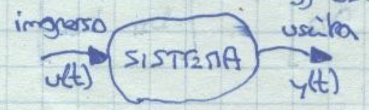
* I SISTEMI LINEARI:

Un sistema lineare è un sistema dinamico caratterizzato da 3 grandezze: 1) INGRESSO 2) STATO 3) USCITA

Tali grandezze sono rappresentate da tre vettori:

$\vec{u}(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T$ → vettore ingresso all'istante t
$\vec{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ → vettore stato all'istante t
$\vec{y}(t) = [y_1(t) \dots y_p(t)]^T$ → vettore uscita all'istante t



NB: Una matrice è un aggregato di numeri. Ad esempio:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono gli elementi della matrice. Un generico elemento a_{ij} della matrice è un elemento dell'i-esima riga e j-esima colonna. Es: a_{21} = elemento della riga 2 e colonna 1.

La matrice trasposta A^T è tale che: $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ → si cambiano le righe con le colonne.

2x2 = 2 righe e 2 colonne → dimensione della matrice.

Un vettore è una matrice particolare dove:

$i \geq 1, j = 1$ → vettore colonna
$i = 1, j \geq 1$ → vettore riga

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ → vettore colonna

$[\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta]$ → vettore riga

Se t è reale → SISTEMI A TEMPO CONTINUO
Se t intero → SISTEMI A TEMPO DISCRETO

def:

$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases}$ → sistema continuo

$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases}$ → sistema discreto.

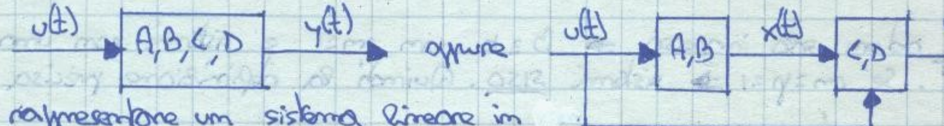
Si noti che $u(t), x(t), y(t)$ sono i tre vettori precedentemente citati, mentre A, B, C, D sono matrici di dimensione $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$. Si noti che: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ (derivata di x rispetto al tempo t).

L'equazione:

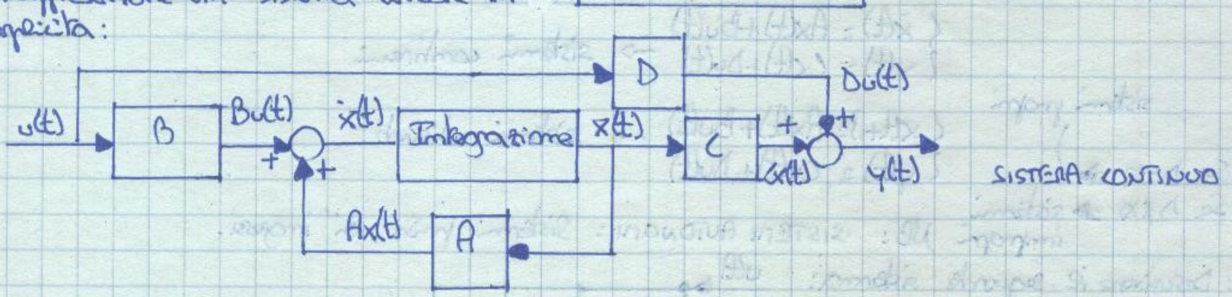
$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \end{cases}$ → eq. di stato → fornisce informazioni sull'evoluzione del sistema.

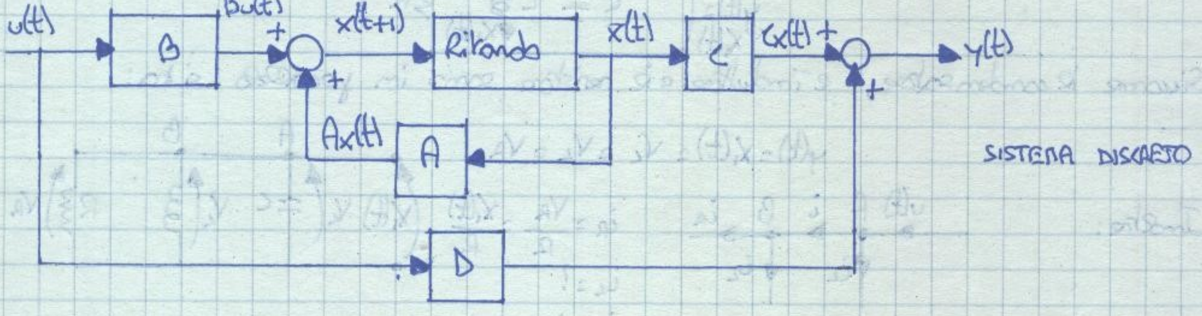
$y(t) = C^T x(t) + Du(t)$ → trasformazione di uscita → conoscendo $u(t), x(t)$ si può ottenere l'uscita del sistema.

