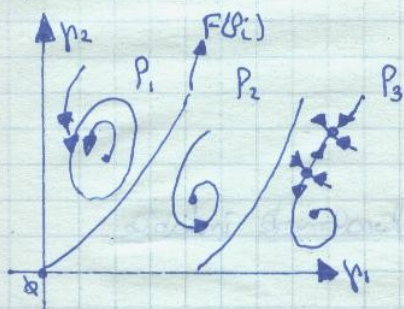


* STABILITÀ STRUTTURALE:

La stabilità strutturale studia le componenti asintotiche di una famiglia di sistemi non lineari:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p)$$

cioè dipendenti da un parametro p , con $p = [p_1 \dots p_k]^T$. Grazie alla stabilità strutturale si vede come possono trasformarsi gli elementi dinamici di un sistema (cioè cicli, attrattori, ...), mutando di poco il parametro p . Graficamente si fa uso del DIAGRAMMA DI BIForcazione nello spazio (p_1, p_2) .



Nella regione P_i il sistema funziona da oscillatore.

Sia:

$\bar{p} \in P_i \Rightarrow x = f(x, \bar{p})$ è strutturalmente stabile

$\bar{p} \in F(P_i) \Rightarrow \bar{x} = f(x, \bar{p})$ non è strutturalmente stabile.

dove: $F(P_i) =$ frontiera di P_i $\forall x \in F(P_i) \Rightarrow I(x) =$ punti di biforcazione.

Insieme degli x .

Per ottenere una biforcazione è necessario perturbare p fino ad ottenere la collisione tra equilibri o varietà prima disgiunte. Si ha una BIFORCAZIONE LOCALE quando si ha la collisione tra equilibri, cicli e tori. Essa è ricettabile dagli autovalori degli jacobiani relativi a equilibri, cicli, a tori vicini alla collisione. Es:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(p) \\ \bar{x}_2(p) \end{cases} \text{ due eq. } \Rightarrow \text{ per } p \rightarrow p^* \text{ vanno in collisione} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_1(t) = J_1 \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) = J_2 \delta x_2(t) \end{cases}$$

NB: Nel processo di linearizzazione si ha:

$$y = f(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} (x - \bar{x}), \text{ e quindi: } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x})$$

Ponendo:

$$\begin{cases} \delta u(t) = u(t) - \bar{u} \\ \delta x(t) = x(t) - \bar{x} \\ \delta y(t) = y(t) - \bar{y} \end{cases} \Rightarrow \delta \dot{x}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t) + \dots$$

Quindi: $J_1 \delta x_1(t) = 0$ per $J_1 = 0$, perché $\delta x_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1 \neq 0$

Più precisamente:

$$\delta x(p) = x_1(p) - \bar{x}_1(p), \text{ ma al variare di } p \Rightarrow x_1 \text{ varia e } \underline{x_1(p) - \bar{x}_1(p)} > 0.$$

Tutto ciò implica che un autovale di J tende a zero per $p \rightarrow p^*$. Quindi:

$\lambda \rightarrow 0 \equiv \lambda \rightarrow$ asse immaginario. L'asse immaginario è la frontiera di stabilità. Questo vale nei sistemi continui, mentre nei sistemi discreti la frontiera di stabilità è la circonferenza di raggio unitario.

Es:



$$p = p^* \Rightarrow \begin{cases} J(\bar{x}_1) \geq 1 \text{ (cioè instabile)} \\ J(\bar{x}_2) \leq 1 \text{ (cioè stabile)} \end{cases}$$

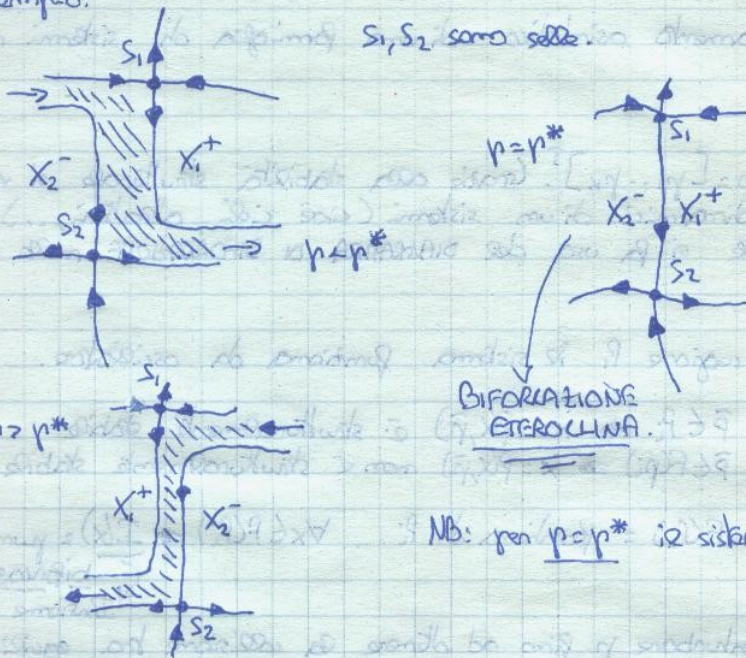
$$\text{In } p = p^* \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ con } \begin{cases} \lambda_1: \text{autovale di } J_1 \\ \lambda_2: \text{ " di } J_2 \end{cases}$$

coincide con l'autovale di J .

NB: $\left[\frac{\partial f}{\partial p} \right]_{\bar{x}} = m-1$ autovale con $m =$ ordine del sist. Nel nostro caso: $m=2 \Rightarrow 2-1=1$

Invece le biforcazioni globali non sono ricettabili dagli autovalori dello jacobiano.

Ad esempio:



S_1, S_2 sono selde.

