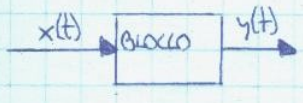


SCHEMI A BLOCCHI E TEORIA DEL CONTROLLO

Uno schema a blocchi è uno schema del seguente tipo:



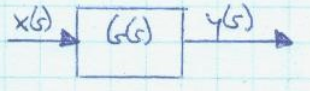
è una **black-box** con un ingresso $x(t)$ e un'uscita $y(t)$. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono della medesima natura, allora le seguente rapporto:

$\frac{y(t)}{x(t)} = g \rightarrow$ **guadagno**.

Se $x(t)$ e $y(t)$ sono di natura differente allora $\frac{y(t)}{x(t)} = G(t) \rightarrow$ **funzione di trasferimento**

Sia s una variabile complessa: $s = \sigma + j\omega$.

Nel dominio della variabile complessa si ha:

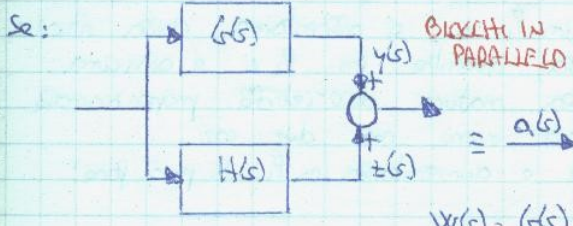


$\frac{y(s)}{x(s)} = G(s)$ In particolare:

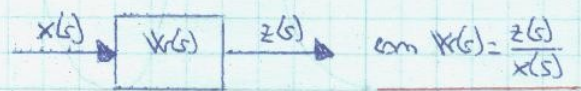


BLOCCHI IN CASATA

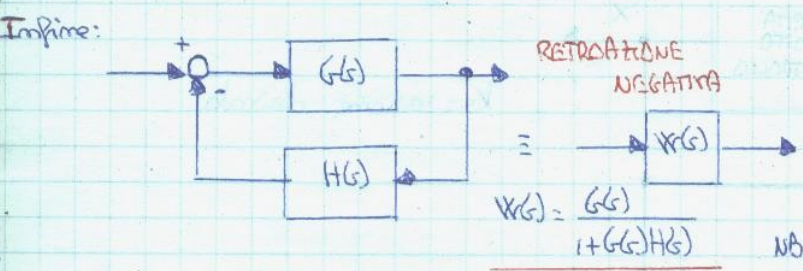
$W(s) = G(s) \cdot H(s)$



$W(s) = G(s) + H(s)$

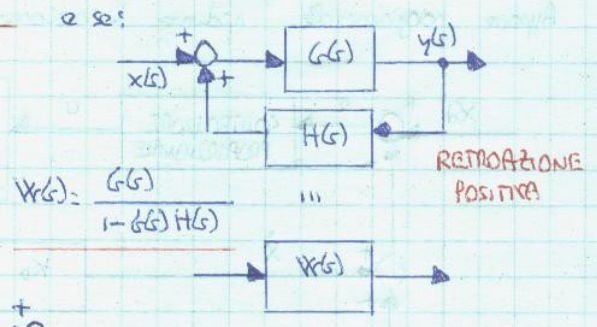


con $W(s) = \frac{z(s)}{x(s)}$



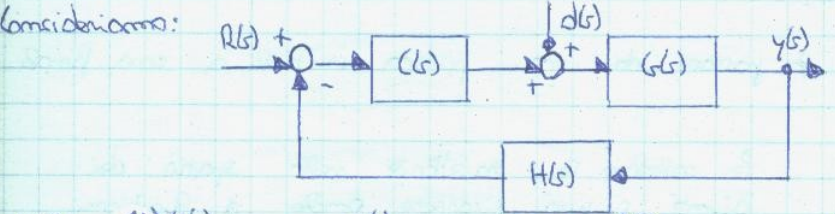
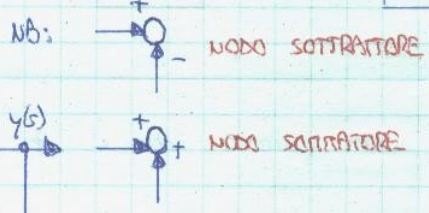
RETROAZIONE NEGATIVA