Si noti che lo stato è una variabile interna mentre ingresso e uscita sono variabili esterne.



Si può rappresentare un sistema lineare in forma esplicita:





Siccome:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

e:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\dots+a_{1m}x_m(t)+b_{11}u_1(t)+ +b_{12}u_2(t)+\dots+b_{1m}u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_m(t)=a_{m1}x_1(t)+\dots+a_{mm}x_m(t)+b_{m1}u_1(t)+\dots+b_{mm}u_m(t)$$

↘ forma esplicita dell'eq. di stato.

visto che:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

→ forma matriciale dell'equazione di stato.

Analogamente si ha per un sistema discreto:

$$x_1(t+1)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\dots+a_{1m}x_m(t)+b_{11}u_1(t)+\dots+b_{1m}u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$x_m(t+1)=a_{m1}x_1(t)+a_{m2}x_2(t)+\dots+a_{mm}x_m(t)+b_{m1}u_1(t)+\dots+b_{mm}u_m(t)$$

Analogamente per l'uscita:

$$y_1(t)=c_{11}^T x_1(t)+\dots+c_{1m}^T x_m(t)+d_{11}u_1(t)+\dots+d_{1m}u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t)=c_{m1}^T x_1(t)+\dots+c_{mm}^T x_m(t)+\dots+d_{m1}u_1(t)+\dots+d_{mm}u_m(t)$$

Si hanno poi sistemi ad un solo ingresso $\Rightarrow B=b$ con $m=1$ e sistemi con una sola uscita $(p=1) \Rightarrow C\equiv c^T$. Se $m=p=1 \Rightarrow$ sistemi SISO. Quindi la definizione precisa è:

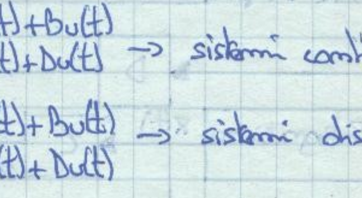
$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases} \rightarrow \text{sistemi continui}$$

$$\begin{cases} x(t+1)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases} \rightarrow \text{sistemi discreti.}$$

- Se $D=0 \Rightarrow$ sistemi propri
- Se $D\neq 0 \Rightarrow$ sistemi impropri

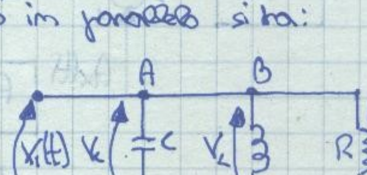
NB: SISTEMI AUTONOMI: Sistemi privi di ingressi.

Es: Descrivere il seguente sistema:

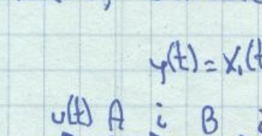


Siccome il condensatore, l'induttore e il resistore sono in parallelo si ha:

$$y(t)=x_1(t)=V_C=V_L=V_R$$



Inoltre:



$$i_R=\frac{V_R}{R}=\frac{x_1(t)}{R}$$

$$i_L=?$$

$$i_C=?$$

Si ricordi soltanto che: NB: $\frac{V_L}{L} = \frac{di_L}{dt}$ Nodo A: $u(t) = i_c + i = C\frac{dV_c}{dt} + i = C\dot{X}_1 + i$

$$\begin{cases} V_L = L\frac{di}{dt} \\ i_c = C\frac{dV_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow i = i_R + i_L = \frac{X_1(t)}{R} + i_L \Rightarrow u(t) - \dot{X}_1 C = i_R + i_L \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) - C\dot{X}_1(t) = i$$

$$i_L = u(t) - C\dot{X}_1(t) - \frac{X_1(t)}{R}$$

Quindi: Ma: $\underline{i_L = X_2(t)}$. $\Rightarrow X_2(t) = u(t) - C\dot{X}_1(t) - X_1(t)/R \Rightarrow$

$$\dot{X}_1(t) = \left(u(t) - \frac{X_1(t)}{R} - X_2(t)\right)\frac{1}{C}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = \frac{1}{C}\left(u(t) - X_2(t) - \frac{X_1(t)}{R}\right) \\ \dot{X}_2(t) = \frac{1}{L}X_1(t) \\ y(t) = X_1(t) \end{cases}$$