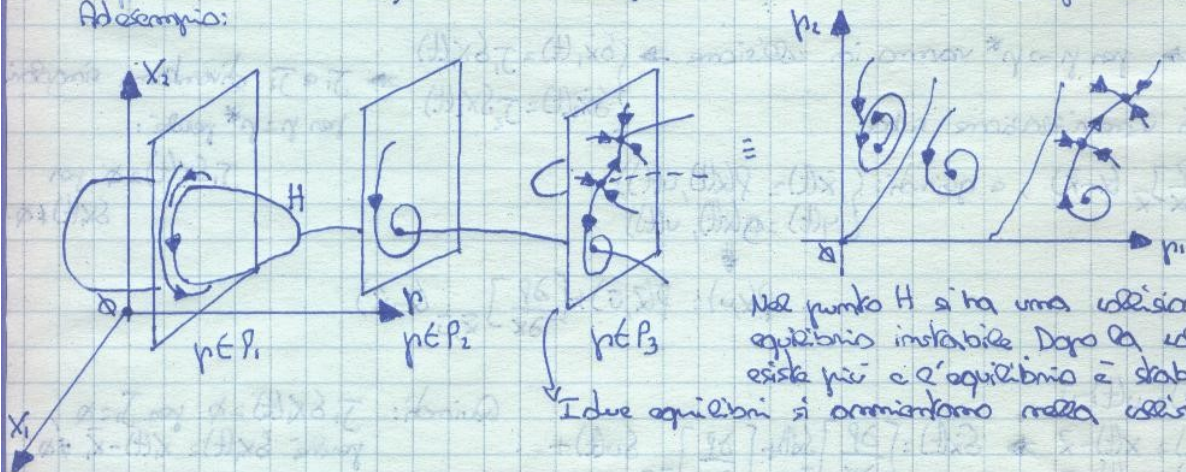
Una delle due semiorbita stabili (di S_2) entra in collisione con l'altra semiorbita instabile (di S_1) → BIFURCAZIONE GLOBALE.

BIFURCAZIONE ETEROCLINA.

NB: per $p=p^*$ il sistema è strutturalmente instabile.

Questo metodo è comodo perché non ci sono strani attrattori e lami e quindi è possibile rappresentare ciò a equilibri su uno spazio tridimensionale (x_1, x_2, p) dello spazio di controllo.

Ad esempio:



Nel punto H si ha una collisione tra cui stabile ed equilibrio instabile. Dopo la collisione il ciclo non esiste più e l'equilibrio è stabile.

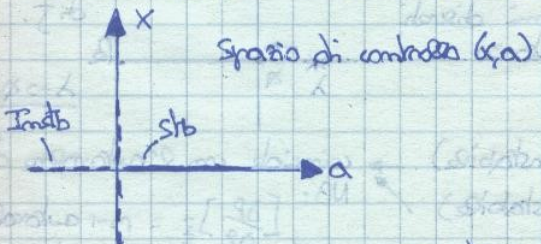
I due equilibri si annichiscono nella collisione.

Vediamo le biforcazioni locali più semplici: (collisione tra equilibri).

1) SCAMBIO DI STABILITÀ: $\dot{x} = p - x^2$ con p parametro costante

Studiamo gli equilibri: $\dot{x} = 0$ per $x=0$ o $x=p \Rightarrow$

NB: $\dot{x} = ax(t) \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow$ stab.
 $(a < 0 \Rightarrow$ Instab.



Spazio di controllo (x, a) .

* Analogamente:

$$(p-x)\dot{x} = p \Rightarrow p-2x = \lambda$$

$$\lambda = -p \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p < 0 \\ \lambda < 0 & \text{per } p > 0 \end{cases}$$

Punto di biforcazione.

Similmente:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = p-2x \text{ e } (p-2x) : \det \left[\lambda I - \frac{\partial f}{\partial x} \right]; \text{ In questo caso:}$$

$$\text{Per } x=0 \Rightarrow (p-2x)\dot{x} = p \Rightarrow \lambda = p \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p > 0 \\ \lambda < 0 & \text{per } p < 0 \end{cases} *$$

- la biforcazione di scambio stabilità è non catastrofica
 - " " " " modo- sella è catastrofica
 - " " " " purezza non è catastrofica
- Vediamo altre biforcazioni locali:

6) BIFURCATION N MAP:

Spiega come un ciclo possa nascere per trasformazione continua di un equilibrio al variare del parametro p .



Nella prima, un ω asintoticamente stabile ha al suo interno un punto instabile.
Forma normale:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= pX_1 + wX_2 + cX_1(X_1^2 + X_2^2) \\ \dot{X}_2 &= -wX_1 + pX_2 + cX_2(X_1^2 + X_2^2) \end{aligned} \Rightarrow \text{Im coordmate polni: } \begin{cases} \dot{p} = p\rho + c\rho^3 \\ \dot{\vartheta} = w \end{cases}$$

Si moltiplica: $\dot{p} = \alpha \Rightarrow p = \alpha$ oppure $p = \sqrt{-p_c}$. Infatti: $p(p + cp^2) = \alpha \Rightarrow p + cp^2 = \alpha$, $\Delta = b^2 - 4ac$
 Si moltiplica p e c sono discorsi di segno e quindi: $\Delta = b^2 - 4ac$
 Infatti: $p + cp^2 = \alpha \Rightarrow p^2 + \frac{1}{c}p - \frac{\alpha}{c} = 0$, $\Delta = \left(\frac{1}{c}\right)^2 + 4\frac{\alpha}{c}$

Imolare per $p = p^* = 0$ si ha:

$$J = \begin{bmatrix} r & w \\ -w & r \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = r \pm iw \quad \begin{matrix} \nearrow \text{Im} \\ \nearrow \text{Re} \end{matrix}$$

Attraversiamo l'asse immaginario al valore di y .

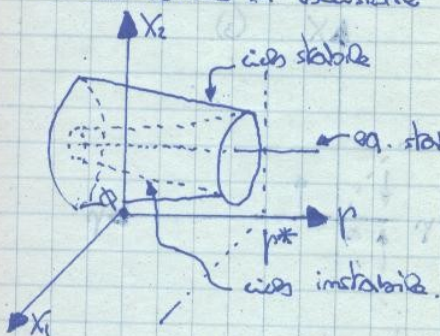
Per trovare il periodo dei dati:

$$\omega_H = \sqrt{\det \tilde{f}(p^*)}$$

Si ricordi che per $p=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$ $\Rightarrow$ utilizzo criterio di Routhur per determinare se σ_c è stabile o instabile.

5) BIForcazione TANGENTE.

Due cidi vanno in collisione e variano del perimetro.



