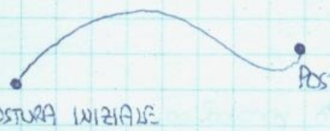
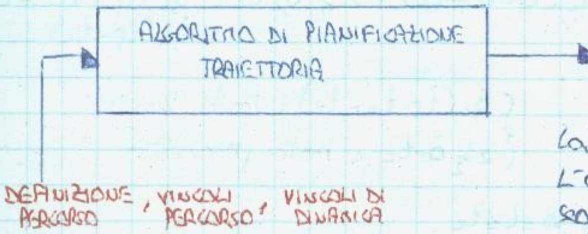
* PIANIFICAZIONE DELLE TRAIETTORIE:



Abbiamo bisogno di algoritmi che generano traiettorie a curvatura regolare.

Percorso = luogo dei punti nello spazio dei giunti (solo una descrizione dei giunti)
Traiettoria = percorso su cui è specificato una legge oraria



La definizione del percorso viene fatta nello spazio operativo. L'algoritmo di pianificazione delle traiettorie genera una sequenza temporale di variabili che specificano posizione ed orientamento dell'end-effector.

Il passaggio in prossimità di configurazioni singolari o in presenza di gradi di mobilità ridondanti, rendono ardue le pianificazioni nello spazio operativo. Qui è meglio specificare la traiettoria nello spazio dei giunti. Nello spazio dei giunti l'algoritmo di pianificazione genera una funzione $\vec{q}(t)$ che interpola i valori assegnati per le variabili di giunto nel rispetto dei vincoli imposti. All'algoritmo si richiede posizione e velocità continue nel tempo.

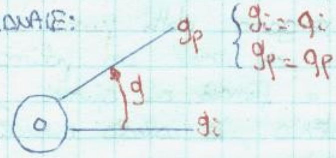
MOTO PUNTO A PUNTO = dove un manipolatore deve muoversi da una posizione iniziale ad una finale. Per imporre la legge di moto sul giunto si ha:

$q(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ (polinomio cubico). Quindi:

$\dot{q}(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$

$\ddot{q}(t) = 6a_3t + 2a_2$

e voglio avere: $\begin{cases} \dot{q}_i = 0 \\ \dot{q}_f = 0 \end{cases}$ GIUNTO ROTAZIONALE: $\begin{cases} q_i = q_i \\ q_f = q_f \end{cases}$



Perciò:

$q_i = a_0$

$\dot{q}_i = a_1$

$q_f = a_3t_f^3 + a_2t_f^2 + a_1t_f + a_0$

$\dot{q}_f = 3a_3t_f^2 + 2a_2t_f + a_1$

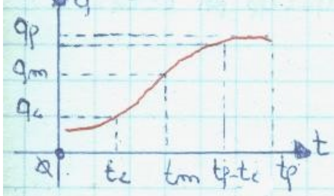
NB: velocità ha un andamento parabolico mentre l'accelerazione ha un andamento lineare.

Se voglio assegnare anche accelerazioni iniziali e finali si ha:

$q(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$

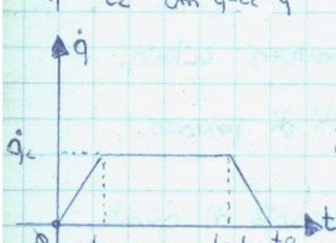
Bisogna verificare però se tali velocità ed accelerazioni sono consistenti con le caratteristiche fisiche del manipolatore.

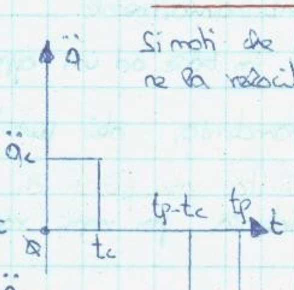
Si usa in merito il profilo di velocità trapezoidale.



Si noti che si ha una accelerazione costante in fase di partenza e una decelerazione costante in fase di arrivo.

$q_m = (q_f + q_i)/2$ con $t_m = t_f/2$





Si noti che la velocità alla fine del tratto parabolico deve uguagliare la velocità del tratto lineare. Quindi:

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

con q_c = valore assunto dalla variabile di giunto alla fine del tratto parabolico.

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2$$

Quindi:

$$\ddot{q}_c = \frac{q_m - q_c}{(t_m - t_c)t_c} \Rightarrow q_c = q_i + \frac{1}{2}\frac{q_m - q_c}{(t_m - t_c)t_c}t_c^2 \Rightarrow \dots$$

$$\ddot q_c t_c^2 - \ddot q_c t_f t_c + q_f - q_i = 0 \Rightarrow t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot q_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot q_c}}$$

Quindi per l'accelerazione si ha:
$$|\ddot q_c| \ge 4\frac{|q_f - q_i|}{t_f^2} \rightarrow \text{accelerazione nel tratto parabolico.}$$

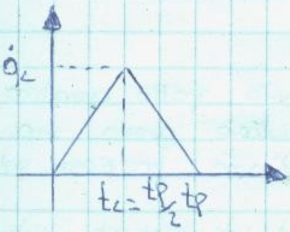
Si noti che:

$\frac{\dot q_c}{t_c}$ = pendenza della retta.

Quindi: $\ddot q_c = \frac{\dot q_c}{t_c} \Rightarrow \ddot q_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c} \Rightarrow q_f - q_i = \dot q_c (t_f - t_c - t_c) + 2\frac{1}{2}\dot q_c t_c = \dot q_c(t_f + 2t_c + t_c)$
$= \dot q_c(t_f - t_c)$

↳ rapporto incrementale.

$$\begin{cases} \dot q_c(t_f - t_c - t_c) = \text{tratto lineare} \\ 2\frac{1}{2}\dot q_c t_c = \text{tratto parabolico} \end{cases}$$



PROFILO TRIANGOLARE

Quindi:
$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot q_c t^2 & \text{per } 0 \le t \le t_c \\ q_i + \ddot q_c t_c (t - t_c/2) & \text{per } t_c \le t \le t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot q_c (t_f - t)^2 & \text{per } t_f - t_c \le t \le t_f \end{cases}$$

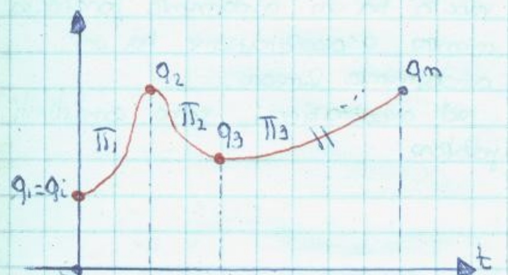
Si può quindi specificare la velocità di crociera $\dot q_c$.

