Si definisce spazio dei giunti quello spazio descritto dalle coordinate dei giunti. Definiamo postura il seguente vettore:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \Phi \end{bmatrix}$$

che è un vettore di m componenti con $m \leq 6$.
Quindi il vettore postura viene suddiviso in due sottovettori:
1) posizione
2) orientamento rispetto alla terna base.

Quindi la cinematica diretta consente di trovare posizione e orientamento della mano rispetto a posizione e orientamento dei vari giunti del braccio manipolatore. Quindi l'equazione della cinematica diretta può così scriversi:

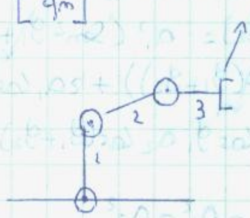
NB: ϕ è l'angolo di X_3 rispetto a X_0.

$\vec{x} = k(\vec{q})$ con $\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$ è il vettore delle coordinate dei giunti

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \Phi \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \rightarrow \text{forma matriciale.}$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ è il vettore delle coordinate cartesiane. Es:

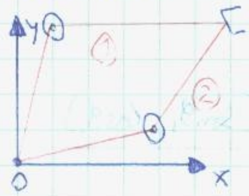
NB: $\vec{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix}$



ROBOT PLANARE A 3 BRACCI.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = k(\vec{q}) = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) \\ a_1 \operatorname{sen} q_1 + a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) + a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix}$$

Definiamo spazio di lavoro lo spazio dei punti raggiungibili dal manipolatore. Lo spazio di lavoro è un parametro molto visto in ambito commerciale. Lo spazio di lavoro raggiungibile è quello che può essere raggiunto con almeno un orientamento, mentre lo spazio di destrezza è quello spazio raggiungibile con più orientamenti. Es:



① configurazione a gomito alto
② configurazione a gomito basso

- ACCURATEZZA: scostamento tra la posizione reale e quella calcolata con la cinematica diretta.
- RIPETIBILITÀ: capacità del manipolatore di tornare in una posizione raggiunta precedentemente.
- RIDONDANZA: quando si hanno più gradi di libertà del necessario. ($m<n$) dove m: dimensione spazio operativo, n: " " spazio dei giunti

NB: R = gradi di libertà necessari per un compito.

Se: $R<n \Rightarrow$ MANIPOLATORE FUNZIONALMENTE RIDONDANTE. NB: La ridondanza aumenta la destrezza.
Il problema cinematica inverso permette, conoscendo posizione e orientamento dell'end-effector, di trovare la configurazione dei giunti. Quindi:

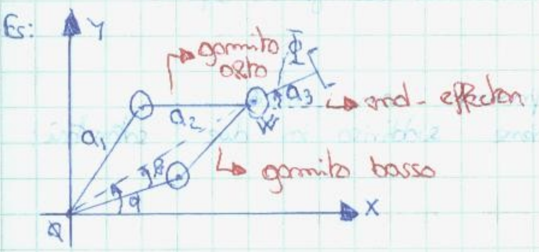
CONFIGURAZIONE GIUNTI $\xrightarrow{\text{cinematica diretta}}$ POSIZIONE E ORIENTAMENTO MANO

POSIZIONE E ORIENTAMENTO MANO $\xrightarrow{\text{cinematica inversa}}$ CONFIGURAZIONE GIUNTI

Nella cinematica inversa si possono non avere soluzioni, si possono avere soluzioni multiple, o infinite soluzioni (manipolatore ridondante).

(12)

Es:



Vogliamo determinare le variabili di giunto g_1, g_2, g_3.

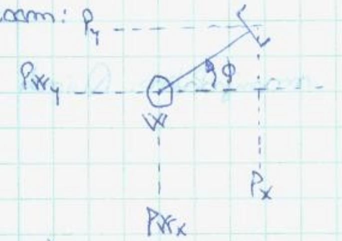
• Soluzione algebrica:

$$\phi = g_1 + g_2 + g_3 \quad e \quad \begin{cases} P_{W_x} = p_x - a_3 \cos\phi = a_1 \cos g_1 + a_2 \cos(g_1+g_2) \\ P_{W_y} = p_y - a_3 \operatorname{sen}\phi = a_1 \operatorname{sen} g_1 + a_2 \operatorname{sen}(g_1+g_2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos g_2$$

Zoom:



Infatti:

$$|P_W| = \sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} \Rightarrow P_{W_x}^2 = a_1^2 \cos^2 g_1 + a_2^2 \cos^2(g_1+g_2) + 2a_1 \cos g_1 a_2 \cos(g_1+g_2)$$

$$P_{W_y}^2 = a_1^2 \operatorname{sen}^2 g_1 + a_2^2 \operatorname{sen}^2(g_1+g_2) + 2a_1 \operatorname{sen} g_1 a_2 \operatorname{sen}(g_1+g_2)$$

