funzione di trasferimento:

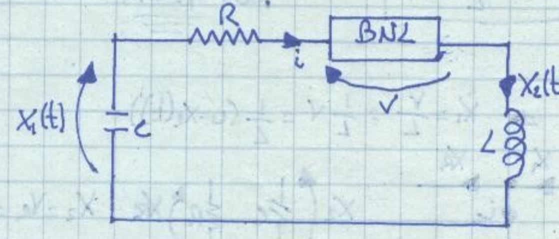
$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)}$$

12)
$$R(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{10^2} - \left(20\log_{10}\sqrt{\omega^2} + 20\log_{10}\sqrt{\omega^4}\right) = 1 - \left(20\log_{10}\omega + 20\log_{10}\omega^2\right) = 1 - 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\omega^2 = 1 - 20\log_{10}\omega - 40\log_{10}\omega.$$

Quindi:

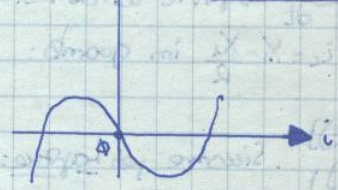


13) Verificare gli equilibri del seguente sistema elettrico:

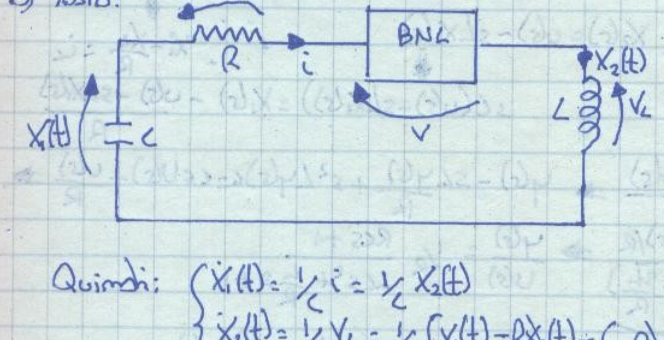


Caratteristica di BNL:

$$V_2 - Ri + i^3$$



13) Posto:



Legge di Kirchoff delle tensioni:

$$X_1(t) - V_R - V - V_L = 0 \Rightarrow X_1(t) = V_R + V + V_L$$

Legge del condensatore: $i = C\frac{dV}{dt} = C\frac{dX_1(t)}{dt} = C\dot{X}_1(t)$

Legge dell'induttore:

$$V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{dX_2(t)}{dt} = L\dot{X}_2(t)$$

NB: $V_L = X_1(t) - V_R - V = X_1(t) - RX_2(t) - V = X_1(t) - RX_2(t) - (-RX_2(t) + X_2(t)^3)$

Quindi:
$$\begin{cases}\dot{X}_1(t) = \frac{1}{C}i = \frac{1}{C}X_2(t)\\ \dot{X}_2(t) = \frac{1}{L}V_L = \frac{1}{L}\left[X_1(t) - \cancel{RX_2(t)} - (-\cancel{RX_2(t)} + X_2^3(t))\right]\end{cases}$$
$$= \frac{1}{L}(X_1(t) - X_2^3(t))$$

Calcoliamo gli stati di equilibrio: $\dot{X}_1 = 0 = \dot{X}_L \Rightarrow \frac{1}{C}X_2(t) = \frac{1}{L}(X_1(t) - X_2^3(t)) \Rightarrow X_1 = X_2 = 0$

$$\Downarrow$$

Quindi:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{3}{L}X_2^2(t)\end{bmatrix}_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & 0\end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

NB: $\begin{cases}f_1 = \frac{1}{C}X_2(t)\\ f_2 = \frac{1}{L}(X_1(t) - X_2^3(t))\end{cases}$

Autovalori: $\det\left[\lambda I - \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^{\bar{x}}\right] = $ ↓

$$\det[\lambda I - J] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow x^0 \text{ di dimensione } 2.$$

Pertanto si utilizza il criterio di Liapunov:

$$V = \frac{1}{2}Cx_1^2(t) + \frac{1}{2}Lx_2^2(t) \Rightarrow \dot{V} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = -Cx_1\frac{1}{C}x_2 + Lx_2\frac{1}{L}(x_1 - x_2^3) = -x_2^4$$

L'energia è sempre decrescente nel tempo, e quindi $\dot{V} < 0$. Quindi lo stato del sistema tende verso l'equilibrio il quale è ovviamente stabile asintoticamente. Si noti che $x_2 = 0$ e $\dot{x}_2 = \frac{x_1}{L} \neq 0 \Rightarrow$ traiettorie attraversano l'asse $x_2 = 0$.

14) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + (u-1)^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + x_2^2 \end{cases}$ Dimostrare che l'origine è uno stato di equilibrio per $u = \bar{u} = 1$ asintoticamente stabile ma non globalmente stabile. Determinare una regione della regione di asintotica stabilità.

