Sia $\vec{p}$ il vettore che rappresenta l'origine della terna rispetto alla terna base. Quindi la velocità di traslazione della terna utensile è:

$\dot{\vec{p}} = \frac{\partial p}{\partial q}\dot{\vec{q}} = \vec{J}_P(q)\cdot\dot{\vec{q}}$ mentre per quanto riguarda la velocità di rotazione della terna utensile si ha:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\cdot\dot{\vec{q}} = J_\phi(q)\cdot\dot{\vec{q}}$$

Quindi: $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix}\dot{\vec{p}} \\ \dot{\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{J}_P(q) \\ \vec{J}_\phi(q)\end{bmatrix}\cdot\dot{\vec{q}} = \vec{J}_A(q)\cdot\dot{\vec{q}}$

NB: $\dot{\phi} \neq \omega$

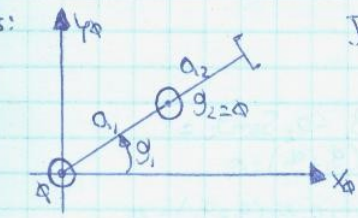
dove $\vec{J}_A(q)$ = jacobiano analitico.

Abbiamo visto che: $\vec{V} = J(q)\cdot\dot{\vec{q}}$ con $\vec{V} = [\dot{\vec{p}}^T \ \vec{\omega}^T]^T$ e quelle configurazioni per cui J diminuisce di rango sono le singolarità cinematiche.
Con le singolarità cinematiche si ha una perdita di mobilità della struttura, e possono esistere infinite soluzioni della cinematica inversa. Si hanno:

1) singolarità ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile (manipolatore tutto steso o ripiegato su se stesso.)

2) singolarità all'interno dello spazio di lavoro raggiungibile.

Es:




Jacobiano: $J = \begin{bmatrix} -a_1 \mathrm{sen}\, q_1 - a_2 \mathrm{sen}(q_1+q_2) & -a_2 \mathrm{sen}(q_1+q_2) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) & a_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$

$\det J = \left(-a_1 \mathrm{sen}\, q_1 - a_2 \mathrm{sen}(q_1+q_2)\right)\cdot a_2\cos(q_1+q_2) - \left(-a_2\mathrm{sen}(q_1+q_2)\right)\cdot\left(a_1\cos q_1 + a_2\cos(q_1+q_2)\right) = -a_1 \mathrm{sen}\, q_1\, a_2\cos(q_1+q_2) - \cancel{a_2^2 \mathrm{sen}(q_1+q_2)\cos(q_1+q_2)} + a_2\mathrm{sen}(q_1+q_2)\, a_1\cos q_1 + \cancel{a_2^2\mathrm{sen}(q_1+q_2)\cos(q_1+q_2)} =$
$= -a_1 a_2\left(\mathrm{sen}\, q_1 \cos(q_1+q_2)\right) + a_1 a_2\left(\mathrm{sen}(q_1+q_2)\cos q_1\right) =$
$= a_1 a_2\, \mathrm{sen}\, q_2$

confine esterno

$\det(J) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\, q_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 0 \\ q_2 = \pi \end{cases}$

confine interno

Per i manipolatori con polso sferico si ha: $J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}$ → singolarità della struttura portante → singolarità del polso.

$J_{21} = [\vec{z}_3 \times (\vec{p}-\vec{p}_3) \quad z_4 \times (\vec{p}-\vec{p}_4) \quad z_5\times(\vec{p}-\vec{p}_5)]$

$J_{22} = [\vec{z}_3 \ \vec{z}_4 \ \vec{z}_5]$ NB: le singolarità sono caratteristiche della struttura meccanica e non dipendono dalle terne scelte.

Scegliendo $\vec{P} = \vec{P}_W$ si ha: $J_{21} = [0\ 0\ 0] \Rightarrow \vec{p}_W - \vec{p}_i$ sono paralleli a $z_i$. Quindi:

$\det(J) = \det(J_{11})\cdot\det(J_{22})$.

DISACCOPPIAMENTO DI SINGOLARITÀ: $\det(J_{11})\cdot\det(J_{22}) = \det(J)$
SINGOLARITÀ DI STRUTTURA PORTANTE: $\det(J_{11}) = 0$
SINGOLARITÀ DEL POLSO: $\det(J_{22}) = 0$

Abbiamo visto che la ridondanza è legata al numero di gradi di mobilità della struttura (n), al numero di variabili necessarie per caratterizzare lo spazio operativo (m), e al numero di variabili nello spazio operativo necessarie per specificare il compito (R). Noi sappiamo che:

$\vec{V} = J(q)\cdot\dot{\vec{q}}$ dove $\vec{J}$ è la matrice $(R\times n)$ estratta dallo jacobiano geometrico, $\vec{V}$ è il vettore $(R\times 1)$ delle velocità del terminale e $\dot{\vec{q}}$ è il vettore $(n\times 1)$ delle velocità dei giunti. Quindi: $n-R$ = gradi di mobilità ridondanti.