Quindi:

$$P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 = a_1^2 \cos^2 g_1 + a_2^2 \cos^2(g_1+g_2) + 2a_1 \cos g_1 a_2 \cos(g_1+g_2) + a_1^2 \operatorname{sen}^2 g_1 + a_2^2 \operatorname{sen}^2(g_1+g_2) + 2a_1 \operatorname{sen} g_1 a_2 \operatorname{sen}(g_1+g_2) = a_1^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2 g_1 + \cos^2 g_1)}_{1} + a_2^2 \underbrace{(\cos^2(g_1+g_2) + \operatorname{sen}^2(g_1+g_2))}_{1} + 2a_1 \cos g_1 a_2 \cos(g_1+g_2) + 2a_1 \operatorname{sen} g_1 a_2 \operatorname{sen}(g_1+g_2) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cos g_1 a_2 \cos(g_1+g_2) + 2a_1 \operatorname{sen} g_1 a_2 \operatorname{sen}(g_1+g_2) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos g_2 .$$

Cioè:

$$\cos g_2 = \frac{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

con $-1 \leq \cos g_2 \leq 1$ e imponendo: $\operatorname{sen} g_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 g_2}$

$+$ = gomito alto

$-$ = gomito basso

In conclusione:

$$g_2 = \text{ATAN2}(\operatorname{sen} g_2, \cos g_2)$$

Per calcolare g_1 si fa la seguente sostituzione:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} g_1 = \dfrac{(a_1 + a_2 \cos g_2) P_{W_y} - a_2 \operatorname{sen} g_2 P_{W_x}}{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} \\ \cos g_1 = \dfrac{(a_1 + a_2 \cos g_2) P_{W_x} + a_2 \operatorname{sen} g_2 P_{W_y}}{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} \end{cases} \Rightarrow g_1 = \text{ATAN2}(\operatorname{sen} g_1, \cos g_1)$$

Infine:

$$g_3 = \phi - g_1 - g_2$$

• Soluzione geometrica: $P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\pi - g_2)$ con $\cos(\pi - g_2) = -\cos g_2$

Quindi:

$$\cos g_2 = \frac{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

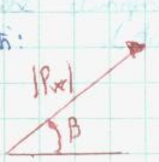
e, chiaramente: $\sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$.

$$g_2 = \cos^{-1}(\cos g_2)$$

Per g_1:

$\alpha = \text{ATAN2}(P_{W_y}, P_{W_x})$ e per $\beta \Rightarrow \cos\beta \sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} = a_1 + a_2 \cos g_2$

Infatti:



$|P_W| = \sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2}$ e $\cos\beta \sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2} = \cos\beta\, |P_W| = a_1 + a_2 \cos g_2$.

Siccome:

$$\cos g_2 = \frac{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \quad e \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2 \cos g_2}{\sqrt{P_{W_x}^2 + P_{W_y}^2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2\cos\vartheta_2}{\sqrt{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2\left(\frac{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}\right)}{\sqrt{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 + \frac{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1}}{\sqrt{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2a_1^2 + P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1\sqrt{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1\sqrt{P_{wr_x}^2 + P_{wr_y}^2}}\right)$$

Quindi:

$\vartheta_1 = \alpha \pm \beta$ $\Rightarrow$ (+)

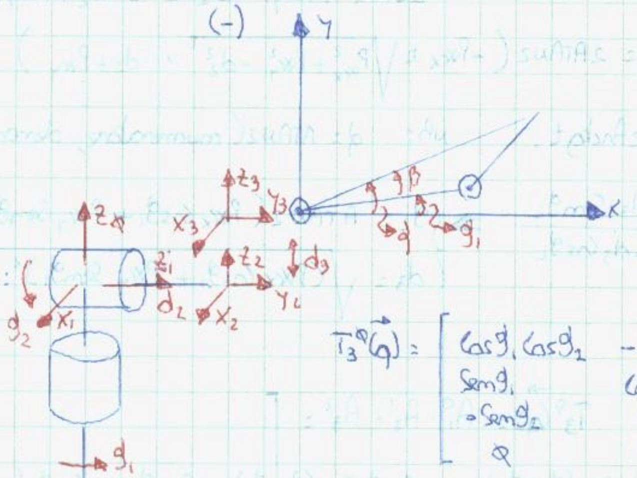
$\vartheta_1 - \alpha = \beta$

* Quindi per ogni configurazione ci sono differenti angoli. Si nota la complessità dei calcoli.