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot q_c| < \frac{2|q_f - q_i|}{t_f} \quad \text{visto che } \dot q_c = \ddot q_c t_c$$

$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot q_c t_f}{\dot q_c} \quad \text{e} \quad \ddot q_c = \frac{\dot q_c^2}{q_i - q_f + \dot q_c t_f}$$

. Spesso però si ricorre a più di due punti per specificare un percorso. Si può assegnare una sequenza di punti per garantire un controllo maggiore sulla traiettoria.

Questi N punti vengono detti punti di percorso. Per ogni variabile di giunto si hanno N vincoli e si può pensare di usare un polinomio di grado N-1. Però così facendo non è possibile assegnare velocità iniziale e finale ai giunti, al crescere del grado del polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio, il calcolo risulta oneroso... Questi problemi vengono risolti usando un polinomio interpolatore.



Il polinomio interpolatore di grado più basso che può essere preso è il polinomio cubico. Si consideri una variabile di giunto. Si deve individuare una funzione $q(t)$ costituita da una sequenza di polinomi cubici $\Pi_K(t)$ con $K = 1 \dots N-1$ continua insieme alla sua derivata prima tale che:

$$q_K \text{ per } t = t_K, \quad q_1 = q_i \text{ per } t = 0, \quad q_N = q_f \text{ per } t = t_K.$$

Si possono presentare diverse situazioni:

1) i valori di $\dot q(t)$ nei punti di percorso sono imposti arbitrariamente
2) i valori di $\dot q(t)$ nei punti di percorso sono assegnati in base ad un opportuno criterio.
3) L'accelerazione $\ddot q(t)$ deve essere continua in corrispondenza dei punti di percorso.

→ Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di percorso.
Si specifica per ogni punto di percorso la velocità desiderata per ogni variabile di giunto.
Per calcolare gli N-1 polinomi cubici (i parametri) si ha:

$$\Pi_K(t_K) = q_K \quad \dot\Pi_K(t_K) = \dot q_K \quad \text{Tipicamente: } \dot q_1 = \dot q_N = 0$$
$$\Pi_K(t_{K+1}) = q_{K+1} \quad \dot\Pi_K(t_{K+1}) = \dot q_{K+1}$$

Per la continuità e la velocità nei punti intermedi:

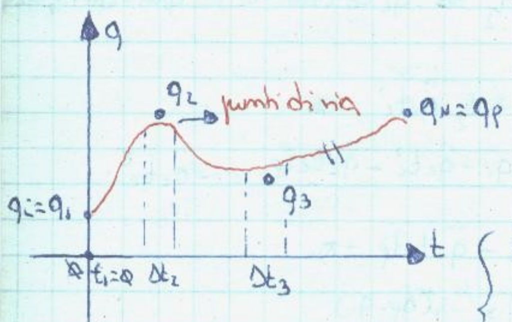
$$\dot{\Pi}_K(t_{K+1}) = \dot{\Pi}_{K+1}(t_{K+1}) \quad \text{per } K = 1 \dots N-2.$$

→ sequenza di polinomi con velocità calcolate nei punti di percorso.

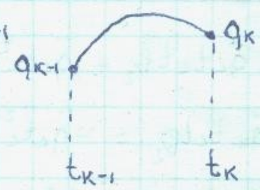
Si individua la velocità del giunto in corrispondenza del punto di percorso. Se si interpolano i punti di percorso con segmenti rettilinei si calcolano così le velocità:

$$\dot{q}_1 = 0$$
$$\dot{q}_K = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}(v_K + v_{K+1}) \end{cases} \quad \text{dove: } v_K = \frac{(q_K - q_{K-1})}{(t_K - t_{K-1})}$$
$$\dot{q}_N = 0$$

Si consideri ora il caso in cui si collegano N punti di percorso $q_1 \dots q_N$ negli istanti $t_1 \dots t_N$ con funzioni lineari. Per evitare discontinuità nella derivata prima in t_K, $q(t)$ assume un andamento parabolico nell'intorno di t_K.



$$\Delta t_K = t_K - t_{K-1}$$

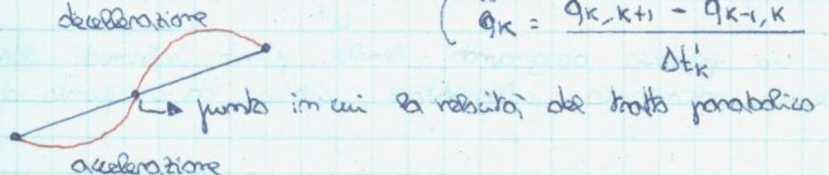


$$\Delta q_K = q_K - q_{K-1}$$

$\begin{cases} \dot{q}_{K,K+1} = \text{velocità} \\ \ddot{q}_K = \text{accelerazione} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{q}_{K-1,K} = \dfrac{q_K - q_{K-1}}{\Delta t_{K-1}} \\ \ddot{q}_K = \dfrac{\dot{q}_{K,K+1} - \dot{q}_{K-1,K}}{\Delta t'_K} \end{cases}$$

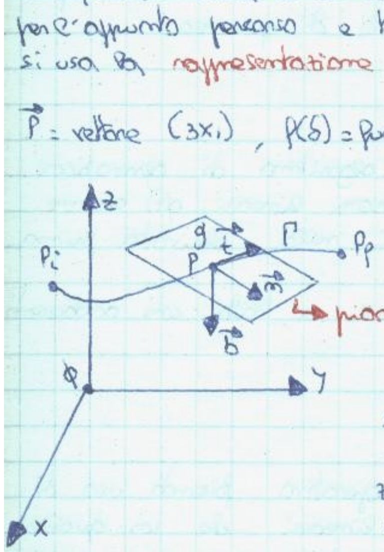
Tanto più elevata è la accelerazione nel tratto parabolico tanto più $q(t)$ passa vicino al punto di via.