$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$



RETROAZIONE POSITIVA

$W(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$



$W(s) = \frac{G(s)G(s)}{1 + G(s)G(s)H(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$, $W_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G(s)H(s)} = \frac{Y(s)}{d(s)} \Rightarrow Y(s) = R(s)W(s) + d(s)W_0(s) = \frac{G(s)G(s)}{1 + G(s)G(s)H(s)} R(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)G(s)H(s)} d(s)$

$G(s)$ è la funzione di trasferimento del controllore. Quest'ultimo deve garantire l'asintotica stabilità dell'intero sistema di controllo. Per fare ciò è necessario che tutti i poli di $W(s)$ e $W_0(s)$ siano tutti a parte reale negativa. Si noti che:

$G(s) = \frac{1+sT_1}{1+sT_2} \Rightarrow \begin{cases} \text{zeri} = \text{radici del numeratore} \\ \text{poli} = \text{radici del denominatore} \end{cases}$

Consideriamo ora il **metodo di Lyapunov** è un metodo di studio la stabilità di un sistema dinamico senza risolvere le equazioni differenziali. Consideriamo che:

$\vec{e} = \vec{p}(t) \Rightarrow$ posto $\vec{p}(t) = \vec{q}$, lo stato di equilibrio risulta essere $\vec{e} = \vec{q}$. Si definisce **funzione di Lyapunov** una funzione scalare $V(\vec{e})$ continua insieme alla sua derivata prima tale che:

$V(\vec{e}) > \alpha \Rightarrow V \neq \vec{q}$ $V(\vec{e}) < \alpha \Rightarrow V \neq \vec{q}$ $\vec{e} = \vec{q}$ risulta essere globalmente asintoticamente stabile.

$V(\vec{e}) = \alpha$ per $\vec{e} = \vec{q}$ $V(\vec{e}) \rightarrow \infty$ per $\|\vec{e}\| \rightarrow \infty$

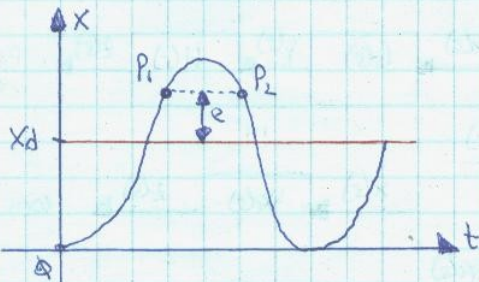
66

Questo accade se $V(\vec{e})$ è definita positiva cioè: $V(\vec{e}) = \vec{e}^T Q \vec{e}$ con Q una matrice simmetrica definita positiva. Si noti che:

$V(\vec{e}) = \vec{e}^T Q \vec{e}$ è una **forma quadratica**.

Quindi: $V(\vec{e}) = \vec{z}^T Q P(\vec{e})$

Supponiamo di avere la seguente situazione:

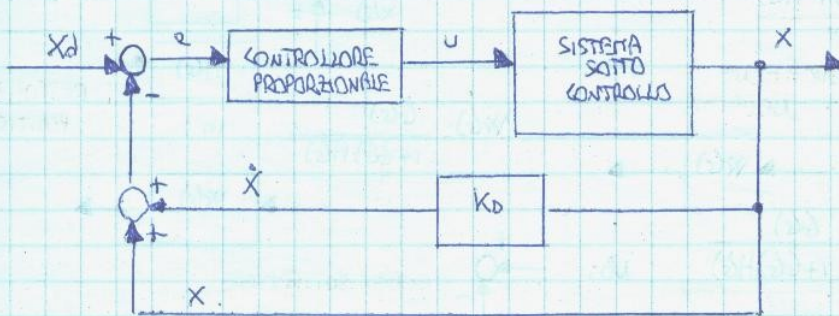


X = posizione.