14) Posto: $u = 1 = \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ per $x_1 = x_2 = 0$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{\bar{x}=0} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - J] = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+1) - 4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda + \lambda + 1 + 4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dots$$

Quindi:

$\lambda = -1 \pm i2 \Rightarrow$ origine è asintoticamente stabile (fuoco stabile).

Per $u = \bar{u} = 1 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

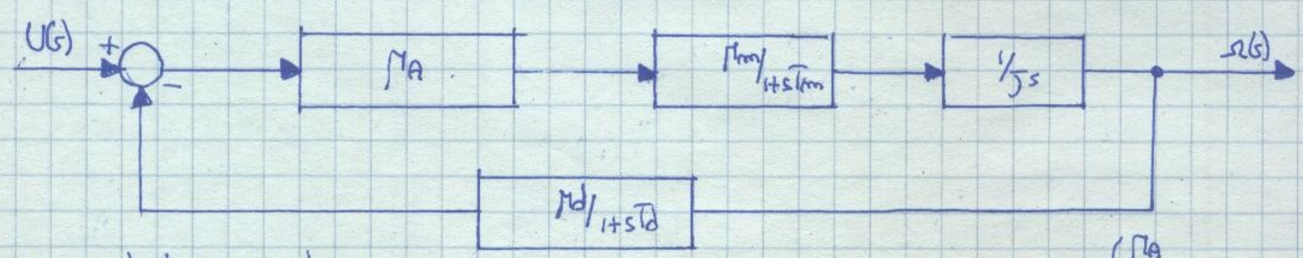
$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ l'origine non è globalmente stabile. Inoltre:

Per trovare una sottoregione della regione di asintotica stabilità si usa LaSalle, e poi il criterio di Liapunov.

15) 

Per quali μ dell'amplificatore il sistema è stabile?

Mostrare inoltre che

15) 

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{\mu_A \mu_m}{J} \frac{1}{s(1+sT_m)}}{\quad ?}$$

$\begin{cases} \mu_A \\ \mu_m/1+sT_m \\ 1/Js \\ \mu_d/1+sT_d \end{cases} \rightarrow$ NOTI:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{\mu_A \mu_m}{J}\,\dfrac{1}{s(1+sT_m)}}{1+\dfrac{\mu_A \mu_m \mu_d}{J}\,\dfrac{1}{s(1+sT_m)(1+sT_d)}} = \frac{\dfrac{\mu_A \mu_m}{J}(1+sT_d)}{s(1+sT_m)(1+sT_d)+K}$$

$$K = \frac{\mu_A \mu_m \mu_d}{J}$$

Il sistema è stabile quando i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativi, quindi:

$$\Delta(s) = s(1+sT_m)(1+sT_d)+K = T_m T_d s^3 + (T_m + T_d)s^2 + s + K$$

Il sistema è esternamente stabile purché il guadagno μ del sistema non sia troppo elevato.

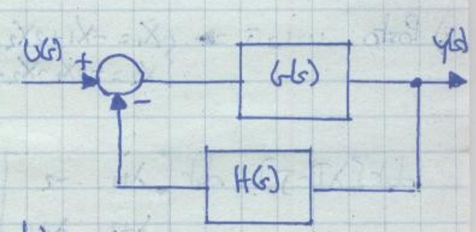
$$\mu_A < \frac{J}{\mu_m \mu_d}\,\frac{T_m + T_d}{T_m T_d}$$

Si noti che:

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \left|\frac{Y(i\omega)}{U(i\omega)}\right| \Rightarrow \frac{|G(i\omega)|}{|1+G(i\omega)H(i\omega)|} =$$

Proprietà dei diagrammi di Bode:

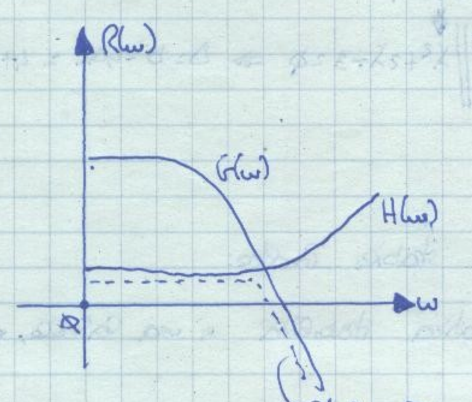
Graficamente:



$$= \begin{cases} |G(i\omega)| & \text{se } |G(i\omega)| < \left|\dfrac{1}{H(i\omega)}\right| \\ \left|\dfrac{1}{H(i\omega)}\right| & \text{se } |G(i\omega)| > \left|\dfrac{1}{H(i\omega)}\right| \end{cases}$$

$$R(\omega) = \min\left(|G(i\omega)|, \left|\frac{1}{H(i\omega)}\right|\right).$$

Quindi:



$$R(\omega) = \min\left(G(\omega), \tfrac{1}{H(\omega)}\right).$$