Matricialmente: $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$, $c^T = [1 \;\; 0]$.

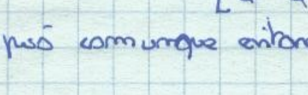
Vediamo ora un esempio di un sistema discreto; siano:

$X_1(t)$ = allievi frequentanti la prima classe
$X_2(t)$ = " " la seconda " } nell'anno t.
$X_3(t)$ = " " la terza "

Sia γ_i con $i = 1,2,3$ la porzione di bocciati, e supponendo che non esistono studenti provenienti da altre scuole:

$X_1(t+1) = \gamma_1 X_1(t) + u(t)$ con $u(t)$ = studenti iscritti al primo anno.
$X_2(t+1) = \gamma_2 X_2(t) + (1-\gamma_1)X_1(t)$
$X_3(t+1) = \gamma_3 X_3(t) + (1-\gamma_2)X_2(t)$, $y(t) = (1-\gamma_3)X_3(t) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ (1-\gamma_1) & \gamma_2 & 0 \\ 0 & (1-\gamma_2) & \gamma_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c^T = [0 \;\; 0 \;\; (1-\gamma_3)]$

Si noti che un sistema dinamico può essere studiato anche tramite le variabili esterne $(u(t), y(t))$. Infatti:



Sia: $X_1(t)$ = posizione del blocco di massa m
$X_2(t)$ = la derivata della posizione, cioè la velocità
$y(t) = X_1(t)$

$$\Downarrow$$

NB: $F = m \cdot a$

Per la nota legge di Newton si ha: $\dot{X}_1(t) = X_2(t)$

Matricialmente si ha: $\dot{X}_2(t) = a = \frac{F}{m} = \frac{1}{m}(u(t))$, con $u(t)$ = forza impressa sul blocco di massa m.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \;\; 0]$$

Si può comunque evitare di usare le variabili interne derivando due volte:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

Dunque si può dare una definizione esterna del sistema, usando cioè solo variabili esterne. Quindi posto:

$$\underline{y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y^{(0)} = \beta_0 u^{(n)} + \dots + \beta_n u^{(0)}(t)}$$ → per i sistemi a tempo continuo.

Analogamente si ha per i sistemi a tempo discreto:

$$y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \dots + \alpha_n y(t-n) = \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \dots + \beta\, u(t-n)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y(t) = \underbrace{-\alpha_1 y(t-1) - \dots - \alpha_n y(t-n)}_{\text{MODELLO AUTOREGRESSIVO (AR)}} + \underbrace{\beta_0 u(t) + \dots + \beta_n u(t-n)}_{\text{MEDIA MOBILE (MA)}}}$$

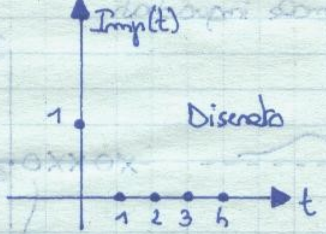
Questo è il modello $\underline{\text{ARMA}}$.
Questo può essere così sintetizzato: $\boxed{D(p)y(t) = N(p)u(t)}$ con: ↓

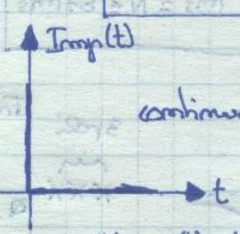
* RISPOSTE CANONICHE:
Sono tutte quelle risposte a determinati ingressi canonici (Impulso, scalino, rampa). Vediamo l'impulso.

TEMPO CONTINUO: $\rightarrow P_\delta(t) = \begin{cases} 1/\delta & , 0 \le t \le \delta \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$ $P_\delta(t)$: area sottesa.

$$\boxed{Imp(t) = \lim_{\delta \to 0} P_\delta(t)}$$

TEMPO DISCRETO: $\rightarrow Imp(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$





$g(\cdot)$: risposta all'impulso.