Quando si desidera che il moto si sviluppi su un percorso di caratteristiche geometriche definite nello spazio operativo è necessario pianificare l'esecuzione della traiettoria direttamente nello stesso spazio. Per definire esattamente la traiettoria bisogna ricorrere alle primitive di moto che descrivono per l'appunto percorso e traiettoria in maniera completa. Per la definizione di queste primitive si usa la rappresentazione parametrica di una curva. Sia:

$\vec{P}$: vettore (3×1), $f(\delta)$ = funzione vettoriale continua ⇒ $\vec{P} = f(\delta)$ → RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

δ = parametro NB: Si può usare anche l'ascissa curvilinea 's' come parametro.



$\vec{b}$ = versore binormale

Quindi ricapitoliamo la descrizione del percorso viene di solito fatta nello spazio operativo perché quest'ultimo si presta bene alla descrizione del compito che il manipolatore stesso dovrà eseguire. L'algoritmo di pianificazione altro non fa che generare una sequenza temporale di variabili che specificano nel tempo posizione e orientamento dell'end-effector.

Come si vedrà l'azione di controllo viene esplicata a livello dei giunti, quindi dalla sequenza di variabili nello spazio cartesiano bisogna passare alla sequenza di variabili nello spazio dei giunti attraverso la cinematica inversa. Inoltre i vincoli dovuti agli ostacoli sono più facilmente descrivibili nello spazio operativo. Purtroppo in presenza di situazioni di singolarità o ridondanza, la pianificazione della traiettoria nello spazio operativo può presentare dei problemi. Nella pianificazione della traiettoria nello spazio dei giunti bisogna partire dalle posizioni iniziali e finali dell'end-effector nello spazio operativo, e attraverso la cinematica inversa trovare le corrispondenti configurazioni dei giunti. Abbiamo poi visto il MOTO PUNTO-PUNTO in cui il manipolatore deve muoversi da una configurazione iniziale verso una finale. Abbiamo anche visto che per imporre la legge di moto su un giunto si può usare un polinomio cubico. In ambito industriale però per verificare se velocità ed accelerazione sono consistenti con le caratteristiche fisiche del manipolatore si usa il profilo DI VELOCITÀ TRAPEZOIDALE. Abbiamo visto che la velocità del tratto lineare, nel punto medio, deve uguagliare la velocità alla fine di un tratto parabolico. Quindi:

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}, \quad q_c = q_i + \tfrac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_i - \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2}{t_m - t_c} \quad \text{ma} \quad t_m = t_f/2 \Rightarrow \ddot{q}_c t_c (t_m - t_c) = q_m - q_i - \tfrac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2$$

Quindi:

$$\ddot{q}_c t_c t_f/2 - \ddot{q}_c t_c^2 = \frac{q_f + q_i}{2} - q_i - \tfrac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2 \Rightarrow$$

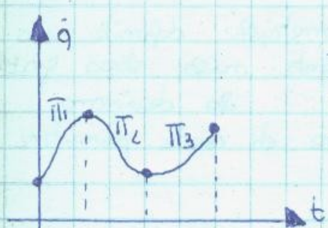
$$\Rightarrow \frac{q_f + q_i}{2} - q_i - \tfrac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_c t_f/2 = -\ddot{q}_c t_c^2 \Rightarrow \frac{q_f + q_i - 2q_i - \ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_c t_f}{2} = -\ddot{q}_c t_c^2$$

Perciò: $q_f + q_i - 2q_i - \ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_c t_f = -2\ddot{q}_c t_c^2 \Rightarrow \ddot{q}_c t_c^2 + q_f - q_i - \ddot{q}_c t_c t_f = 0$

Risolvendo si ha:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}, \quad |\ddot{q}_c| \geq \frac{4(q_f - q_i)}{t_f^2}$$

Si noti che si può anche pensare di seguire un percorso assegnando anche punti intermedi oltre ai punti estremi. Si può pensare di usare un polinomio interpolatore cubico da un punto di percorso all'altro.



Π_k è continua insieme alla sua derivata prima e si può assegnare una sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di percorso, oppure con velocità calcolate nei punti di percorso.

Poi bisogna anche considerare il caso in cui si vuole semplificare l'algoritmo di generazione delle traiettorie si desidera collegare N punti di percorso $q_1 \dots q_N$ con funzioni lineari. $q(t)$ assume un andamento parabolico in modo da evitare problemi di discontinuità nella derivata prima.

Qui la traiettoria assume un andamento lineare a tratti con andamenti parabolici vicino ai punti di via.

Abbiamo infine visto la pianificazione delle traiettorie nello spazio operativo facendo uso di primitive. Si ricordi che la cinematica diretta inserisce elementi non lineari che in qualche modo rendono imprevedibile l'andamento della traiettoria. Purtroppo l'uso della cinematica inversa per passare dallo spazio operativo allo spazio dei giunti comporta che la frequenza di campionamento delle variabili di giunto generale sia limitato.