Se: $\vec{v} = J(q)\cdot\dot{\vec{q}}$ si può trovare $\dot{\vec{q}}$ facendo una semplice inversione:

$\dot{\vec{q}} = J^{-1}(q)\cdot\vec{v}$ e nota la postura iniziale del problema si ha: $q(0) \Rightarrow q(t) = \int_0^t \dot{q}(\xi)\,d\xi + q(0)$

Infatti: $\dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{q}}{dt} = J^{-1}(q)\cdot\vec{v} \Rightarrow d\vec{q} = J^{-1}(q)\cdot\vec{v}\,dt \Rightarrow \int_0^{\vec{q}(t)} d\vec{q} = \int_0^t J^{-1}(q)\vec{v}\,dt \Rightarrow q(t) - q(0) = \int_0^t J^{-1}(q)\vec{v}\,dt$

Ma: $J^{-1}(q)\vec{v} = \dot{\vec{q}} \Rightarrow q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(t)\,dt$

Note le posizioni e le velocità dei giunti al tempo $t_K$, al tempo $t_{K+1} = t_K + \Delta t$ si ha:

$\vec{q}(t_{K+1}) = \vec{q}(t_K) + \dot{\vec{q}}(t_K)\Delta t$ e si noti che la Jacobiana può essere invertita solo se è quadrata e di rango pieno.

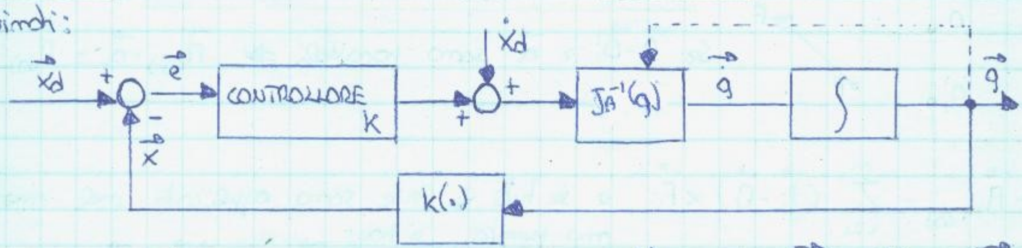
Quindi: $\dot{q}(t_K) = \frac{dq(t_K)}{dt} \Rightarrow \vec{q}(t_{K+1}) = \vec{q}(t_K) + \frac{d\vec{q}(t_K)}{dt}dt \Rightarrow \vec{q}(t_{K+1}) - \vec{q}(t_K) = dq(t_K)$ NB: Ho approssimato $\Delta t$ con $dt$.

Perciò: $\vec{q}(t_{K+1}) = \vec{q}(t_K) + J^{-1}(\vec{q}(t_K))\, v(t_K)\Delta t$ visto che: $\dot{q}(t_K) = J^{-1}(\vec{q}(t_K))$.

Le $\dot{\vec{q}}$ calcolate non coincidono con quelle calcolate dall'equazione $\dot{\vec{q}} = J^{-1}(q)\cdot\vec{v}$. Quindi la ricostruzione delle variabili di giunto è affidata ad un integratore che però comporta fenomeni di deriva. Quindi:

$\vec{e} = \vec{x}_d - \vec{x}$ → ERRORE NELLO SPAZIO OPERATIVO e $\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}}_d - \dot{\vec{x}}$ ma $\dot{\vec{x}} = J_A(q)\cdot\dot{\vec{q}} \Rightarrow \dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}}_d - J_A(q)\cdot\dot{\vec{q}}$

Quindi:




Se $J_A$ è quadrata e non singolare si ha: $\dot{\vec{q}} = J_A^{-1}(q)(\dot{\vec{x}}_d + K\vec{e}) \Rightarrow \dot{\vec{e}} + K\vec{e} = 0$

Se K è una matrice definita positiva allora il sistema è asintoticamente stabile. Il processo per cui $\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}}_d - J_A(q)\cdot\dot{\vec{q}}$ viene chiamato linearizzazione perché $J_A(q)$ è un operatore lineare. Scegliamo ora come funzione di Lyapunov la seguente:

$V(e) = \frac{1}{2}\vec{e}^T K \vec{e} \Rightarrow \dot{V}(e) = \vec{e}^T K \dot{\vec{x}}_d - \vec{e}^T K \dot{\vec{x}}$. Sostanzialmente cerchiamo un algoritmo di inversione della cinematica più semplice, senza passare attraverso la linearizzazione.

Infatti: $\vec{e} = \vec{x}_d - \vec{x} \Rightarrow V(e) = \frac{1}{2}\vec{e}^T K(\vec{x}_d - \vec{x})$

$$\Downarrow$$

$$V(e) = \frac{1}{2}\vec{e}^T K\vec{x}_d - \frac{1}{2}\vec{e}^T K\vec{x} \Rightarrow \dot{V}(e) = \vec{e}^T K\dot{\vec{x}}_d - \vec{e}^T K\dot{\vec{x}}$$

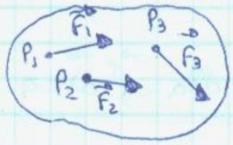
Ma: $\dot{V} = \vec{e}^T K\dot{\vec{x}}_d - \vec{e}^T K J_A(q)\cdot\dot{\vec{q}} \Rightarrow \dot{\vec{q}} = J_A^T(q)K\vec{e}$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V} = \vec{e}^T K\dot{\vec{x}}_d - \vec{e}^T K J_A(q)J_A^T(q)K\vec{e}$$

* STATICA:

Consideriamo un corpo rigido:




Una forza è rappresentata da un vettore applicato ad un punto. Si può ridurre il sistema in uno più semplice? La statica del corpo rigido studia le condizioni per il quale il sistema di forze mantiene il corpo stesso in quiete.