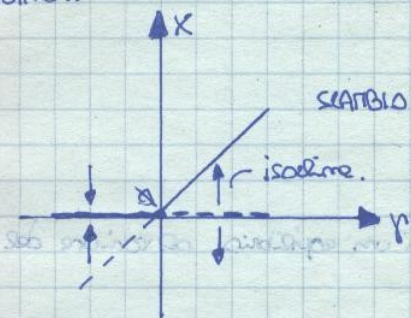
Simili a in questo caso i due cieli non nascono degnari in
ompietia e in frequentia.

Per: $p \leq p^*$ un og. stabile è circondato da due altri, uno instabile e 2 altri stabili.

$p = p^* \Rightarrow$ i due cicli, essendo

$p > p^* \Rightarrow$ equilibrio stabile.

Richiedi:



SCAMBIO DI STABILITÀ.

Def: Si ha una CATASTROFE quando si ha una biforcazione con collisione di due punti di equilibrio.
Es: FRANA.

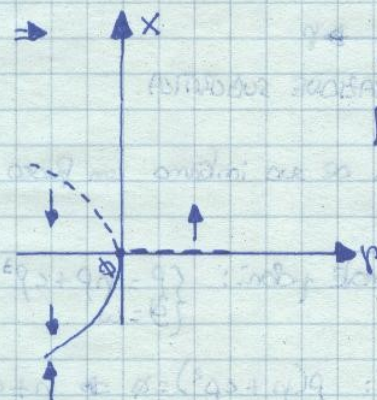
la biforcazione "scambio di stabilità" non è catastrofica perché varia con continuità.

2) BIFORCAZIONE NODO-SELLA:

È una biforcazione descritta dall'equazione: $\dot{x}(t) = p + x^2(t)$. Posto $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow p + x^2(t) = 0$

Imbrazz:

$$x = \pm \sqrt{-p} \Rightarrow$$



$p > 0 \Rightarrow$ non esistono equilibri.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x} = \pm \sqrt{-p}} = (p + 2x(t))_{\bar{x} = \pm \sqrt{-p}} = p \pm 2\sqrt{-p}$$

$p < 0 \Rightarrow$ ci sono equilibri.

$$\lambda - p + 2\sqrt{-p} = 0$$

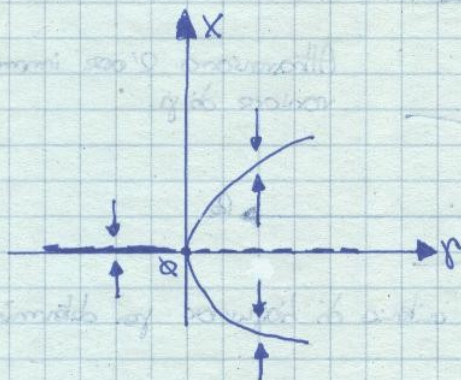
$$\begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p > 2\sqrt{-p} \\ \lambda < 0 & \text{per } p < 2\sqrt{-p} \end{cases}$$

BIFORCAZIONE FOLD.

3) BIFORCAZIONE FORCONE:

Simile a una cubica: $\dot{x}(t) = p x(t) - x^3(t)$. Equilibri: $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow p x(t) - x^3(t) = 0 \Rightarrow p x(t) = x^3(t)$

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ x(t) = \pm \sqrt{p} \end{cases}$$



$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x} = 0} = (p - 3x^2(t))_{\bar{x} = 0} = (p) \quad \begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p > 0 \\ \lambda < 0 & \text{per } p < 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x} = \pm \sqrt{p}} = (p - 3x^2(t))_{\bar{x} = \pm \sqrt{p}} = p - 3p = -2p$$

Dunque:

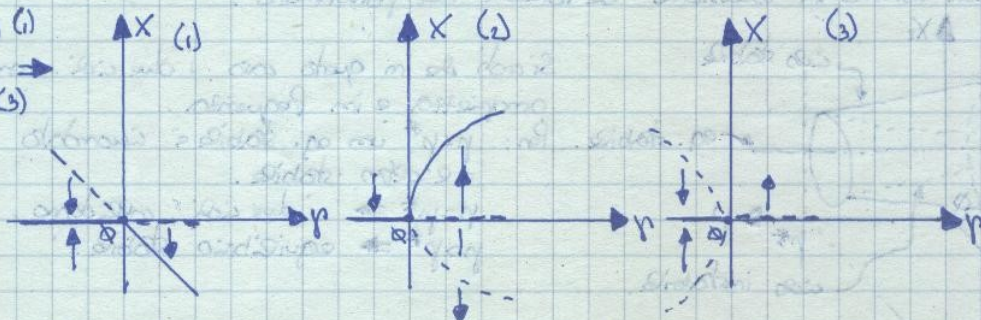
$$\begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p < 0 \\ \lambda < 0 & \text{per } p > 0 \end{cases} \quad (\bar{x} = \sqrt{p})$$

Analogamente si ha per: $\bar{x} = -\sqrt{p}$.

$$(p - 3p) \Rightarrow \lambda - 2p = 0 \Rightarrow \lambda = 2p \quad \begin{cases} \lambda > 0 & \text{per } p > 0 \\ \lambda < 0 & \text{per } p < 0 \end{cases}$$

Si noti che è sempre possibile cambiare il segno alle forme normali appena viste. Ad esempio:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p x(t) + x^2(t) & (1) \\ \dot{x}(t) = p - x^3(t) & (2) \\ \dot{x}(t) = p x(t) + x^3(t) & (3) \end{cases}$$

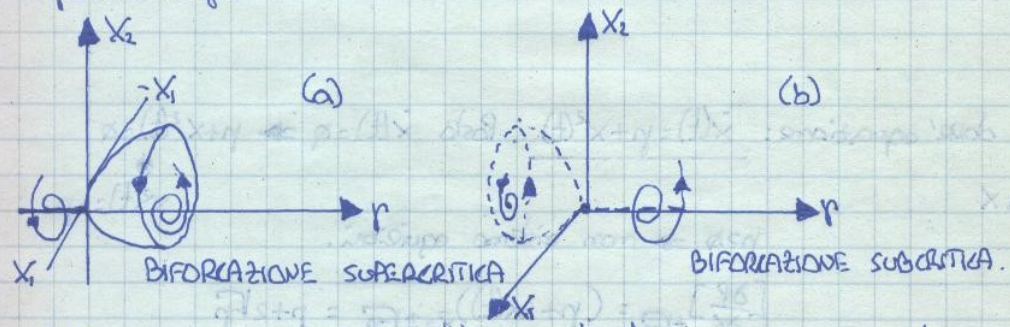


Ritornando che il concetto di catastrofe è legato al concetto di discontinuità si ha:

- la biforcazione di scambio stabilità è non catastrofica
 - ... è catastrofica
 - ... è catastrofica
- Valiamo altre biforcazioni locali:

4) BIFORCAZIONE DI HOPF:

Spiega come un ciclo possa nascere per trasformazione continua di un equilibrio, al variare del parametro p .