* CONTROLLO DEL MOTO PER UN MANIPOLATORE

Esistono due filosofie di controllo per quanto riguarda un manipolatore, che sono:

1) controllo nello spazio dei giunti
2) controllo nello spazio operativo

Vediamone i relativi schemi:

$e = q_d - q$

CONTROLLO NELLO SPAZIO DEI GIUNTI

$e = X_d - X$

CONTROLLO NELLO SPAZIO OPERATIVO

Si può facilmente notare che la struttura di controllo presenta sempre un anello in retroazione. La soluzione del controllo nello spazio di giunti è un problema complesso che si divide in due sottoproblemi:

1) problema dell'inversione della cinematica.
2) realizzazione di un sistema di controllo.

La soluzione del controllo nello spazio operativo invece richiede una maggiore complessità algoritmica. Qui l'inversione della cinematica avviene all'interno dell'anello di controllo. Abbiamo visto che l'equazione di moto per un manipolatore:

$$B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q},\dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + F_v\dot{\vec{q}} + g(\vec{q}) = \vec{\tau}$$

Noi vogliamo realizzare un moto $\vec{q}(t)$ tale che:

$\vec{q}(t) = \vec{q}_d(t)$

Sia $\vec{q}_m$ il vettore delle variabili di posizione degli attuatori, gli organi di trasmissione stabiliscono che:

$$K_R\vec{q} = \vec{q}_m$$

con K_R che è una matrice diagonale $(n \times n)$.

K_R è una matrice diagonale e quindi un attuatore non induce moti su giunti differenti da quello attuato. Quindi:

$$\vec{\tau}_m = K_R^{-1}\vec{\tau}$$

NB: $B(\vec{q}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, b_{11} e b_{22} sono indipendenti dalla normale configurazione del manipolatore.

Si pone:

$$B(\vec{q}) = \bar{B} + \Delta B(\vec{q})$$

, $\bar{B}$ = matrice diagonale

Quindi: $\vec{\tau}_m = K_R^{-1}\bar{B}K_R^{-1}\ddot{\vec{q}}_m + F_m\dot{\vec{q}}_m + \vec{d}$. Infatti: $\vec{\tau}_m = K_R^{-1}(B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q},\dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + F_v\dot{\vec{q}} + g(\vec{q})) =$

$= K_R^{-1}B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + K_R^{-1}C(\vec{q},\dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + K_R^{-1}F_v\dot{\vec{q}} + K_R^{-1}g(\vec{q}) = K_R^{-1}B(\vec{q})K_R^{-1}\ddot{\vec{q}}_m + K_R^{-1}C(\vec{q},\dot{\vec{q}})K_R^{-1}\dot{\vec{q}}_m + K_R^{-1}F_vK_R^{-1}\dot{\vec{q}}_m$

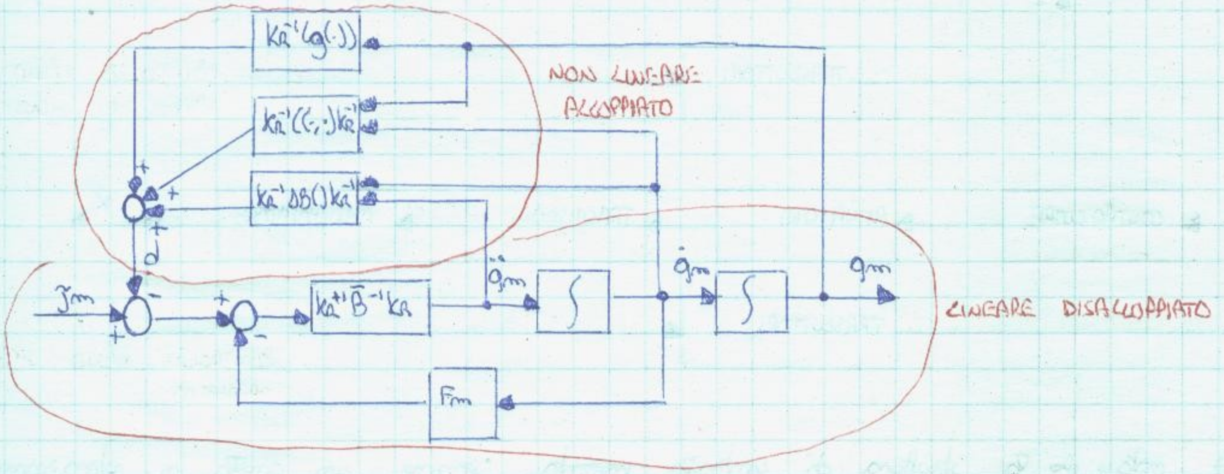
$+ K_R^{-1}g(\vec{q})$

Ma: $B(\vec{q}) = \bar{B} + \Delta B(\vec{q})$ e quindi:

$$\vec{\tau}_m = K_R^{-1}(\bar{B} + \Delta B(\vec{q}))\ddot{\vec{q}}_m K_R^{-1} + K_R^{-1} C(\vec{q},\dot{\vec{q}}) K_R^{-1}\dot{\vec{q}}_m + K_R^{-1} \vec{F}_v K_R^{-1} \dot{\vec{q}}_m + K_R^{-1} g(\vec{q})$$

Posto: $\vec{F}_m = K_R^{-1}\vec{F}_v K_R^{-1}$ e $\vec{d} = K_R^{-1}\Delta B(\vec{q})\ddot{\vec{q}}_m K_R^{-1} + K_R^{-1} C(\vec{q},\dot{\vec{q}}) K_R^{-1}\dot{\vec{q}}_m + K_R^{-1} g(\vec{q})$