NB: $\underline{g(\cdot) = y_{for}}$ Si ricordi che $x(t) = \underbrace{\phi(t)x(0)}_{x_{lib}} + \underbrace{\psi u(t)}_{x_{for}}$

Nella formula di Lagrange:
$x(t) = \underbrace{x_{lib}}_{\text{Movimento Libero}} + \underbrace{x_{for}}_{\text{Movimento forzato}}$ $\Rightarrow$ $\underline{g(t) = c^T \int_0^t e^{A(t-\xi)} b\, Imp(\xi) + d\, Imp(t)}$

Infatti: $g(t) = c^T x(t) + du(t)$ con $u(t) = Imp(t)$

$x(t) = e^{At} \underbrace{x(0)}_{0} + \int_0^t e^{A(t-\xi)} Bu(\xi) d\xi$

perché $\underline{x(0) = 0.}$ $\Rightarrow x(t) = \int_0^t e^{A(t-\xi)} Bu(\xi) d\xi$

Ma:
$Imp(\xi) = 0$ per $\xi \ne 0 \Rightarrow g(t) = c^T \int_0^t e^{A(t-\xi)} b\, Imp(\xi) d\xi + d\, Imp(t) = c^T e^{At} b \int_0^t Imp(\xi) d\xi + d\, Imp(t) =$
$= c^T e^{At} b + d\, Imp(t)$

Quindi: $\underline{g(t) = c^T e^{At} b + d\, Imp(t)}$ per i sistemi a tempo continuo.

Per i sistemi a tempo discreto: $g(t) = \begin{cases} d & , t = 0 \\ c^T A^{t-1} b & , t > 0 \end{cases}$. Ovviamente per $d = 0$ (sistemi propri) si ha: $g(t) = c^T e^{At} b$

Siccome:
$y_{for}(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-\xi)} bu(\xi) d\xi + du(t) \Rightarrow \int_0^t [g(t-\xi) - d\, Imp(t-\xi)] u(\xi) d\xi + du(t) =$

Si noti che $g(\cdot)$ coincide con la risposta $g_b(\cdot)$ della sola parte raggiungibile osservabile:
$= \int_0^t g(t-\xi) u(\xi) d\xi - d \int_{t^-}^t Imp(t-\xi) u(\xi) d\xi + du(t) =$
$= \int_0^t g(t-\xi) u(\xi) d\xi \rightarrow$ Integrale di convoluzione.

$g(t) = g_b(t) = c_b^T e^{A_b t} + d\, Imp(t)$ CONTINUO.

$g(t) = g_b(t) = \begin{cases} d & , t = 0 \\ c_b^T A_b^{t-1} b_b & , t > 0 \end{cases}$ DISCRETO.

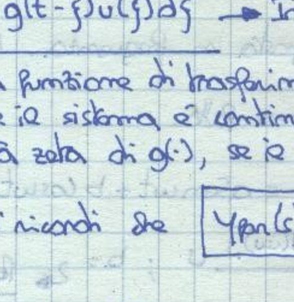
Inoltre la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace, se il sistema è continuo di $g(\cdot)$, mentre è la trasformata zeta di $g(\cdot)$, se il sistema è discreto.

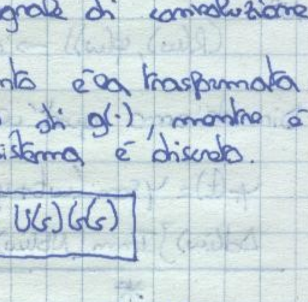
Trasformata di Laplace:
$f(t) = F(s)$
$Imp(t) = 1$
$sca(t) = 1/s$
$Ram(t) = 1/s^2$

Trasformata zeta:
$f(z) = F(z)$
$Imp(t) = 1$
$Sca(t) = \frac{z}{z-1}$
$Ram(t) = z/(z-1)^2$

Si ricordi che $\boxed{Y_{for}(s) = U(s)G(s)}$

Scalino:
$sca(t) = \begin{cases} 0 & , t = 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases}$; Rampa: $Ram(t) = t \quad , t \ge 0$





NB: scalino è l'integrale dell'impulso. Quindi:
$y_{for}(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-\xi)} b\, sca(\xi) d\xi + d$
$sca(t) = \Rightarrow \int_0^t c^T e^{A(t-\xi)} b d\xi + d \rightarrow y_{for}(t) = \int_0^t g(t-\xi) d\xi - d \int_0^t Imp(t-\xi) d\xi + d$
$= \int_0^t g(\xi) d\xi$

Analogamente la rampa è l'integrale dello scalino.