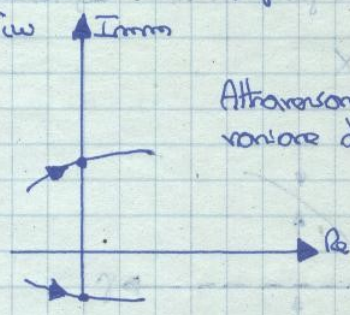
Nella prima un ciclo asintoticamente stabile ha al suo interno un punto instabile.
Forma normale:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= pX_1 + wX_2 + cX_1(X_1^2 + X_2^2) \\ \dot{X}_2 &= -wX_1 + pX_2 + cX_2(X_1^2 + X_2^2) \end{aligned} \Rightarrow \text{Im coordinate polari: } \begin{cases} \dot{p} = p + cp^3 \\ \dot{\theta} = w \end{cases}$$

Si noti che: $\dot{p} = 0 \Rightarrow p = 0$ oppure $p = \sqrt{-1/c}$. Impulsi: $p(p + cp^2) = 0 \Rightarrow p + cp^2 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$
 Si noti che p e c sono discorsi di segno e quindi:
 Inoltre per $p = p^* = 0$ si ha:

$$J = \begin{bmatrix} p & w \\ -w & p \end{bmatrix}_{X=0}, \quad \lambda_{1,2} = p \pm iw$$

Attraverso l'asse immaginario al variare di p .



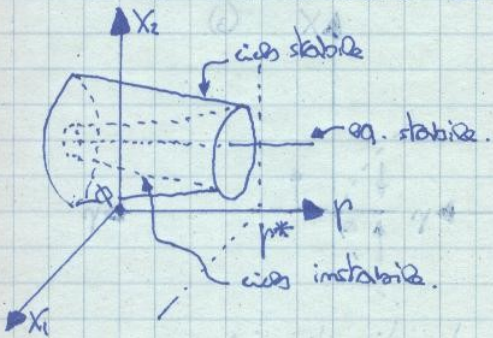
Per trovare il periodo del ciclo:

$$\omega_H = \sqrt{\det J(p^*)}$$

Si ricordi che per $p = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm iw \Rightarrow$ utilizzatore critico di Liapunov per determinare se eq è stabile o instabile.

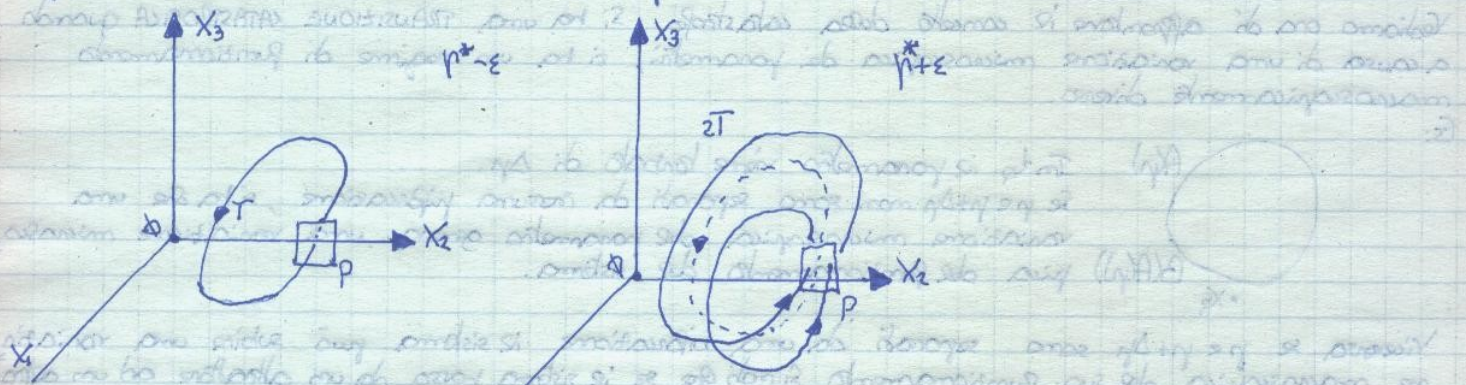
5) BIFORCAZIONE TANGENTE:

Due cicli vanno in collisione al variare del parametro.

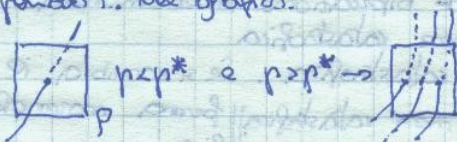


Si noti che in questo caso i due cicli non nascono degnati in omogeneità e in frequenza.
 Per: $p < p^*$ un eq. stabile è circondato da due cicli, uno instabile e l'altro stabile.
 $p = p^* \Rightarrow$ i due cicli coesistono
 $p > p^* \Rightarrow$ equilibrio stabile.

6) BIFURCAZIONE FLIP: Anzitutto solo per i sistemi superiori al secondo ordine, cioè richiede uno spazio tridimensionale. Siccome un solo spazio tridimensionale non basta si ha:



Un ciclo asintoticamente stabile di periodo T , per $p \rightarrow p^*$ si sdoppia in un ciclo di periodo $2T$ asintoticamente stabile, e in uno instabile di periodo T . Vede grafico:



Per $p \rightarrow p^*$ i tre punti collidono.

$$J = \left[\frac{\partial P}{\partial z} \right]_{\bar{z}}$$

Al variare del parametro, il sistema si comporta da oscillatore ma più lentamente, raddoppiando il periodo delle oscillazioni. Si pensi, per esempio, alle onde del mare. NB: $\lambda \rightarrow -1$, per $p \rightarrow p^*$. $|\lambda| < 1$.