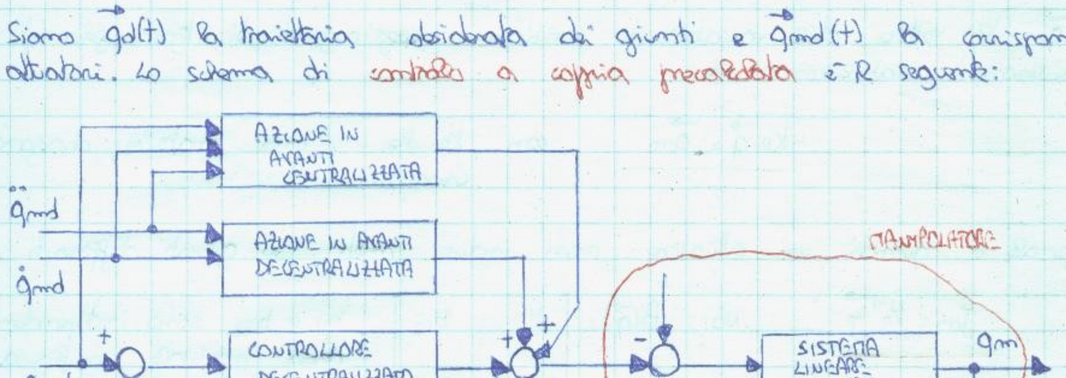
Quindi abbiamo: $\vec{\tau}_m = K_R^{-1}\bar{B}K_R^{-1}\ddot{\vec{q}}_m + F_m\dot{\vec{q}}_m + \vec{d}$



Si noti che la parte lineare disaccoppiata è tale perché ogni componente di τ_m influenza solo il relativo q_m cioè una coppia influenza un giunto e non più giunti. La parte non lineare e accoppiata è tale perché ogni contributo di moto influenza gli altri con effetti non lineari di interazione. Si ha una struttura decentralizzata del controllore quando ogni giunto è visto in maniera indipendente dall'altro e quindi il controllore si basa principalmente sull'errore di controllo e. A volte invece è meglio cercare di eliminare le cause degli errori piuttosto che ridurre gli effetti provocati dagli stessi. Quindi si passa ad uno schema di controllo centralizzato. Analizziamo prima la struttura decentralizzata. L'adozione di un'azione di compensazione in avanti decentralizzata consente di ridurre l'errore di inseguimento. Consideriamo un giunto rotoidale in cui l'errore di inseguimento è:

$$e = q_d(t) - q(t)$$

Siano $\vec{q}_d(t)$ la traiettoria desiderata dei giunti e $\vec{q}_{md}(t)$ la corrispondente traiettoria per gli attuatori. Lo schema di controllo a coppia precalcolata è il seguente:



In sostanza le interazioni esistenti tra i vari giunti espresse dal disturbo d, vengono compensate da un'azione centralizzata che genera un'azione la quale compensa i termini non lineari di accoppiamento.

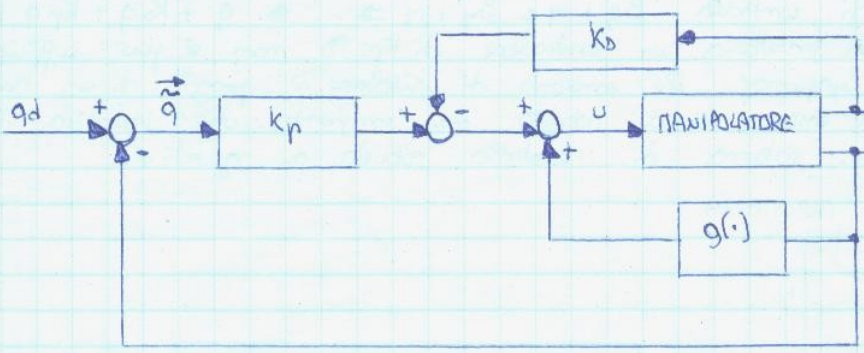
Il grande vantaggio di tale tecnica risiede nel fatto che si richiede alla struttura di controllo in retroazione minori sforzi di reiezione del disturbo.
Si ricordi però che un manipolatore è un sistema multivariabile con n ingressi (le coppie dei giunti) ed n uscite (le posizioni dei giunti), tra di loro interagenti con legami di tipo non lineare. Questo approccio porta all'individuazione di leggi di controllo centralizzate non lineari. Sia ora assegnato il vettore $\vec{q}_d$ delle posizioni desiderate dei giunti. Mediante la chiusura di anelli di posizione su ogni giunto, si vuole individuare la struttura del controllore che assicura la stabilità asintotica globale della posizione di equilibrio. Per fare ciò si usa Lyapunov. Sia:

$[\vec{\tilde{q}}^T, \dot{\vec{q}}^T]^T$ lo stato del sistema e $\underline{\vec{\tilde{q}} = \vec{q}_d - \vec{q}}$ è l'errore.

Assumendo un'azione di controllo del seguente tipo:

$\underline{\vec{u} = g(\vec{q}) + K_P\vec{\tilde{q}} - K_D\dot{\vec{q}}}$ con K_D definita positiva, ovvero un'azione di compensazione non lineare dei termini gravitazionali, ed un'azione lineare proporzionale e derivativa (PD).

Quindi in merito si usa un controllore PD:



COMPENSAZIONE DI GRAVITÀ

si ottiene errore nullo con riferimento di posizione costante e lo stato di equilibrio è globalmente stabile.

Si dimostra che qualunque postura di equilibrio del manipolatore risulta globalmente asintoticamente stabile, se il controllo esplica un'azione lineare di tipo PD e un'azione non lineare di compensazione degli effetti gravitazionali. Consideriamo ora il problema di inseguire una traiettoria specificata nello spazio dei giunti. Il modello dinamico di un manipolatore a n giunti è:

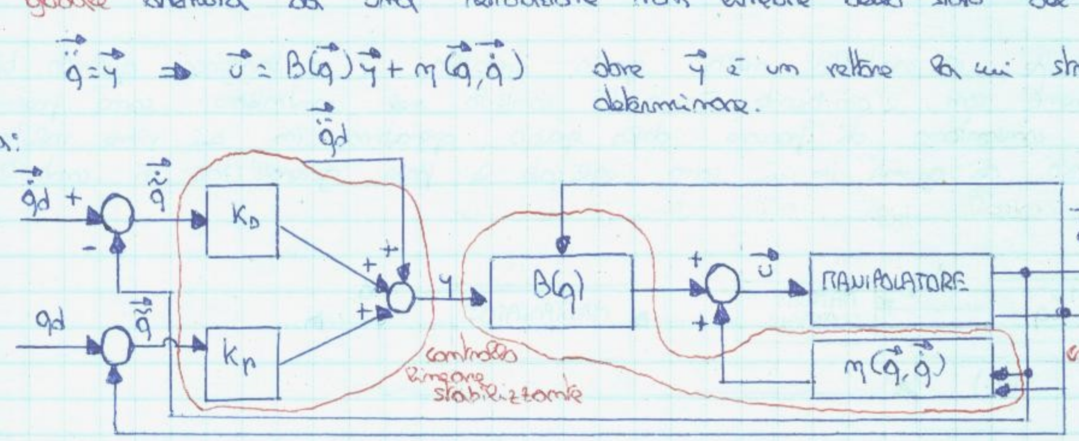
$$\underline{B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + n(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \vec{u}}$$

Si individua un vettore di controllo $\vec{u}$, funzione dello stato di sistema, che sia in grado di realizzare relazioni ingresso-uscita che presentino caratteristiche lineari. Si vuole una linearizzazione globale ottenuta da una retroazione non lineare dello stato del sistema.
Posto:

$\ddot{\vec{q}} = \vec{y} \Rightarrow \vec{u} = B(\vec{q})\vec{y} + n(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ dove $\vec{y}$ è un vettore la cui struttura è da determinare.

Schema:

CONTROLLO A DINAMICA INVERSA



COMPENSAZIONE NON LINEARE E DISACCOPPIAMENTO.

Il controllo si dice a dinamica inversa poiché si basa sul calcolo della dinamica inversa del manipolatore. Si noti che la variabile y_i influenza solo la variabile q_i. Quindi il problema di controllo si riconduce alla individuazione di una legge di controllo $\vec{y}$ che sia stabilizzante. Quindi:

$$\vec{y} = -K_P\vec{q} - K_D\dot{\vec{q}} + \vec{R} \Rightarrow \ddot{\vec{q}} + K_D\dot{\vec{q}} + K_P\vec{q} = \vec{R}$$

Se K_P e K_D sono definite positive il sistema risulta asintoticamente stabile. Nello schema si nota che l'anello interno svolge la funzione di rendere disponibile un legame di ingresso-uscita lineare e disaccoppiato, mentre l'anello esterno stabilizza il sistema complessivo. Purtroppo qui le compensazioni sono imperfette sia per l'incertezza del modello che per le approssimazioni introdotte nel calcolo in linea della dinamica inversa. Quindi nel caso di compensazione imperfetta è realistico assumere che:

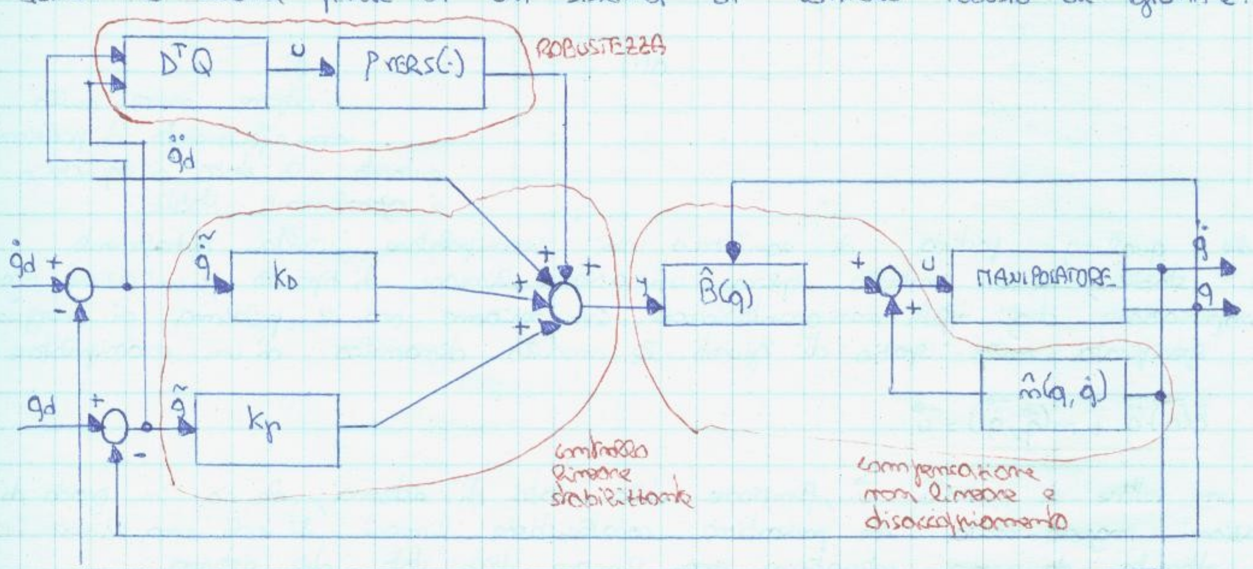
$$\vec{u} = \hat{B}(\vec{q})y + \hat{m}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$$

dove $\hat{B}$ e $\hat{m}$ rappresentano il modello computazionale usato.