(-)

$\alpha - \vartheta_1 = \beta$

Riconsideriamo:



$$\vec{T}_3^0(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 & -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 d_3 - \sin\vartheta_1 d_2 \\ \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 & \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 d_3 + \cos\vartheta_1 d_2 \\ -\sin\vartheta_2 & 0 & \cos\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determiniamo le variabili di giunto $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$:

$$\vec{T}_3^0(\vec{q}) = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \Rightarrow (A_1^0)^{-1}\,\vec{T}_3^0(\vec{q}) = A_2^1 \cdot A_3^2 \quad \text{con} \quad A_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & \cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & \cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \vec{T}_3^0(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_2 & 0 & \sin\vartheta_2 & 0 \\ \sin\vartheta_2 & 0 & -\cos\vartheta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_2 & 0 & \sin\vartheta_2 & 0 \\ \sin\vartheta_2 & 0 & -\cos\vartheta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (A_1^0)^{-1} = (A_1^0)^T$ → Matrice ortogonale

$$A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & \cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Noi vogliamo calcolare P_W rispetto alla terna 1 cioè:

$$P_W^1 = \begin{bmatrix} P_{Wx}\cos\vartheta_1 + P_{Wy}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1 \\ P_{Wz} \\ -P_{Wx}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1 + P_{Wy}\cos\vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_2 \\ -d_3\cos\vartheta_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

e ponendo $t = \mathrm{Tg}\,\vartheta_1/2$

$\Downarrow$

$\cos\vartheta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{Sen}\,\vartheta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$

Quindi:

$$(d_2 + P_{Wy})t^2 + 2P_{Wx}t + d_2 - P_{Wy} = 0$$

Infatti:

$$-P_{Wx}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1 + P_{Wy}\cos\vartheta_1 = d_2 \Rightarrow -P_{Wx}\frac{2t}{1+t^2} + P_{Wy}\frac{1-t^2}{1+t^2} = d_2 \Rightarrow \frac{+2tP_{Wx} + (1-t^2)P_{Wy}}{1+t^2} = d_2$$

Così:

$$2tP_{Wx} + P_{Wy} - t^2P_{Wy} = d_2(1+t^2) \Rightarrow 2tP_{Wx} + P_{Wy} - t^2P_{Wy} = d_2 + d_2t^2$$

$\Downarrow$

$$2tP_{Wx} + P_{Wy} - d_2 = t^2(d_2 + P_{Wy})$$

Da cui:

$$t = \frac{-P_{Wx} \pm \sqrt{P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2 - d_2^2}}{d_2 + P_{Wy}} \Rightarrow \vartheta_1 = 2\,\mathrm{ATAN2}\left(-P_{Wx} \pm \sqrt{P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2 - d_2^2},\ d_2 + P_{Wy}\right)$$

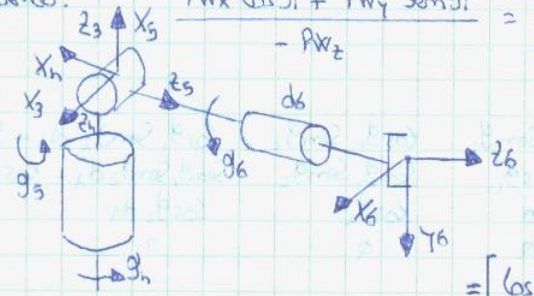
Infatti:

$t = \mathrm{Tg}\,\vartheta_1/2 \Rightarrow \mathrm{Arctg}\,t = \vartheta_1/2$ e $\vartheta_1 = 2\,\mathrm{Arctg}\,t$. NB: $\alpha = \mathrm{ATAN2}$(numeratore, denominatore).

Concludendo:

$$\frac{P_{Wx}\cos\vartheta_1 + P_{Wy}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1}{-P_{Wz}} = \frac{d_3\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_2}{-d_3\cos\vartheta_2} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_2 = \mathrm{ATAN2}(P_{Wx}\cos\vartheta_1 + P_{Wy}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1,\ P_{Wz}) \\ d_3 = \sqrt{(P_{Wx}\cos\vartheta_1 + P_{Wy}\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_1)^2 + P_{Wz}^2} \end{cases}$$

Es:



$$T_3^0(\vec{q}) = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1\cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\cos\vartheta_1\,\mathrm{Sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & \mathrm{Sen}\,\vartheta_1 & \cos\vartheta_1(a_2\cos\vartheta_2 + a_3\cos(\vartheta_2+\vartheta_3)) \\ \mathrm{Sen}\,\vartheta_1\cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\mathrm{Sen}\,\vartheta_1\,\mathrm{Sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\cos\vartheta_1 & \mathrm{Sen}\,\vartheta_1(a_2\cos\vartheta_2 + a_3\cos(\vartheta_2+\vartheta_3)) \\ \mathrm{Sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & \cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & 0 & a_2\,\mathrm{Sen}\,\vartheta_2 + a_3\,\mathrm{Sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $\vec{q} = [\vartheta_4\ \vartheta_5\ \vartheta_6]^T$