* BIFURCAZIONI GLOBALI:

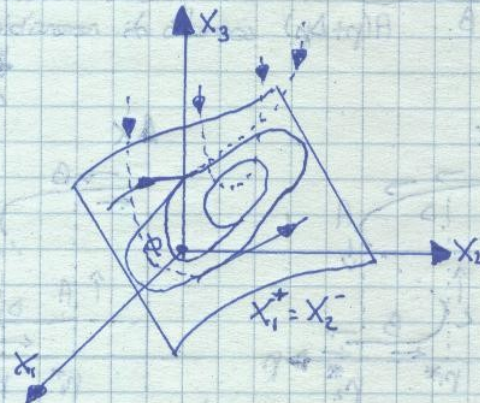
Queste bifurcazioni sono interpretabili come collisioni tra varietà stabili e instabili.

Es:



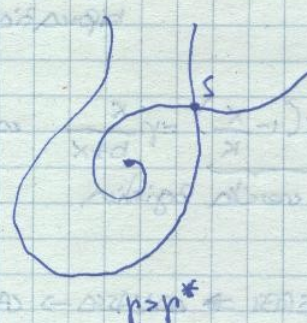
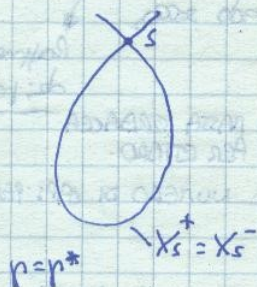
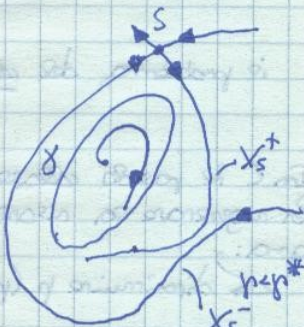
ETEROCLINE.

tra due o più eq. sella



ETEROCLINA TRA CICLI.

Quando si ha una collisione tra varietà stabili e instabili della stessa sella, si ha una BIFURCAZIONE ORCOSTRUTTA:



Per $p = p^* \Rightarrow$ collisione di un ciclo δ con l'equilibrio sella S . Per $p > p^*$, ciclo ha $T \rightarrow \infty$

Posto:

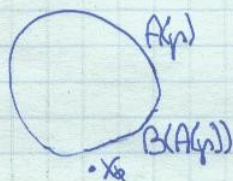
$$\delta = \lambda^+ + \lambda^-$$

con δ = valore di sella (T_{ij}). Se $\delta < 0 \Rightarrow$ ciclo è unico e stabile

Se $b > p \Rightarrow$ il ciclo è unico e indubitabile.

Vediamo ora di approntare il concetto della catastrofe. Si ha una TRANSIZIONE CATASTROFICA quando a causa di una variazione microscopica dei parametri, si ha un regime di funzionamento macroscopicamente diverso.

Es:



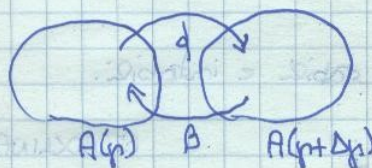
Inte il parametro viene tenuto di Δp .

Se p e $p+\Delta p$ non sono separati da nessuna biforcazione, si ha che una variazione microscopica del parametro genera una variazione microscopica del funzionamento del sistema.

Viceversa, se p e $p+\Delta p$ sono separati da una biforcazione il sistema può subire una variazione macroscopica del suo funzionamento. Similmente se il sistema passa da un attrattore ad un altro, allora la biforcazione è catastrofica. Se la transizione catastrofica è impossibile si ha una biforcazione non catastrofica. In tutti gli altri casi è indeterminata. Ad esempio:

- BIFORCAZIONE scambio di stabilità $\rightarrow$ biforcazione indeterminata.
- BIFORCAZIONE NODO-SELLA $\rightarrow$ biforcazione catastrofica.
- BIFORCAZIONE FORCONE $\rightarrow$ " non catastrofica. Se si cambia il segno nella sua forma normale diventa poi catastrofica.
- BIFORCAZIONE HOPF $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{supercritica} \rightarrow \text{non catastrofica} \\ \text{subcritica} \rightarrow \text{catastrofica} \end{cases}$
- BIFORCAZIONE TANGENTE $\rightarrow$ biforcazione catastrofica.
- BIFORCAZIONE ONCOLINA $\rightarrow$ " catastrofica.
- BIFORCAZIONE FLIP $\rightarrow$ biforcazione non catastrofica.

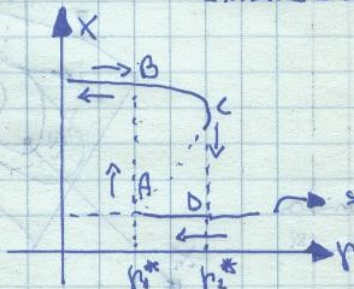
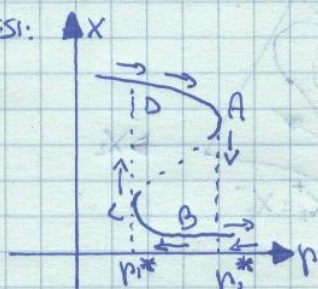
Se:



Se tramite la transizione d si passa da una attrattore $A(p)$ ad un attrattore $A(p+\Delta p)$ (transizione catastrofica), e tramite un'altra transizione catastrofica B si passa da $A(p+\Delta p)$ a $A(p)$ si ha il concetto di reversibilità.

$\downarrow$
CATASTROFE REVERSIBILE.

Es: ISTERESI:



$\rightarrow$ scambio di stabilità e nodo sella.

$\rightarrow$ coppia di biforcazioni nodo sella.

$\rightarrow$ rappresenta bene il problema del collasso dei pascoli.

Impatti:

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - p \frac{x}{b+x}$$

crescita logistica

con $\begin{cases} x = \text{MASSA ERBAACEA PER ETTERO} \\ p = \text{NUMERO DI API PER ETTERO} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Im C il pascolo eccessivo. Per rigenerare la risorsa bisogna:
diminuire p ($p < p_1^*$).