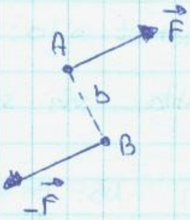
Si noti che:

POSTULATO 1


$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

POSTULATO 2 Non si altera l'equilibrio di un corpo se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la sua retta di azione.

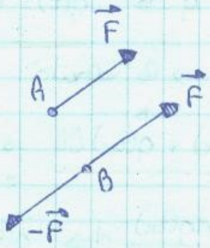
Consideriamo la seguente configurazione:



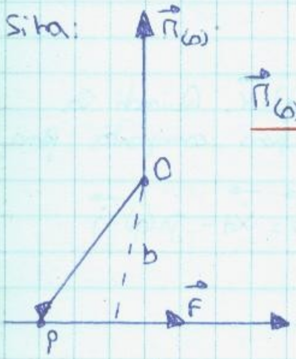

COPPIA DI FORZE, b è il braccio.

Un generico sistema di forze agenti su un corpo rigido è equivalente ad una forza applicata in un punto ed ad una coppia.

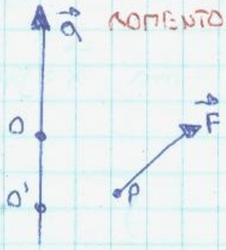
Sia:




Si ha:




$\vec{\Pi}_{(O)} = (P-O) \times \vec{F}$ Se $O' \neq O \Rightarrow \vec{\Pi}_{(O')} = \vec{\Pi}_{(O)} + (\vec{O} - \vec{O}') \times \vec{F}$




MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN ASSE.

$\vec{\Pi}_{(O')} \cdot \vec{a} = \vec{\Pi}_{(O)} \cdot \vec{a} \times (\vec{O} - \vec{O}') \times \vec{F} \cdot \vec{a}$

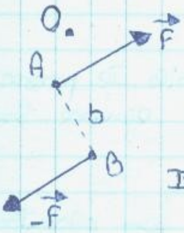
Se $\vec{O} - \vec{O}'$ e $\vec{a}$ sono paralleli $\Rightarrow \vec{\Pi}_{(O')} \cdot \vec{a} = \vec{\Pi}_{(O)} \cdot \vec{a}$

Chiaramente:

$\vec{\Pi}_{(O)} = \vec{\Pi}_{1(O)} + \vec{\Pi}_{2(O)} + \dots + \vec{\Pi}_{m(O)} = \sum_{i=1}^{m} (\vec{P}_i - \vec{O}) \times \vec{F}_i$ e se tutte le forze sono applicate nel medesimo punto si ha: $\vec{\Pi}_{(O)} = (\vec{P} - \vec{O}) \times \vec{R}$

(teorema di Varignon)

Se:




$\Pi_{(O)} = (A-O) \times \vec{F} + (B-O) \times (-\vec{F}) = (A-B) \times \vec{F}$

Il momento della coppia è indipendente dal polo.

Quando si parla di coppia agente su un elemento in rotazione, per esempio un giunto, si intende lo scalare ottenuto proiettando il momento della coppia sull'asse. Quindi un corpo rigido libero è in equilibrio quando:

$\vec{R}^{(E)} = 0$ , $\vec{\Pi} = 0$

mentre per un corpo vincolato si ha: $\vec{R}^{(E)} + \vec{R}' = 0$ , $\vec{\Pi} + \vec{\Pi}' = 0$ . $R'$, $\Pi'$ sono la risultante e il momento delle forze di reazione vincolare.

Sia:

$dW = \rho^T dp_Q + \Gamma_Q^T \omega\, dt$ $\begin{cases} \rho = \text{risultante delle forze.} \\ \Gamma_Q = \text{momento rispetto a } Q. \end{cases}$

Infatti:

$dW = F \cdot dS = \underbrace{\rho^T dp_Q}_{\text{lavoro fatto della risultante}} + \underbrace{\vec{\Gamma}_Q^T \omega\, dt}_{\text{lavoro fatto dal momento}}$ e sia: $\vec{x} = x(\vec{\lambda}) \Rightarrow \delta x = \frac{\delta x}{\delta \lambda} \delta \lambda$ spostamento virtuale.