Poi:

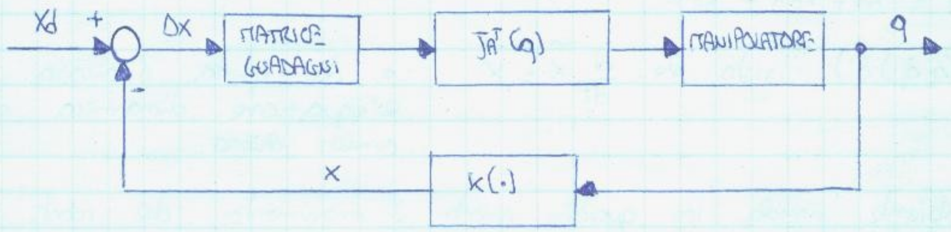
$$\tilde{B} = \hat{B} - B \quad , \quad \tilde{m} = \hat{m} - m$$ → errore di incertezza

Utilizzando la seguente legge di controllo $B\ddot{\vec{q}} + m = \hat{B}\vec{y} + \hat{m} \Rightarrow \dots \Rightarrow \ddot{\tilde{\vec{q}}} + K_D\dot{\tilde{\vec{q}}} + K_P\tilde{\vec{q}} = \eta$ per garantire un inseguimento della traiettoria un controllore di tipo PD non è più sufficiente. Si usa invece il metodo di Lyapunov che consente di risolvere il progetto di un anello esterno di retroazione basato sull'errore, che sia robusto nei confronti dell'incertezza $\vec{\eta}$. Quindi lo schema finale di un sistema di controllo robusto ai giunti è:



Abbiamo già detto che il controllo nello spazio operativo è vantaggioso quando bisogna interagire direttamente con l'ambiente. In questo contesto nel controllore sono presenti delle azioni che consentono di passare dallo spazio operativo in cui viene valutato l'errore allo spazio dei giunti in cui sono applicate le forze generalizzate di controllo. Si può pervenire al controllo con inversa dello Jacobiano.

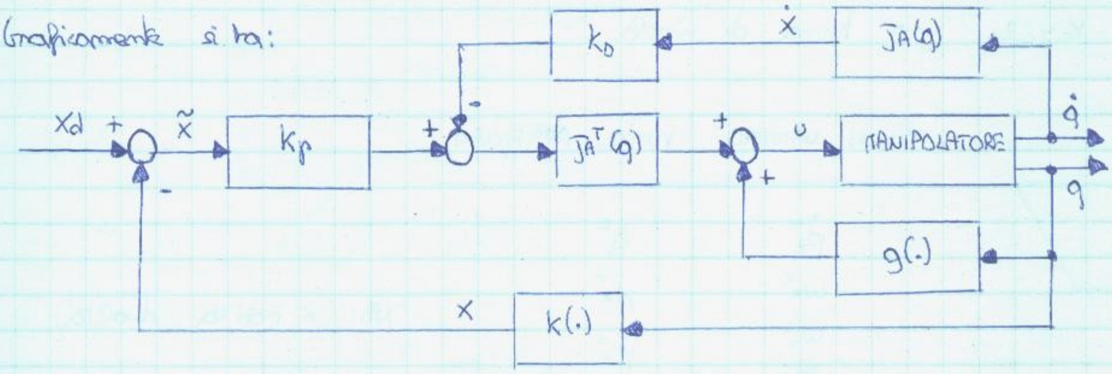
oppure al controllo con trasposta dello jacobiano.



Qui, l'errore di posizione nello spazio operativo è prima trattato da una matrice di guadagni. In uscita si ha una forza generalizzata che tende a ridurre Δx. Questa forza nello spazio operativo deve essere poi trasformata nelle forze generalizzate agenti sui giunti, per poter realizzare il comportamento descritto. Per quanto riguarda la stabilità di postura, assegnato Xd costante, si vuole individuare una struttura del controllore tale che:

$\tilde{x} = x_d - x$

Graficamente si ha:



controllo PD nello spazio operativo con compensazione di gravità

Analogamente si pone ora il problema di inseguire una traiettoria specificata nello spazio operativo. Ricordandoci che:

$$\vec{u} = B(q)\ddot{\vec{q}} + n(\vec{q},\dot{\vec{q}}) \Rightarrow \vec{u} = B(q)\vec{y} + n(\vec{q},\dot{\vec{q}})$$

si perviene ad uno schema simile a quello della dinamica inversa per lo spazio dei giunti, con l'inserimento però sulle linee di retroazione dei vari jacobiani analitici.
Molto spesso il manipolatore deve interagire con l'ambiente circostante. Questo comporta che l'ambiente pone dei vincoli stringenti ai percorsi geometrici che devono essere seguiti dall'organo terminale del manipolatore. Quindi si ha un moto vincolato. La grandezza che descrive lo stato di interazione in maniera completa è la forza di contatto. Le strategie di controllo dell'interazione sono:

1) controllo indiretto di forza (controllo di cedevolezza, controllo di forza).
2) controllo diretto di forza

Per quanto riguarda il controllo di cedevolezza, le specifiche dei movimenti avvengono nello spazio operativo. Quindi l'errore viene formato nello spazio operativo e la cinematica inversa è inglobata dentro l'anello di controllo. Qui le strategie di controllo risultano essere più pesanti computazionalmente. Quindi siccome il robot deve interagire con l'ambiente ha senso passare allo spazio operativo. Sia:

$$\tilde{x} = x_d - x$$

$$\underbrace{J_A(\vec q,\dot{\vec q})\ddot{\vec q} + \dot J_A(\vec q,\dot{\vec q})\dot{\vec q}}_{d/dt\,(J_A(\vec q,\dot{\vec q})\dot{\vec q})} = \ddot x_d + K_D \dot{\tilde x} + K_P \tilde x$$

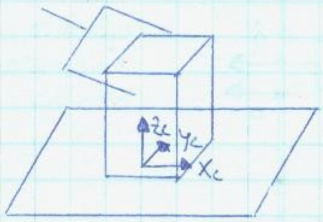
visto che $\frac{d}{dt}\dot{\vec x} = \ddot x$ e da questa si ricava l'equazione dinamica dell'anello chiuso.

Abbiamo detto che l'ambiente vincola in qualche modo il movimento del robot. Si può avere una traslazione vincolata lungo lungo la direzione ortogonale al piano e in tal caso si usa il controllo di forza, oppure si può avere un vincolo lungo la direzione tangente al piano e in tal caso si usa il controllo di moto. Lungo ciascun grado di libertà nello spazio del compito, l'ambiente impone all'organo terminale un vincolo di posizione o un vincolo di forza. Questi sono vincoli naturali e sono direttamente determinati dalla geometria del compito. Il manipolatore poi può controllare le sole variabili non soggette ai vincoli naturali. I valori di queste variabili prendono il nome di vincoli artificiali. Sia:

$O_c - x_c y_c z_c$ una terna di vincolo.