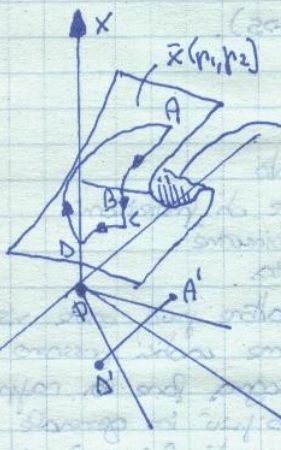
Im grande:

ISTERESI $\rightarrow$ COLASSO $\rightarrow$ CATASTROFE $\rightarrow$ RINASCITA

$\rightarrow$ ciclo della vita. NB: Il mondo intero è un sistema dinamico che risponde a quote oggi.

Una variante dei sistemi è da aspicare di seguito:

$\dot{x} = p_1 + p_2 x - x^3$ → sistema con 2 parametri. (Per $p_1 > 0$ → prima monomia del polinomio)
(Per $p_2 > 0$ → sistemi rispetto a p_1 con due modi sella.)



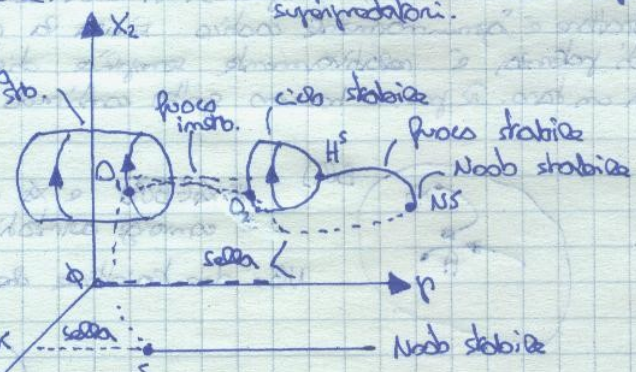
NB: $\bar{x}(p_1, p_2)$ sono gli stati di eq.

eq. instabili che corrispondono ai punti della regione a aspicare.

Es: Sia: $\begin{cases} \dot{x}_1 = R x_1 (1 - \frac{x_1}{K}) - x_2 \frac{O x_1}{b + x_1} \\ \dot{x}_2 = a \frac{O x_1}{b + x_1} x_2 - m x_2 - p \frac{d x_2}{d x_2} \end{cases}$ dove: $R x_1 (1 - \frac{x_1}{K})$ è la crescita logistica della preda.
 $x_2 \frac{O x_1}{b + x_1}$ è la risposta funzionale, cioè la risposta del predatore.
* p : superpredatori

* Instabilità di predatori dovuta alla presenza dei superpredatori.

NB: Solo lo scambio di stabilità S e A e A e A' sono catastrofiche e reversibili.



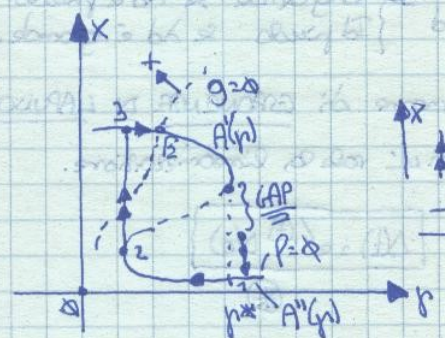
* H^s = Hopf supercritica dunque non catastrofica.

Ponendo da ciò si possono definire i sistemi A DINAMICA DIFFERENZIALE come quei sistemi dove:

2 componenti $\begin{cases} \text{VELOCE} \rightarrow x(t) = \text{velocità di stato} \\ \text{LENTO} \rightarrow p(t) = \text{ " " " } \end{cases}$

Quindi:

$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p) \\ \dot{p} = \epsilon g(x, p) \end{cases}$ con $\epsilon > 0$ → se ϵ piccolo → $p \approx 0$ → p è praticamente costante.



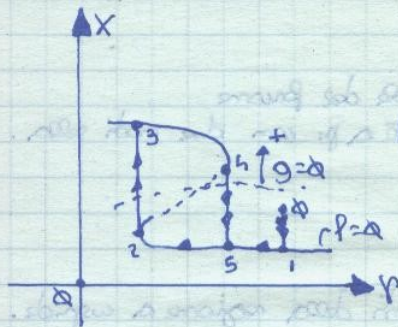
$x(t) \rightarrow$ reattivamente a $A'(p)$
Anche $A'(p(t))$ evolve lentamente nel tempo dato che p non è esattamente costante.

Per $p \rightarrow p^* \Rightarrow$ il sistema diventa lento.

componente veloce rallenta

* Dopo la transizione catastrofica la componente veloce è stata portata sull'attrattore $A''(p)$.

Dopo di che si attiva la componente lenta che riporta il sistema fino al punto 2 dove la componente rapida del sistema subisce una transizione catastrofica $2 \rightarrow 3$. In 3 il segno di g è cambiato, perciò comincia a decrescere. Se non c'è il GAP si ha.



Non c'è gap quindi la componente lenta non si smorza mai.

Ciclo LENTO-VELOCE ($5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$).

PRINCIPIO DI SEPARAZIONE.

* STRANI ATTRATTORI: Ci sono 4 modi per rappresentarli

- Quadro di stato
- Rappresentazione di proiezioni
- Sezione di Poincaré
- Spettro di Potenza

- Il quadro di stato è lo strumento più usato per rappresentare e analizzare un sistema. Siccome uno strano attrattore può essere visualizzato solo su uno spazio tridimensionale $\Rightarrow$ solo sistemi del terzo ordine e pochi possono essere visualizzati su tale spazio. Per sistemi superiori al terzo ordine bisogna fare la rappresentazione di proiezioni (metodo non semplice). Per vedere se "un oscillatore" o più in generale uno strano attrattore è "genuinamente" caotico si usa la mappa o sezione di Poincaré. Usando invece lo spettro di potenza è relativamente semplice distinguere uno strano attrattore da un ciclo o da un loro. Il primo ha uno spettro continuo, mentre i secondi hanno degli spetti a righe.



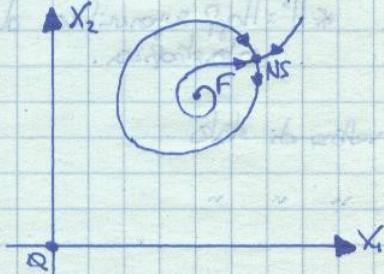
* $x_0 \in B(A)$ e x_0 è la radice della generica traiettoria che converge asintoticamente ad A.

NB: due traiettorie che partono vicine possono divergere.



divergono tra loro ma convergono verso A in maniera differente.