Prendiamo ora la funzione di trasferimento:
$$G(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{m_b} (s - p_i)}$$ $\rightarrow$ abbia zeri e poli reali e distinti. ($m < m_b$) essendo un sistema proprio.

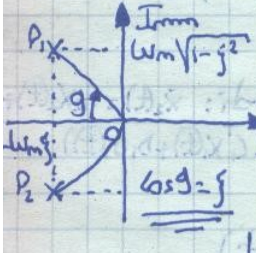
* POLI COMPLESSI E RISONANZA: $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ → funz. di trasferimento con $\omega_n > 0$ → pulsazione naturale; ξ → smorzamento

NB: $\omega = 2\pi/T$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$

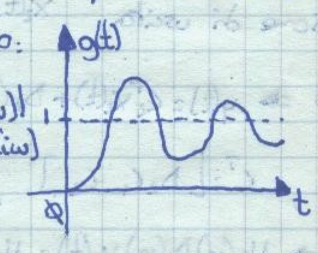
$f = \frac{1}{T} = T^{-1}$ ⇒ $f 2\pi = \omega$ ⇒ $\frac{\omega}{2\pi} = f$. Poli: $p_{1,2} = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$

↳ sono complessi quando $|\xi| < 1$ e hanno parte reale negativa per $\xi > 0$

NB: sist. esternamente stabile ⇒ $p_{1,2}$ stabili



Risposta allo scalino:



** NB: $\begin{cases} R(\omega) = |G(i\omega)| \\ \varphi(\omega) = \arg G(i\omega) \end{cases}$

* $i\omega = s$

$R(\omega) = |G(i\omega)|$

↳ sistema continuo

NB: * per la sostituzione si utilizzano le trasformate di Laplace.

$R(\omega) = |G(i\omega)| = \left| \dfrac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$;

$\varphi(\omega) = \arg(G(i\omega)) = \arg\left(\dfrac{\omega_n^2}{\bullet}\right) = -\arg\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) + i\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)$

$\bullet = (i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2$

Sia: ω_R = pulsazione di risonanza

$\omega_R : \dfrac{dR(\omega)}{d\omega} = 0$ ⇒ $\boxed{\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}}$

NB: un circuito è in risonanza quando tensione e corrente sono in fase.

NB: $(\omega_R < \omega_{osc} < \omega_n)$ per $\xi > 0$ ↳ dove: $\omega_{osc} = \mathrm{Imm}[p_{1,2}] = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

per $\xi = 0$ ⇒ $\omega_R = \omega_{osc} = \omega_n$. Per $\xi < 1/\sqrt{2}$ esiste il fenomeno di risonanza. Ampiezza picco di risonanza:

$R_{max} = |G(i\omega)| = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ e $R_{max} \to \infty$ per $\xi \to 0$.

Dunque:

$G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$. $G(s)$ può essere scritta così: $G(s) = \mu \dfrac{\prod(1 + s\tau_i)}{s^h \prod(1 + sT_j)} \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Per $|\xi| < 1$ ⇒ coppia di poli complessi coniugati. ⇒ $\dfrac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2}$ ⇒ $\left| \dfrac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2} \right| = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$

NB: Per $\omega \ll \omega_n$ si ha:

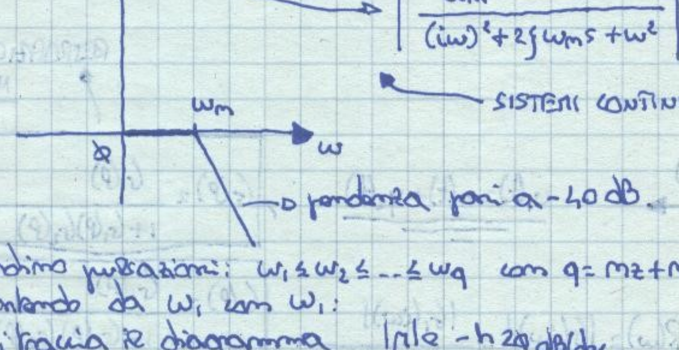
$\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \to 1$ ⇒ (0 dB)