$\Downarrow$

$dW_{virtuale} = dW_a = \vec{\zeta}^T d\vec{\lambda} = 0$

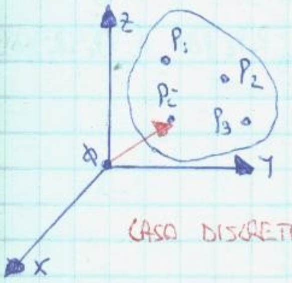
Sostanzialmente le reazioni vincolari non producono lavoro e sono ortogonali ai vincoli. Quindi si consideri un sistema $B_R$ di R corpi rigidi. Supponiamo che tali corpi siano liberi. Per individuare una qualsiasi configurazione del sistema occorre un vettore fatto in questo modo:

$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ con $m = 6R$ parametri $\rightarrow$ coordinate lagrangiane o generalizzate

$m$ rappresenta i gradi di libertà di $B_R$. Chiamiamo vincolo una qualsiasi limitazione imposta alla mobilità di $B_R$. Il moto di un sistema $B_R$ ad $m$ gradi di libertà viene così descritto:
$\vec{x} = x(\vec{\lambda})$. dove $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T$ è un vettore di coordinate lagrangiane.
Le coordinate lagrangiane descrivono le posizioni degli elementi costituenti il sistema. Lo spostamento elementare relativo a $(t, t+dt)$ è: (meccanici)

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\lambda}, t)}{\partial \vec{\lambda}} \dot{\lambda}\, dt + \frac{\partial \vec{x}(\vec{\lambda}, t)}{\partial t} dt \qquad NB: \vec{\lambda} = \lambda(t)$$

Posto $\delta\lambda = \dot{\lambda}\,\delta t$ si ha: $d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\lambda}, t)}{\partial \lambda} \delta\lambda + \frac{\partial \vec{x}(\vec{\lambda}, t)}{\partial t} dt \Rightarrow \delta\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\lambda}, t)}{\partial \lambda} \delta\lambda$ è lo spostamento virtuale.
Consideriamo:

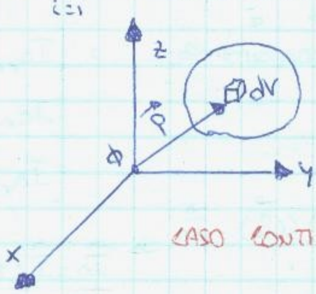


$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \vec{P}_i m_i}{m}$ $\rightarrow$ centro di massa

con $m = \sum_{i=1}^{m} m_i$. Nel continuo si ha: $d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V$

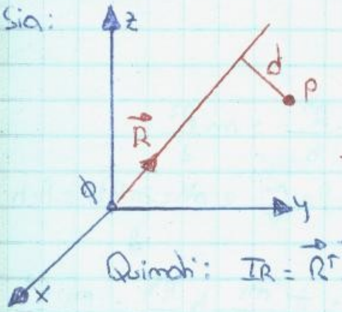
$$\vec{P} = \frac{\int_V \rho\, d \cdot dV}{m}$$

CASO DISCRETO



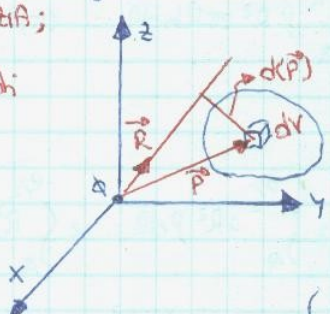
CASO CONTINUO

Sia:



$I_R = md^2 \Rightarrow I_R = \sum_{i=1}^{m} m_i d_i^2$ per un sistema di punti materiali. Per un corpo rigido si ha:

MOMENTO DI INERZIA;



$$I_R = \int_V \rho\, d^2(\vec{\rho})\, dV$$

Quindi: $I_R = \vec{R}^T I_O \vec{R}$ dove $\vec{I_O}$ = tensore di inerzia

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{O_{xx}} & I_{O_{yx}} & I_{O_{zx}} \\ I_{O_{xy}} & I_{O_{yy}} & I_{O_{zy}} \\ I_{O_{xz}} & I_{O_{yz}} & I_{O_{zz}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_{O_{xx}} = \int_V (\rho_y^2 + \rho_z^2)\rho\, dV \\ I_{O_{yy}} = \int_V (\rho_z^2 + \rho_x^2)\rho\, dV \\ I_{O_{zz}} = \int_V (\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho\, dV \end{cases}$$

MOMENTI DI INERZIA

$$\begin{cases} I_{O_{xy}} = \int_V -\rho_x \rho_y\, \rho\, dV \\ I_{O_{xz}} = \int_V -\rho_x \rho_z\, \rho\, dV \\ I_{O_{yz}} = \int_V -\rho_y \rho_z\, \rho\, dV \end{cases}$$

PRODOTTI DI INERZIA

Il tensore di inerzia è una matrice definita positiva.
Quindi ricapitolando:

$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho V = m \Rightarrow dm = \rho\, dV \rightarrow$ massa di una particella elementare del corpo rigido $B$.

Quindi: $\int dm = \int_V \rho\, dV \Rightarrow m = \int_{V_B} \rho\, dV$ e sia $\vec{P}$ = vettore posizione della particella di massa $\rho\, dV$.

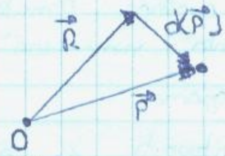
Si definisce baricentro di $B$:

$$P_c = \frac{1}{m}\int_{V_B} \vec{P} \rho\, dV \Rightarrow \vec{P}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{\rho}_{c_i} \quad \text{con } m = \sum_{i=1}^{m} m_i$$

$\rightarrow$ baricentro di $B$.

(28)

Sia ora $d(\vec{P})$ la distanza della particella di B dalla retta $\vec{R}$. Quindi:




$I_R = \int_{V_B} d^2(\vec{p})\,\rho\, dV$ (momento di inerzia).