Es:

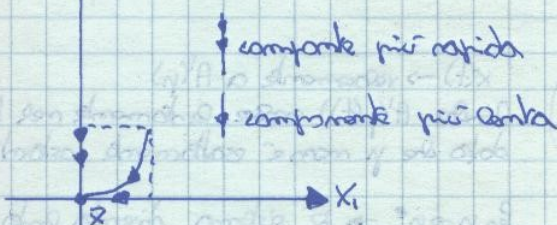


NB: la convergenza verso l'equilibrio NS avviene con la più lenta delle componenti e e^{Lt} . $\Rightarrow$ L'autoreale dominante L potrebbe essere calcolato calcolando ordine il sistema.

$$\| \delta x(t) \| = \| x(t) - \bar{x} \| \rightarrow 0$$

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \| \delta x(t) \| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \| \delta x(t) \|$$

NB:



Siccome: $T_d = -\frac{1}{\lambda_d} \Rightarrow \begin{cases} T_d \text{ grande se } \lambda_d \text{ è piccolo} \\ T_d \text{ piccolo se } \lambda_d \text{ è grande.} \end{cases}$

* L prende il nome di ESPONENTE DI LIAPOUNOV.



notazione per cui vale la linearizzazione.

$N(x)$

$$\Delta(t) = e^{L(t)} \Delta(0)$$

*

Quando della rete onde per cui è lei. la relazione (*) fornisce per L la.

Traiettorie che partono vicine giungono all'attrattore separate sempre dalla stessa distanza.

NB: $\Delta(0)$ = distanza iniziale $\Rightarrow \Delta(t) = \Delta(0) \Rightarrow e^{L(t)} \geq 1 \Rightarrow \underline{L(t) = 0}$

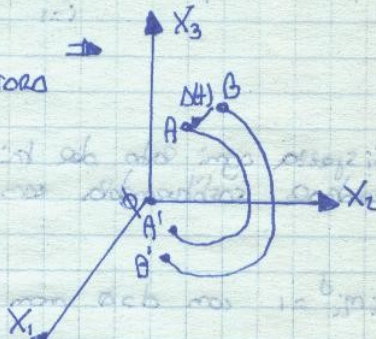
Si ricordi inoltre che:

$L \rightarrow$ un autovettore $\Rightarrow$ se $L_1 =$ autovettore $\Rightarrow$ gli altri $n-1$ $L \Rightarrow$ $n-1$ autovettori non dominanti.

Per quanto riguarda i cicli, gli altri $n-1$ autovettori $\rightarrow$ $n-1$ esponenti di Lyapunov sono negativi. Per quanto riguarda le loro parti reali i primi due esponenti di Lyapunov nulla e il resto negativi. Quindi:



TORO



$\rightarrow$ è tridimensionale.



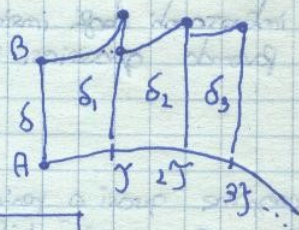
Nel caso di uno strano attrattore le traiettorie divergono tra loro. Quindi:

$\begin{cases} L_1 > 0 \Rightarrow \text{traiettorie divergono} \rightarrow \text{CAOTICITA' FORTE} \\ L_2 = 0 \Rightarrow \text{traiettorie restano costanti} \rightarrow \text{CAOTICITA' DEBOLE} \\ L_3 < 0 \Rightarrow \text{" convergono" } \rightarrow \text{" FORTE} \end{cases}$

Quindi:

	L_1	L_2	L_3
eq	≤ 0	< 0	< 0
LICAO	> 0	< 0	< 0
TORO	> 0	$= 0$	< 0
STR. ATT	> 0	$= 0$	< 0

Sia:



$\delta_{i/8}$ = distanza di riferimento.

$$e_{milit} = \prod_{i=1}^m \delta_{i/8}$$

Però: $L_{mt} = \sum_{i=1}^m \log \delta_{i/8}$
Per sistemi a tempo discreto:

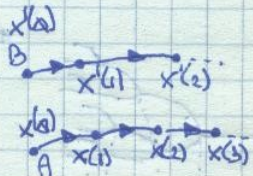
$$L = \frac{1}{mt} \sum_{i=1}^m \log \delta_{i/8}$$

$\rightarrow$ per i sistemi a tempo continuo.

$$x(t+1) = p(x(t))$$

Sviluppiamo in serie:

$$p^{(t)}(x(t)) + \frac{d}{dx} p^{(t)}(x(t)) \Delta x(t)$$



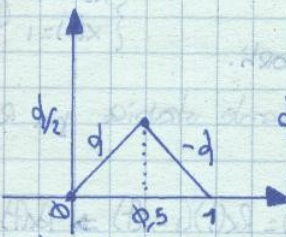
$$x(t) - x(t) = p^{(t)}(x'(t)) - p^{(t)}(x(t))$$

$$\Delta(t) = \Delta(t) + \frac{dp^{(t)}}{dx(t)} = \Delta(t) + \prod_{i=1}^m p'(x(i))$$

$$\text{Per } \Delta(t) = \Delta(t) e^{L_t} = \prod_{i=1}^m p'(x(i))$$

$$L = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \log p'(x(i))$$

ES:



MAPPA TENDI.

d_2 = perimetro

$1.2 \cdot 1.2 \rightarrow$ È una mappa che si conserva.

$$L_1 = \frac{1}{t} \sum \log |p'| = \log d \Rightarrow L = \log d \text{ con } d > 1$$

Quindi L è positivo e le traiettorie divergono. Si può usare graficamente il metodo della regola. Gli strani attrattori hanno dimensione frazionaria e quindi sono FRATTALI.

ES:



$$\begin{aligned} i=1 & \rightarrow \delta_i = 3^{-i}, m_i = 2^i \\ i=2 & \rightarrow \delta_i = 3^{-i}, m_i = 3 \cdot 2^i \end{aligned}$$

Gli insiemi cantor sono i più semplici insiemi frattali. i è l'insieme della successione costruita, f_i è la lunghezza dei segmenti dell'esimo insieme, e m_i è il numero di segmenti del generico insieme. Quindi:

$$\text{---} \Rightarrow f_i = 1, m_i = 1 \quad , \quad \text{---} \text{---} \text{---} \Rightarrow f_i = \frac{1}{3}, m_i = 2$$

Nel secondo caso si ha:



Si spezza ogni lato del triangolo in 3 parti e si elimina quella centrale sostituendola con Λ .