X_d = X desiderata

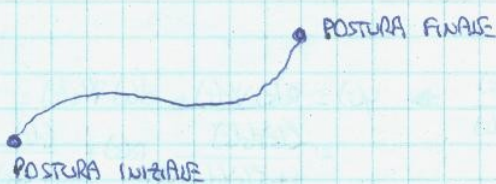
Si noti che in P_1 ci si allontana dalla situazione desiderata, mentre in P_2 ci si avvicina. A causa della natura del controllo proporzionale si ha lo stesso errore nei due casi.

Altre ragionevoli ridotte l'azione di controllo in P_2 e aumentarla in P_1 . Si può fare:

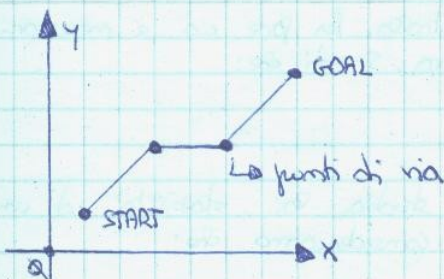


K_D = azione derivata.

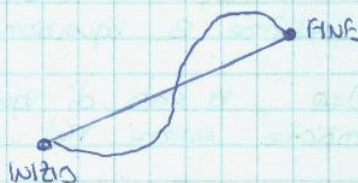
Consideriamo ora un percorso che ci fa passare da una postura iniziale a una finale.



Per calcolare le traiettorie nello spazio dei giunti si può ricorrere anche a funzioni elementari con raccordi parabolici. Supponiamo di interpolare linearmente nello spazio dei giunti tra postura iniziale e postura finale.



Questo metodo, per passare da velocità zero a velocità massima, richiederebbe accelerazioni infinite. In questo modo si usano i raccordi parabolici.



ANNOTAZIONI:

Analizziamo un metodo per calcolare e orientamento della mano del robot. Si usano in merito gli angoli di Eulero. In particolare si usa la rotazione ZXZ. Consideriamo:

$$R = R_{z,\varphi} \cdot R_{x,\theta} \cdot R_{y,\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi & -\cos\psi \cos\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_x & o_x & a_x \\ m_y & o_y & a_y \\ m_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_x &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi \\ m_y &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi \\ m_z &= \sin\theta \sin\varphi \\ o_x &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi \\ o_y &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi \\ o_z &= \sin\theta \cos\varphi \\ a_x &= \sin\psi \sin\theta \\ a_y &= -\cos\psi \sin\theta \\ a_z &= \cos\theta \sin\psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = \cos^{-1}(a_z) = \cos^{-1}(\sin\psi \cos\theta) \\ \psi = \cos^{-1}(o_z / \sin\theta) = \cos^{-1}\left(\frac{\sin\psi \cos\varphi}{\sin\theta}\right) \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-a_y}{\sin\theta}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\psi \sin\theta}{\sin\theta}\right) \end{cases}$$

La soluzione trovata è più difficile da calcolare. Si usa in realtà una funzione $\text{ATAN2}(y, x)$ così fatta:

$$\theta = \text{ATAN2}(y, x) = \begin{cases} \theta^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ & \text{per } +x, +y \\ 90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ & \text{per } -x, +y \\ -180^\circ \leq \varphi \leq -90^\circ & \text{per } -x, -y \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ & \text{per } +x, -y \end{cases}$$

Un metodo alternativo è il metodo di Paul:

$$R_{z,\varphi}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_x & o_x & a_x \\ m_y & o_y & a_y \\ m_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = R_{x,\theta} \cdot R_{y,\psi}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & \varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi & \varphi \\ \varphi & \varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x & o_x & a_x \\ m_y & o_y & a_y \\ m_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi & \varphi \\ \varphi & \cos\theta & -\sin\theta \\ \varphi & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & \varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi & \varphi \\ \varphi & \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} \cos\psi m_x + \sin\psi m_y & \cos\psi o_x - \sin\psi o_y & \cos\psi a_x + \sin\psi a_y \\ -\sin\psi m_x + \cos\psi m_y & -\sin\psi o_x - \cos\psi o_y & -\sin\psi a_x + \cos\psi a_y \\ m_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \varphi \\ \cos\theta \sin\psi & \cos\theta \cos\psi & -\sin\theta \\ \sin\theta \cos\psi & \sin\theta \sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Così si è spostata φ a sinistra. Quindi:

$$\cos\psi a_x + \sin\psi a_y = \varphi \Rightarrow \cos\psi a_x = -\sin\psi a_y \Rightarrow \frac{a_x}{a_y} = -\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = -\text{Tg}\psi \Rightarrow \text{Tg}\psi = -\frac{a_x}{a_y} \Rightarrow \psi = \text{Arctg}\left(\frac{a_x}{-a_y}\right) = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{a_x}{-a_y}\right)$$