Per $\omega \gg \omega_n$ si ha:

$\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \to \dfrac{\omega_n^2}{\omega^2}$ che in dB è:

$20\log_{10}\dfrac{\omega_n^2}{\omega^2} = 2 \cdot 20\log_{10}\omega_n - 2 \cdot 20\log_{10}\omega$

Quindi:

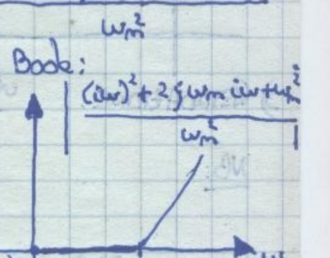


$\left| \dfrac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n s + \omega^2} \right|$

← SISTEMI CONTINUI →

NB: Se $G(s)$ con coppia di zeri coniugati: $\dfrac{(i\omega)^2 + 2\xi\omega_n i\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$

Diagramma di Bode:



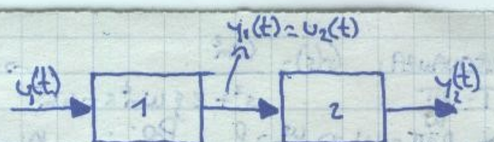
NB: 1) Ordino pulsazioni: $\omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_q$ con $q = m_z + m_p$ (poli e zeri non nulli)
2) Partendo da ω_1 con ω_1:
3) si traccia il diagramma $|\mu|$ e $-h\,20$ dB/dec. ↳ BASSE FREQUENZE.
per ALTE FREQUENZE.

NB: Per tracciare i diagrammi di Bode bisogna ricordarsi delle proprietà di logaritmi:
1) $\log a \cdot b = \log a + \log b$ Ad esempio: $|1 + sT| = |1 + i\omega T| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$ ⇒ $20\log_{10}\sqrt{1 + \omega^2T^2}$
2) $\log a/b = \log a - \log b$ NB: $Q_{dB} = 20\log_{10} Q$ ⇒ $Q \cdot 10$ ⇒ aumento di 20 di Q_{dB}.
3) $\log a^b = b \log a$
4) $\log_R a = -\log_{1/R} a$

$20\log_{10} 1 + 20\log_{10}\sqrt{\omega^2T^2} = 20\log_{10}\omega T$.

* AGGREGATI DI BODE: → CASCATA, → PARALLELO, → RETROAZIONE

1) CASCATA:



eq di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases}$$ (SIST. CONTINUO)

Lo eq o trasformazione di uscita

I sottosistemi 1 e 2 sono collegati in cascata e quindi:

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t)\end{cases} \quad \text{con } y(t) = C_2^T x_2(t) + D_2 u_2(t)$$

ma: $u_2(t) = y_1(t) = C_1^T x_1(t) + D_1 u_1(t) \Rightarrow y(t) = C_2^T x_2(t) + D_2 (C_1^T x_1(t) + D_1 u_1(t))$. Quindi: $\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 (C_1^T x_1(t) + D_1 u_1(t))$

con:
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [D_2 C_1 \;\; C_2], \quad D = [D_2 D_1]$$

Modello ARMA: $D_1(p) y_1(t) = N_1(p) u(t) \Rightarrow N_2(p) D_1(p) u_2(t) = N_2(p) N_1(p) u(t)$ (1° sottosist.)

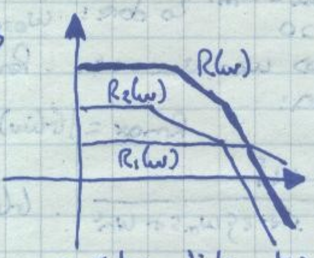
$D_2(p) y(t) = N_2(p) u_2(t)$ (2° sottosist.) $\Rightarrow D_1(p) D_2(p) y(t) = N_1(p) N_2(p) u(t)$

$$\begin{cases} N(p) = N_1(p) N_2(p) \\ D(p) = D_1(p) D_2(p) \end{cases}$$

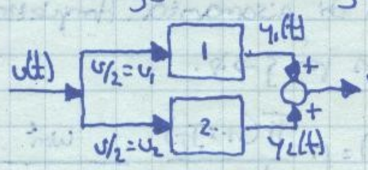
Quindi:
$$\boxed{G(p) = G_1(p) G_2(p)}$$