Si noti che $f_i m_i \neq 1$, ma $f_i m_i = 1$ con $d > 0$ non intero. d è la DIMENSIONE FRALE e:

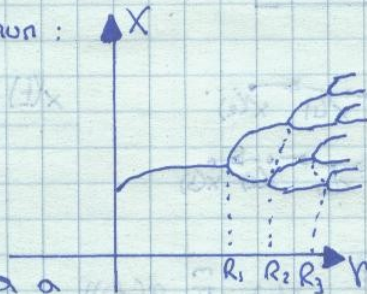
$$\begin{cases} d = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log m_i}{-\log f_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{-\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63 \\ d = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log m_i}{-\log f_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + i \log 5}{i \log 3} = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,26 \end{cases}$$

Una delle proprietà più interessanti degli insiemi frattali è la AUTOSIMILIANZA, cioè l'insieme appare simile a se stesso facendo qualsiasi ingrandimento.

* BIFURCAZIONI E CAOS:

Si sa che un sistema in regime quasi o periodico può diventare caotico quando si ha una transizione composta da una o più biforcazioni. Sistema due grandi classi di queste transizioni:

a) CASCAATA DI FEINGENBAUM:



* è una sequenza di biforcazioni p.p.p. Un ciclo raddoppia di periodo per successivi valori di p .

NB: Per $p \rightarrow \infty$ (p_{∞}) $\Rightarrow$ se di p di questo p il sistema diventa caotico.

Prendiamo il sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = R x(t) (1 - x(t)) \rightarrow \text{MAPPA LOGISTICA}$$

$$*NB: R x(t) (1 - x(t)) = 0$$

Si noti che:

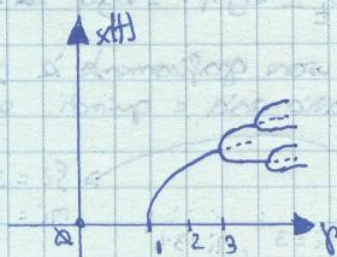
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ x(t) = 1 \end{cases} (*)$$

• Se R è troppo grande $\Rightarrow$ si genera un sistema con tanti soli.

• Per $R = R_1$ nasce un ciclo di periodo 2, che è asintoticamente stabile per $R_1 < R < R_2$.

• Per $R = R_2$ si ha un nuovo raddoppio di periodo.

Quindi:



Im base zero (*).

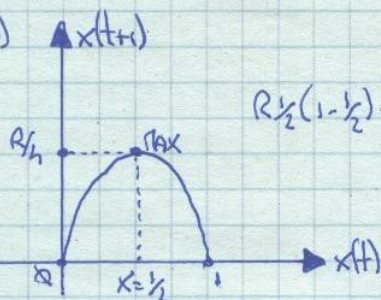
NB: il ciclo presente parte da una stabilità.

$$Eq: x(t) = R x(t) (1 - x(t)) \Rightarrow R x(t) = \frac{x(t)}{(1 - x(t))}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ x(t) = 1 - \frac{1}{R} \end{cases}$$

Studio:

$$x(t+1) = R x(t) (1 - x(t))$$



$$R \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = R \frac{1}{4} = \frac{R}{4} \Rightarrow \text{Se } R > 4 \Rightarrow \underline{\text{MAX} > 1.}$$

* linearizzazione:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_x = (R - 2R x(t)) \bar{x} = \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = 1 - \frac{1}{R} \end{cases}$$

$$\det(XI - J) = \begin{cases} \lambda = R \\ \lambda = R - 2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = R^2$$

$$x_{1,2} = \frac{+R \pm \sqrt{R^2}}{+2R} \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$R(2x(t) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 0 \\ 2x(t) - 1 = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$R x^4(t) - R x(t) = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = R^2$$

$$x_{1,2} = \frac{+R \pm \sqrt{R^2}}{+2R} \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

NB:

$$x(t+1) = 0 \Rightarrow R x(t) (1 - x(t)) = 0 \Rightarrow R x(t) - R x^2(t) = 0$$

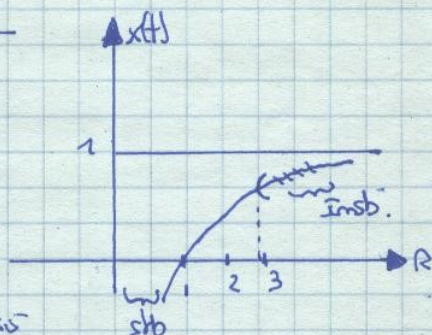
$$\text{Derivata prima: } 2R x(t) - R = 0$$

$$\text{MAX.}$$

$$\text{Per } x(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t+1) = \frac{R}{4}$$

NB: R00 identifica il
NUO DEL CAOS.

NB: F è invariante.



$$\text{NB: } \underline{p = R}$$

Sistemi:

$$\begin{cases} \lambda > 1 & \text{Inst.} \\ \lambda > R - 2 \Rightarrow R - 2 > 1 \end{cases}$$

* R > 3
si ha inst.

Quindi per $R > 3$ non si ha più un comportamento periodico, in quanto per $R = 3$ si ha una biforcazione flip.

Inoltre:

- Più si va avanti più queste biforcazioni si affastano. ($T = 2^n$).
- Per un dato ΔR_n :

Quindi:

$$\Delta R_n = R_n - R_{n-1} \Rightarrow (R_{\infty} - R_{n+1}) = \frac{1}{F} (R_{\infty} - R_n) \text{ con } \frac{1}{F} = 1,6692 \dots$$

Su un sistema continuo del terzo ordine, $\dot{x} = f(x)$, si usa la sezione di Poincaré e si scopre uno strano attrattore di dimensione frattale. Dunque anche un sistema continuo possa avere solo una cascata di Feigenbaum per passare da un funzionamento di regime ad un funzionamento caotico.

- 2) La transizione da regime a caos è preannunciata da una sola biforcazione globale. Ad esempio la biforcazione periodica in un sistema del terzo ordine (CAOS ORIGINALE o alla Shilnikov).