Posto: $S(t) = \dot{R}(t)\,R(t)^T \Rightarrow S^T(t) = \left(\dot{R}(t)\,R(t)^T\right)^T = R(t)\cdot\dot{R}(t)^T$

Quindi:

NB: $(AB)^T = B^T A^T$

$S(t)\cdot S(t)^T = \dot{R}(t)\,R(t)^T\cdot R(t)\,\dot{R}(t)^T = I$ visto che $\underbrace{R^T = R^{-1}}_{\text{ortogonalità}}$

Perciò:

$$I_R = \vec{R}^T\left(\int_{V_B} S^T(\vec{p})\,S(\vec{p})\,\rho\, dV\right)\vec{R} = \vec{R}^T I_O \vec{R} \quad \text{con:}$$

$$I_O = \begin{bmatrix} \int_{V_B}(p_y^2+p_z^2)\rho\, dV & -\int_{V_B} p_x p_y\,\rho\, dV & -\int_{V_B} p_x p_z\,\rho\, dV \\ \int_{V_B}(p_z^2+p_x^2)\rho\, dV & -\int_{V_B} p_x p_z\,\rho\, dV & -\int_{V_B} p_y p_z\,\rho\, dV \\ \int_{V_B}(p_x^2+p_y^2)\rho\, dV & -\int_{V_B} p_y p_z\,\rho\, dV & \int_{V_B}(p_x^2+p_y^2)\rho\, dV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{O_{xx}} & +I_{O_{yx}} & I_{O_{xz}} \\ I_{O_{xy}} & I_{O_{yy}} & I_{O_{yz}} \\ I_{O_{xz}} & I_{O_{yz}} & I_{O_{zz}} \end{bmatrix}$$

Sia $I_C$ il momento di inerzia passante per il baricentro. Sia 'A' un asse distante $\Delta$ dal baricentro:

$$\vec{I}_A = \vec{I}_C + m\Delta^2$$

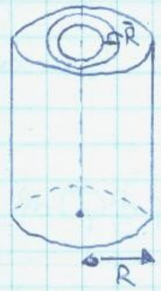
Se il tensore di inerzia da calcolare è su una terna parallela a quella baricentrale ma con diversa origine, si ha:

$$\vec{I}_O = \vec{I}_C + m\,S^T(\vec{P}_C)\,S(\vec{P}_C)$$

Infatti: $I_R = m d^2$, ma se: $S^T(\vec{P}_C)\,S(\vec{P}_C) = \vec{I}_O \Rightarrow \vec{I}_O = \vec{I}_C + m\vec{I}_O$

Es:

(1)



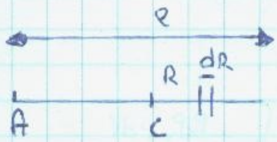

$$I = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho R^2\, 2\pi R h\, dR = \int_0^R \rho R^2\, 2\pi R h\, dR = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4} = m\frac{R^2}{2}$$

Infatti: $\int_0^R \rho R^2\, 2\pi R h\, dR = 2\pi\rho h\int_0^R R^3 dR = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4}$ e $\rho = \frac{m}{V}$ e $V = \pi R^2 h = A\cdot h$

$\Downarrow$

$$I = \pi\frac{m}{\pi R^2 h}\,h\,\frac{R^4}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

(2)




$$I_C = \int_0^{l/2} 2R^2\rho\, dR = 2\int_0^{l/2} R^2\rho\, dR = 2\rho\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2.$$

$$I_A = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

Definiamo energia cinetica: $T = \frac{1}{2} m\,\dot{\vec{p}}^T\dot{\vec{p}}$ e per un sistema di punti materiali: $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i\,\dot{\vec{p}}_i^T\dot{\vec{p}}_i$

Infatti:

$E_C \equiv T = \frac{1}{2} m V^2$, ma qui $\vec{V} \equiv \dot{\vec{P}} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = [p_1, p_2, \dots, p_m] \Rightarrow \dot{\vec{p}}\cdot\dot{\vec{p}}^T \equiv V^2$

$$[p_1\ p_2 \dots p_m]\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2.$$

Per un corpo rigido si ha:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{p}}^T\cdot\dot{\vec{p}}\,\rho\, dV$$

Per un sistema di forze conservativo si ha: $dW = -dU$ con $U = -m\vec{g}^T\vec{P}$

Per un corpo rigido si ha:

$$U = -\int_V \vec{g}^T\vec{P}\,\rho\, dV = -m\vec{g}^T\vec{P}_C$$

*** DINAMICA DI UN MANIPOLATORE:**

Definiamo lagrangiana di un sistema meccanico la seguente espressione:

$$L = T - U \quad \text{con:} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad \text{con } i = 1, \dots, m \quad \text{con } \xi_i = \text{forza generalizzata, associata a } \lambda_i.$$

Si ricordi che $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)]$ è un vettore di coordinate lagrangiane. Per un manipolatore si ha:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