Però: $R(\omega) = |G(i\omega)| = |G_1(\omega) G_2(\omega)| = |G_1(i\omega)| \, |G_2(i\omega)| = R_1(\omega) R_2(\omega)$

Infatti:
$$R(\omega) = 20 \log_{10} (R_1(\omega) R_2(\omega)) = 20 \log_{10} R_1(\omega) + 20 \log_{10} R_2(\omega) = R_1(\omega)_{dB} + R_2(\omega)_{dB}$$



2) PARALLELO:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y(t) = C^T x(t) + Du(t) \end{cases}$$

Matrice di tipo triangolare.

Quindi: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1^T x_1(t) + D_1 u_1(t) + C_2^T x_2(t) + D_2 u_2(t) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \; C^T = [C_1 \; C_2]$

$D = [D_1 + D_2]$

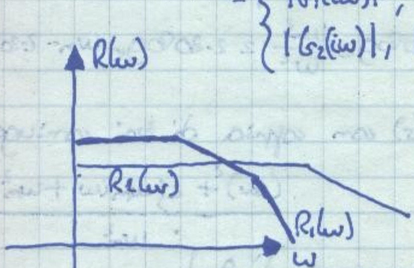
Analogamente: $D_1(p) y_1(t) = N_1(p) u_1(t)$ NB: $u_1 = u_2 = u$

$D_2(p) y_2(t) = N_2(p) u_2(t)$

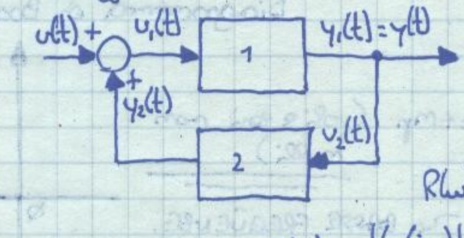
$$\begin{cases} D_2(p) D_1(p) y_1(t) = D_2(p) N_1(p) u(t) \\ D_1(p) D_2(p) y_2(t) = D_1(p) N_2(p) u(t) \end{cases} \Rightarrow D_1(p) D_2(p) y(t) = (D_1(p) N_2(p) + D_2(p) N_1(p)) u(t)$$

$$\boxed{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$$

Siccome:
$$R(\omega) = |G(i\omega)| = |G_1(i\omega) + G_2(i\omega)| = \begin{cases} |G_1(i\omega)|, & |G_1(i\omega)| \geq |G_2(i\omega)| \\ |G_2(i\omega)|, & |G_1(i\omega)| \leq |G_2(i\omega)| \end{cases}, \quad \underline{R(\omega) = \max (G_1(i\omega), G_2(i\omega))}.$$



3) RETROAZIONE:



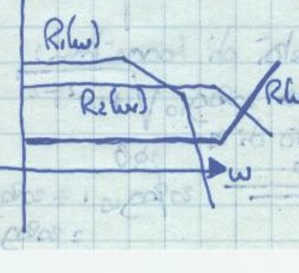
$\underline{u_1(t) = u(t) + y_2(t)}$,

$$\boxed{G(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) G_2(p)}}$$ RETROAZIONE NEGATIVA

$$\boxed{G(p) = \frac{G_1(p)}{1 - G_1(p) G_2(p)}}$$ RETROAZIONE POSITIVA

NB:

$$R(\omega) = |G(i\omega)| = \frac{|G_1(i\omega)|}{|1 + G_1(i\omega) G_2(i\omega)|}$$



$$R(\omega) = \frac{|G_1(i\omega)|}{\;} = \begin{cases} |G_1(i\omega)|, & |G_1(i\omega)| \leq \frac{1}{|G_2(i\omega)|} \\ 1/|G_2(i\omega)|, & |G_1(i\omega)| \geq \frac{1}{|G_2(i\omega)|} \end{cases}$$

NB: $\boxed{R(\omega) \cong \min (R_1(\omega), 1)}$

retroazione diretta $\underline{R_2(\omega) = 1}$.

$R(\omega) = (R_1(\omega), 1/R_2(\omega)) \min. \Rightarrow$