Es:

①



VINCOLI NATURALI	VINCOLI ARTIFICIALI
$\dot p_z^c$	f_z^c
ω_x^c	μ_x^c
ω_y^c	
f_x^c	$\dot p_x^c$
f_y^c	$\dot p_y^c$
μ_z^c	ω_z^c

NB: si nota la dualità.

Questo suggerisce che ci sia una struttura che consenta di controllare solo le variabili non soggette a vincoli naturali. Infatti l'azione di controllo non deve assolutamente avere effetto su variabili già soggette a vincoli da parte dell'ambiente. I vincoli naturali vengono descritti specificando i vettori della velocità e di forza espresse nella terna dei vincoli.

$$\begin{cases} \Sigma v^c = v_n^c \\ (I-\Sigma)h^c = h_n^c \end{cases}$$

Σ = matrice di selezione.

v_n^c e h_n^c sono vincoli naturali.
L'insieme dei vincoli artificiali si può così specificare:

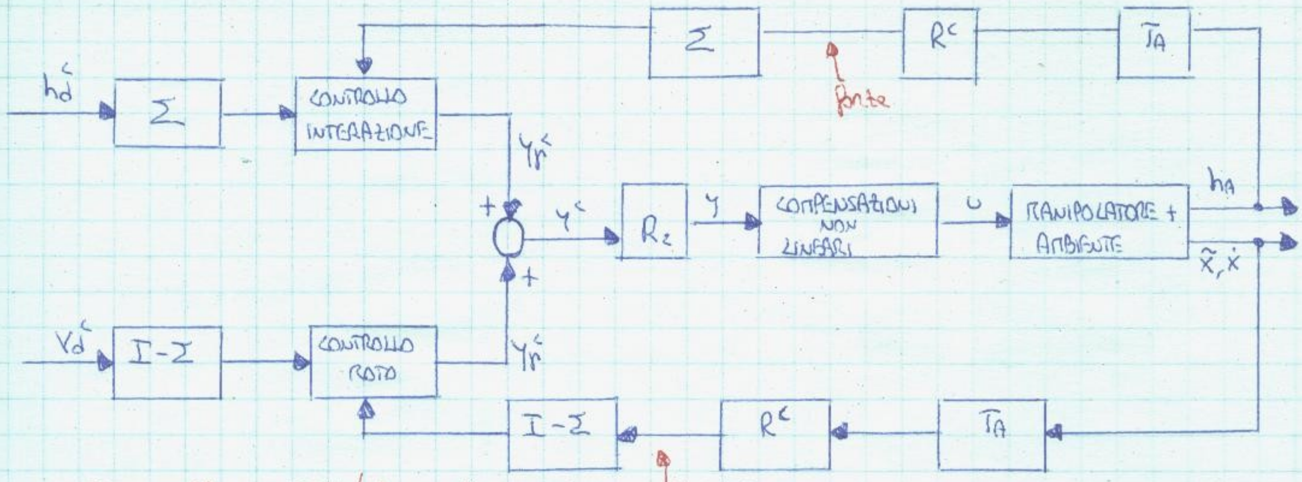
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & \cdots & \\ & \cdots & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

1 = vincolo naturale sulla velocità.
0 = vincolo naturale sulla forza.

$$\begin{cases} (I-\Sigma)v^c = v_a^c \\ \Sigma h^c = h_a^c \end{cases}$$

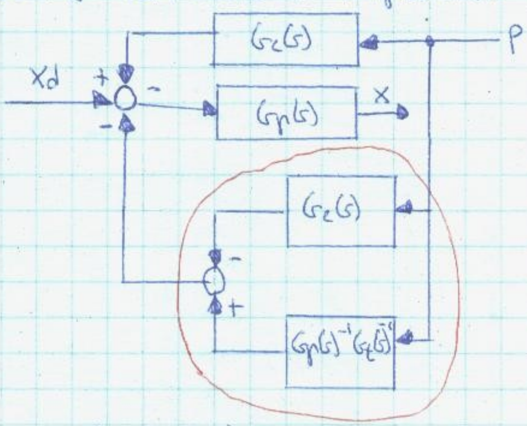
La matrice diagonale.

La matrice di selezione consente di selezionare le azioni di controllo appropriate.
Lo schema è il seguente:



CONTROLLO IBRIDO FORZA/POSIZIONE

Si sa che nel contatto meccanico il flusso è la velocità mentre lo sforzo è la forza. Si definisce impedenza meccanica come la relazione dinamica tra forza e velocità. Il controllo di impedenza fa in modo che il manipolatore controllato in posizione e interazione con l'ambiente manifesti un comportamento di una impedenza. Mentre il controllo ibrido/rigido è una strategia di controllo elegante ma può succedere che sia richiesta una perfetta pianificazione del compito (per esempio un piano obliquo).
Nel controllo di impedenza non c'è più questa distinzione rigida. La cosa è più tollerante. Se non si può andare lungo una determinata direzione, non si va.
Vediamo il controllore di impedenza:



$$G_p(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}$$

$$G_c(s) = \frac{1}{R(s)}$$

$$x = G_p\left[x_d - G_c \cdot p - (G_p^{-1}G_t^{-1} - G_c)\,p\right] = G_p\left(x_d - \cancel{G_c p} - G_p^{-1}G_t^{-1}p + \cancel{G_c p}\right] = G_p x_d - G_t^{-1}p$$

con $p = G_t(G_p x_d - x) = G_t(x_d - x) + \underbrace{G_t(G_p - 1)x_d}_{H(s)}$ e il risultato finale è:

$$\underline{p = G_t(s)(x_d - x) + H(s)x_d}.$$

L'obbiettivo è che il sistema reagisca bene di fronte a forze di contatto. Si noti che $G_t(s)$ esprime il legame tra gli errori di posizione e la forza di contatto.