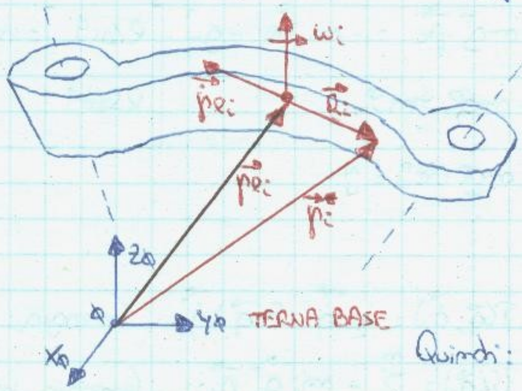
Si consideri un manipolatore con m bracci rigidi. Si ha:

$$T = \sum_{i=1}^{m} (T_{ei} + T_{mi}) \quad \text{dove} \begin{cases} T_{ei} = \text{energia cinetica del braccio } i \\ T_{mi} = \text{energia cinetica del motore che aziona il giunto } i. \end{cases}$$

Ricordandosi che: $T = \frac{1}{2} m v^2$ e cioè:

dove $V_{ei}$ = volume del braccio i.
$$T = \frac{1}{2}\int_V dm\, \dot{\vec{p}}^T \dot{\vec{p}} = \frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{p}}^T \dot{\vec{p}}\, \rho\, dV \Rightarrow T_{ei} = \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \dot{\vec{p}}_i^{*T} \dot{\vec{p}}_i^{*}\, \rho\, dV$$

Si consideri:




BRACCIO i

dove $\vec{p}_i^*$ = vettore posizione della particella corrispondente il braccio.

$$\vec{R}_i = [R_{ix}\ R_{iy}\ R_{iz}]^T = \vec{p}_i^* - \vec{p}_{ei}$$

con: $$\vec{p}_{ei} = \frac{1}{m_{ei}}\int_{V_{ei}} \vec{p}_i^*\, \rho\, dV$$

Quindi: $$\dot{\vec{p}}_i^* = \dot{\vec{p}}_{ei} + \omega_i \times \vec{R}_i = \dot{\vec{p}}_{ei} + S(\omega_i)\vec{R}_i$$

Infatti: $V_{pi}$ = velocità particella i, $V_c$ = velocità baricentro $\Rightarrow V_{pi} = V_c + \omega_i \times R_i$ con $\omega_i \times R_i$ = velocità di rotazione della particella.

Quindi:
$$T_{ei} = \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \left( (\dot{\vec{p}}_{ei} + \omega_i \times \vec{R}_i)^T\, \dot{\vec{p}}_{ei} + \omega_i \times \vec{R}_i \right) \rho\, dV = \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \left( (\dot{\vec{p}}_{ei} + S(\omega_i)\vec{R}_i)^T \cdot (\dot{\vec{p}}_{ei} + S(\omega_i)\vec{R}_i) \right) \rho\, dV = \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \left( \dot{\vec{p}}_{ei}^T \cdot \dot{\vec{p}}_{ei} + \omega_i \times \vec{R}_i\, \dot{\vec{p}}_{ei}^T + \omega_i \times \vec{R}_i\, \dot{\vec{p}}_{ei} + (\omega_i \times \vec{R}_i)^2 \right) \rho\, dV =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \dot{\vec{p}}_{ei}^T \dot{\vec{p}}_{ei}\, \rho\, dV + \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \omega_i \vec{R}_i\, \dot{\vec{p}}_{ei}^T\, \rho\, dV + \frac{1}{2}\int_{V_{ei}} (\omega_i \times \vec{R}_i)^2\, \rho\, dV$$

Contributi:

1) $\frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \dot{\vec{p}}_{ei}^T \dot{\vec{p}}_{ei}\, \rho\, dV = \frac{1}{2} m_{ei}\, \dot{\vec{p}}_{ei}^T \dot{\vec{p}}_{ei} \rightarrow$ contributo traslazionale.

2) $2\left(\frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \dot{\vec{p}}_{ei}^T\, \omega_i \vec{R}_i\, \rho\, dV\right) = 2\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{p}}_{ei}^T S(\omega_i)\int_{V_{ei}} (\vec{p}_i^* - \vec{p}_{ei})\, \rho\, dV\right) = 0$

$\Downarrow$

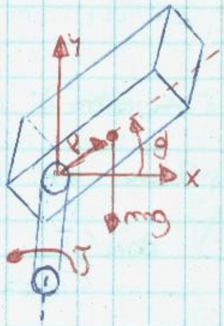
NULLO CONTRIBUTO $\rightarrow$ $$\int_{V_{ei}} \vec{p}_i^*\, \rho\, dV = \vec{p}_{ei}\int_{V_{ei}} \rho\, dV$$

3) $\frac{1}{2}\int_{V_{ei}} \vec{R}_i^T S(\omega_i) S(\omega_i) \vec{R}_i\, \rho\, dV = \frac{1}{2}\omega_i^T \left( \int_{V_{ei}} S^T(\vec{R}_i) S(\vec{R}_i)\, \rho\, dV \right) \omega_i \rightarrow$ CONTRIBUTO ROTAZIONALE.