Però: $\psi = \text{ATAN2}(a_x, -a_y)$. Analogamente:

$$\begin{cases} \cos\psi = \cos\psi m_x + \sin\psi m_y \\ \sin\psi = -\cos\psi o_x + \sin\psi o_y \end{cases} \Rightarrow \cos\psi = \frac{\cos\psi - \sin\psi m_y}{m_x} \text{ e cioè: } \sin\psi = -\left(\frac{\cos\psi - \sin\psi m_y}{m_x}\right) + \sin\psi o_y =$$

$$\text{Quindi: } \sin\psi m_x = -\cos\psi + \sin\psi m_y + \sin\psi o_y m_x \dots = \frac{-\cos\psi + \sin\psi m_y}{m_x} + \sin\psi o_y$$

$$\psi = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\right) = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{-\cos\psi o_x + \sin\psi o_y}{\cos\psi m_x + \sin\psi m_y}\right) = \text{ATAN2}(-\cos\psi o_x + \sin\psi o_y, \cos\psi m_x + \sin\psi m_y)$$

$$\text{Concludendo: } \begin{cases} \sin\theta = \sin\psi o_x - \cos\psi o_y \\ \cos\theta = a_z \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{\sin\psi o_x - \cos\psi o_y}{a_z}\right) = \text{ATAN2}(\sin\psi o_x - \cos\psi o_y, a_z)$$

58

Simoli che nel metodo di Paul si può si premoltiplicare da postmoltiplicare. Per quanto riguarda il jacobiano analitico si ha che è possibile esprimere la velocità dell'organo terminale del manipolatore in termini della velocità della terra solida alle origini terminali.

Impatti:

$$\begin{cases} \vec{p} = J_p(q) \cdot \dot{q} \\ \dot{\phi} = J_\phi(q) \cdot \dot{q} \end{cases}$$

Ci chiediamo ora se sia possibile calcolare il jacobiano direttamente attraverso un operatore di derivazione delle funzioni cinematiche dirette rispetto alle variabili di giunto. Si può scrivere:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q} = J_A(q) \cdot \dot{q} \rightarrow \text{jacobiano analitico.}$$

W ≠ φ. Immediatamente si considerino gli angoli 2ψ:

$$\begin{cases} [w_x \ w_y \ w_z]^T = \dot{\psi} [a \ a \ 1]^T \\ [w_x \ w_y \ w_z]^T = \dot{\psi} [-s_\psi \ c_\psi \ a]^T \\ [w_x \ w_y \ w_z]^T = \dot{\psi} [c_\psi s_\psi \ s_\psi c_\psi \ c_\psi]^T \end{cases} \quad (\psi, \psi, \psi)^T = \text{orientamento dell'end-effector nello spazio.}$$

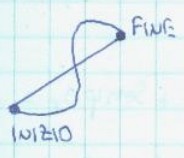
$$w = \begin{bmatrix} a & -s_\psi & c_\psi s_\psi \\ a & c_\psi & s_\psi s_\psi \\ 1 & a & c_\psi \end{bmatrix} \dot{\psi} = T(\psi) \cdot \dot{\psi}$$

↳ matrice di trasformazione.

Quindi: $J = T_A(\psi) J_A$

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\psi c_\psi - s_\psi s_\psi & -c_\psi c_\psi s_\psi - s_\psi c_\psi & c_\psi s_\psi \\ s_\psi c_\psi c_\psi + c_\psi s_\psi & -s_\psi c_\psi s_\psi + c_\psi c_\psi & s_\psi s_\psi \\ -s_\psi c_\psi & s_\psi s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \psi = \text{angolo } a, z \\ \psi = \text{angolo } a, y \\ \psi = \text{angolo } a, z \end{cases}$$

Noi abbiamo visto nella pianificazione della traiettoria una cosa del seguente tipo



Si ha un profilo di velocità trapezoidale. Impostiamo i valori massimi di velocità e accelerazione:

$$\begin{cases} t_c = \frac{v_{max}}{a_{max}} \\ h = a_{max} (t_p - t_c) \end{cases} \Rightarrow t_p = \frac{h}{a_{max}} + \frac{v_{max}}{a_{max}}, \quad t_p \geq 2t_c \Rightarrow h \geq \frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Se $h < \frac{v_{max}^2}{a_{max}} \Rightarrow$ PROFILO DI VELOCITA' TRIANGOLARE. $(t_p = 2t_c) \Rightarrow t_p = 2 \sqrt{\frac{h}{a_{max}}}$

FORMULE DI CASE:

- Rotazione attorno a z di un angolo θ : $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rotazione attorno a y di ψ :

$$R_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

- Rotazione attorno a x di ψ : $R_x(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Angoli di Eulero (zyz): $R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi & -\cos\psi \cos\theta \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\theta \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi & -\sin\psi \cos\theta \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix}$

- (RPY): $R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi & \cos\psi \sin\theta \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \\ \sin\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi & \sin\psi \sin\theta \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi \end{bmatrix}$

• Rotazione attorno ad un asse generico:

$$R(\theta, \vec{n}) = \begin{bmatrix} R_x^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta & R_x R_y (1 - \cos\theta) - R_z \sin\theta & R_x R_z (1 - \cos\theta) + R_y \sin\theta \\ R_x R_y (1 - \cos\theta) + R_z \sin\theta & R_y^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta & R_y R_z (1 - \cos\theta) - R_x \sin\theta \\ R_x R_z (1 - \cos\theta) - R_y \sin\theta & R_y R_z (1 - \cos\theta) + R_x \sin\theta & R_z^2 (1 - \cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$

• jacobiano:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} \vec{J}_p \\ \vec{J}_o \end{bmatrix}; S(t) = \text{MATRICE ANTISIMMETRICA } S(t) + S(t)^T = 0 \text{ con } S(t) = R(t)R(t)^T$$

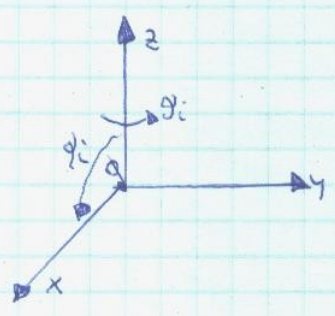
$$\begin{bmatrix} J_{pi} \\ J_{oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{GIUNTO PRISMATICO} \\ \begin{bmatrix} \vec{z}_{i-1} \times (\vec{P} - \vec{P}_{i-1}) \\ \vec{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{GIUNTO ROTAZIONALE} \end{cases}$$

Si noti che: $A_{i-1,i}^{i-1} = A_{i-1,i}^{i-1} \cdot A_{i,i}^{i-1}$ con $A_{i-1,i}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos d_i & -\sin d_i & 0 & 0 \\ \sin d_i & \cos d_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

RUOTO ATTORNO ALL'ASSE z E TRASLO LUNGO z DI d_i.

$$A_{i,i}^{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d_i & -\sin d_i & 0 \\ 0 & \sin d_i & \cos d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente si ha:



↳ rotazione attorno all'asse x.

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - h(q_p - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

$$|\ddot{q}_c| = \frac{h|q_p - q_i|}{t_f^2}$$

$$\ddot{q}_c = \frac{\ddot{q}_c^2}{q_i - q_p + \ddot{q}_c t_f}$$

Handwritten notes at the top of the page, including a date and some introductory text.

Handwritten notes in the upper middle section of the page.

Handwritten notes in the middle section of the page.

Handwritten notes in the lower middle section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.

Handwritten notes in the lower section of the page.