Siccome $L = T - U$ e definiamo $dW = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, dq_i$ si può dimostrare che:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i \quad \text{con } i = 1..m$$

Consideriamo ora il seguente esempio:




m = massa del carico
l = distanza del baricentro del carico dall'asse del motore

Energia cinetica:

$$T_m = \frac{1}{2} I_m \dot\vartheta^2$$

↳ del motore

Energia cinetica del carico:

$$T_L = \frac{1}{2} m \dot{\vec p}_c^{\,T} \dot{\vec p}_c + \frac{1}{2} I_{cz} \dot\vartheta^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}(m l^2 + I_{cz})\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2} I \dot\vartheta^2$$

Vediamo l'energia potenziale gravitazionale: $U = -m\vec g^T \vec p_c = -m \begin{bmatrix} 0 & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\cos\vartheta \\ l\,\text{sen}\,\vartheta \end{bmatrix} = mgl\,\text{sen}\,\vartheta$

La lagrangiana è:

$$L = T_m + T_L - U = \frac{1}{2}(I_m + I)\dot\vartheta^2 - mgl\,\text{sen}\,\vartheta$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \tau \Rightarrow \frac{d}{dt}\left((I + I_m)\dot\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta = \tau$$

Pertanto:

$$(I + I_m)\ddot\vartheta + mgl\cos\vartheta = \tau$$

Per un manipolatore robotico si ha che:

$$\begin{cases} T(\vec q, \dot{\vec q}) = \frac{1}{2} \dot{\vec q}^{\,T} B(\vec q)\dot{\vec q} & \text{(energia cinetica)} \\ U(\vec q) = \sum_{i=1}^{m} -m_i \vec g^T \vec p_{ci} & \text{(energia potenziale)} \end{cases}$$

Quindi:

$$L(\vec q, \dot{\vec q}) = T(\vec q, \dot{\vec q}) - U(\vec q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\vec q)\dot q_i \dot q_j + \sum_{i=1}^{m} m_i \vec g^T \vec p_{ci}$$

B è la matrice di inerzia. Deriviamo la lagrangiana.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\vec q)\ddot q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{db_{ij}(\vec q)}{dt}\dot q_j = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\vec q)\ddot q_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial b_{ij}(\vec q)}{\partial q_k}\dot q_k \dot q_j$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial b_{jk}(\vec q)}{\partial q_i}\dot q_k \dot q_j \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{m} m_j \vec g^T \dfrac{\partial \vec p_{ci}}{\partial q_i} = g_i(\vec q) \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\vec q)\ddot q_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} h_{ijk}(\vec q)\dot q_k \dot q_j + g_j(\vec q) = \xi_i \quad \text{con } i = 1..m$$

Abbiamo in merito posto: $h_{ijk} = \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$ e in termini matriciali:

dove: $\vec C$ = matrice $m \times m$

$$B(\vec q)\ddot{\vec q} + C(\vec q, \dot{\vec q})\dot{\vec q} + g(\vec q) = \tau$$

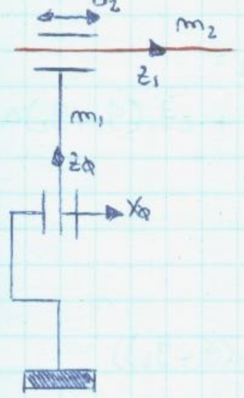
con: $\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\dot q_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} h_{ijk}\dot q_k \dot q_j$

NB:
- $\tau$ = coppie ai giunti
- $g(\vec q)$ = termini gravitazionali
- $C(\vec q, \dot{\vec q})$ = termini di coriolis
- $B(\vec q)$ = termini inerziali

una strada alternativa per formulare il modello dinamico di un manipolatore è il metodo di Newton - Eulero. Questo metodo è computazionalmente efficiente.

Quindi la **dinamica diretta** si occupa di determinare le accelerazioni ai giunti $\ddot{q}(t)$, le posizioni $q(t)$ e le velocità $\dot{q}(t)$ dalle stesse note le coppie dei giunti $\tau$ le posizioni iniziali e le velocità iniziali. La **dinamica inversa** assegnate le accelerazioni $\ddot{q}(t)$, le velocità $\dot{q}(t)$ e le posizioni $q(t)$ consente di determinare le coppie ai giunti $\tau(t)$.

Esempi:

1) 


$m_1, m_2$ sono le masse dei due bracci. Si ha: $\vec{q} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

I baricentri hanno coordinate:

$$\vec{p}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_{c_2} = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\vec{p}}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{p}}_{c_2} = \begin{bmatrix} \dot{d}_2 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} \quad \text{mentre} \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Calcoliamoci l'energia cinetica: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{p}}_{c_1}^T \dot{\vec{p}}_{c_1} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{p}}_{c_2}^T \dot{\vec{p}}_{c_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2)$

Energia potenziale:

$$U = -m_1 \vec{g}^T \vec{p}_{c_1} - m_2 \vec{g}^T \vec{p}_{c_2} = m_1 g d_1 + m_2 g d_1$$

$$\Downarrow$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 - (m_1 + m_2) g d_1$$

Infatti:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2) - (m_1 g d_1 + m_2 g d_1) = \frac{1}{2} m \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 -$$
$$- m_1 g d_1 - m_2 g d_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{d}_2^2 - (m_1 + m_2) g d_1$$

Quindi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} - \frac{\partial L}{\partial d_1} = f_1 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} - \frac{\partial L}{\partial d_2} = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} = (m_1 + m_2)\dot{d}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial d_1} = -(m_1 + m_2) g \dot{d}_1 \Rightarrow f_1 = (m_1 + m_2)\ddot{d}_1 + (m_1 + m_2) g d_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \ddot{d}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial d_2} = 0 \Rightarrow f_2 = m_2 \ddot{d}_2 \end{cases}$$

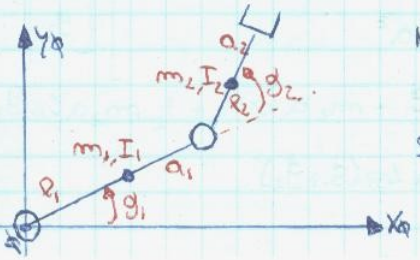
In termini vettoriali:

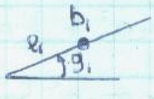
$$B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + g(\vec{q}) = \vec{\tau} \Rightarrow \vec{C} = 0, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \vec{\tau}$$

2) 


NB: $\begin{cases} l_1 = a_1/2 \\ l_2 = a_2/2 \end{cases}$, $\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ 

$\begin{cases} x_{b_1} = l_1 \cos q_1 \\ y_{b_1} = l_1 \operatorname{sen} q_1 \end{cases}$

Si ha:

$$\vec{p}_{c_1} = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 \\ l_1 \operatorname{sen} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_{c_2} = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{p}}_{c_1}=\begin{bmatrix}-\dot{q}_1 \ell_1 \operatorname{Sen} q_1\\ \dot{q}_1 \ell_1 \cos q_1\\ 0\end{bmatrix},\quad \dot{\vec{p}}_{c_2}=\begin{bmatrix}-\dot{q}_1 a_1 \operatorname{Sen} q_1-(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\operatorname{Sen}(q_1+q_2)\\ \dot{q}_1 a_1 \cos q_1+(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2)\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec{g}=\begin{bmatrix}0\\-g\\0\end{bmatrix}$$

Quindi: $\begin{cases} I_1 = m_1 a_1^2\\ I_2 = m_2 a_2^2\end{cases} \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{p}}_{c_1}^T\dot{\vec{p}}_{c_1}+\frac{1}{2}I_1\omega_{z_1}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{p}}_{c_2}^T\dot{\vec{p}}_{c_2}+\frac{1}{2}I_2\omega_{z_2}^2=$

$$=\frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{q}_1^2a_1^2+(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\ell_2^2+2\dot{q}_1(\dot{q}_1+\dot{q}_2)a_1\ell_2\cos q_2\right]^2+\frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2$$

Si ricordi che:

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale:

$$U=-m_1 g^T\vec{p}_{c_1}-m_2 g^T\vec{p}_{c_2}=m_1 g\ell_1\operatorname{Sen} q_1+m_2 g(a_1\operatorname{Sen} q_1+\ell_2\operatorname{Sen}(q_1+q_2))$$

Le equazioni di Lagrange diventano:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\tau_i \quad \text{con } i=1,2$$

$$L=T-U=\frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{q}_1^2a_1^2+(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\ell_2^2+2\dot{q}_1(\dot{q}_1+\dot{q}_2)a_1\ell_2\cos q_2+\frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\right]-m_1 g\ell_1\operatorname{Sen} q_1+m_2 g(a_1\operatorname{Sen} q_1+\ell_2\operatorname{Sen}(q_1+q_2))$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=(m_1\ell_1^2+I_1+m_2a_1^2+m_2\ell_2+2m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2)\ddot{q}_1+(m_2\ell_2^2+m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2)\ddot{q}_2-$$
$$-2m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_1\dot{q}_2-m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_2+m_1g\ell\cos q_1+m_2ga_1\cos q_1+m_2g\ell_2\cos(q_1+q_2)=$$
$$=\tau_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}=(m_2\ell_2^2+m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2)\ddot{q}_1+(m_2\ell_2^2+I_2)\ddot{q}_2+m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_1^2+m_2g\ell_2\cos(q_1+q_2)=$$
$$=\tau_2$$

Matricialmente si ha:

$$\begin{bmatrix} m_1\ell_1^2+I_1+m_2a_1^2+m_2I_2+m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2 & m_2\ell_2^2+m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2\\ m_2\ell_2^2+m_2a_1\ell_2\cos q_2+I_2 & m_2\ell_2^2+I_2\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_2 & m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_2\\ m_2a_1\ell_2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(m_1\ell_1+m_2a_1)g\cos q_1+m_2g\ell_2\cos(q_1+q_2)\\ m_2g\ell_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}$ Nel caso di aste omogenee si ha: $a_1=a_2=a$ e quindi:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}m_1a+\frac{1}{3}m_2a+m_2a\cos q_2 & \frac{1}{3}m_2a+\frac{1}{2}m_2a\cos q_2\\ \frac{1}{3}m_2a^2+\frac{1}{2}m_2a^2\cos q_2 & \frac{1}{3}m_2a^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-m_2a^2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_2 & -\frac{1}{2}m_2a^2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_2\\ \frac{1}{2}m_2a^2\operatorname{Sen} q_2\,\dot{q}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g\left(\frac{1}{2}m_1a\cos q_1+m_2a\cos q_1+\frac{1}{2}m_2a\cos(q_1+q_2)\right)\\ \frac{1}{2}m_2ga\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}$$