Vogliamo calcolare $\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$ in corrispondenza dell'orientamento dell'end-effector in termini di R_6^3:

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \vartheta_4 &= \mathrm{ATAN2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \mathrm{ATAN2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2},\ a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \mathrm{ATAN2}(s_z^3, -n_z^3) \end{aligned}$$

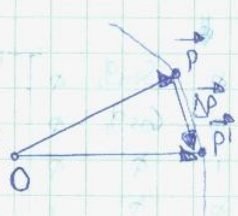
In particolare per $\vartheta_5 \in [0, \pi]$ si ha:

$$\vartheta_4 = \mathrm{ATAN2}(-a_y^3, -a_x^3)$$

$$\vartheta_5 = \mathrm{ATAN2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2},\ a_z^3\right)$$

$$\vartheta_6 = \mathrm{ATAN2}(-s_z^3, n_z^3)$$

*RICHIAMI DI CINEMATICA:



$\vec{P}$ = posizione all'istante t

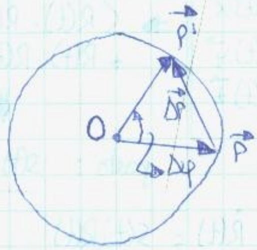
$\vec{P'}$ = posizione all'istante $t+\Delta t$

$\vec{\Delta P} = \vec{P'} - \vec{P}$ = spostamento nell'intervallo Δt.

Si definisce: $v(t) = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}$ = velocità del punto.

↳ vettore tangente alla traiettoria.

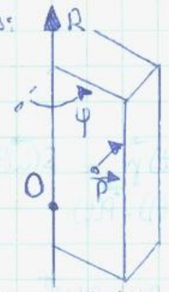
Consideriamo:



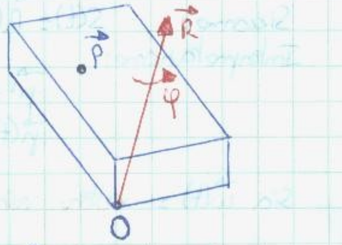
$$\vec{\Delta P} = \Delta\varphi \vec{R} \times (\vec{P}-\vec{O}) \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{V} = \dot{\varphi}\vec{R} \times (\vec{P}-\vec{O})$$

NB: $\vec{R}$ = versore di un asse ortogonale al piano della circonferenza.

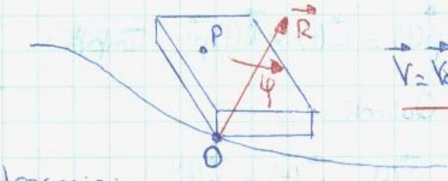
Se ho:



$\vec{V} = \omega \times (\vec{P}-\vec{O})$ con ω = velocità angolare e $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{R}$



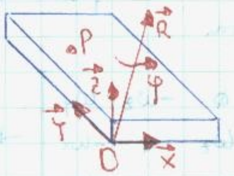
Se ho:



$$\vec{V} = \vec{V_0} + \omega \times (\vec{P}-\vec{O})$$

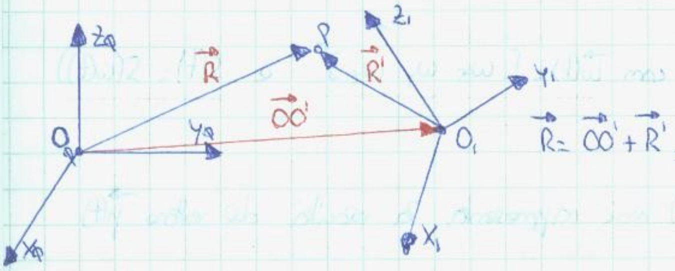
$\vec{R}$ = Asse di istantanea rotazione

$\vec{V_0}$ è la velocità lineare dell'origine della terna rispetto ad un osservatore fisso.



Si noti che si possono considerare due sistemi di riferimento:

1) sistema di riferimento FISSO
2) sistema di riferimento MOBILE



$$\vec{R} = \vec{OO'} + \vec{R'} \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{R'}}{dt} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{U_x} + \frac{dy}{dt}\vec{U_y} + \frac{dz}{dt}\vec{U_z}$$

↳ velocità assoluta

$V' = \frac{dR'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{U_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{U_y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{U_z'}$, definiamo $\underbrace{\vec{V_t} = V - V'}_{\text{se } \omega = 0}$ = velocità di trascinamento. In particolare:

$$\vec{V_t} = \vec{V_{0_1}} + \omega_1 \times (\vec{P}-\vec{O_1})$$

Riscriviamo ora l'equazione cinematica diretta sotto forma matriciale:

$$T(\vec{q}) = \begin{bmatrix} R(\vec{q}) & P(\vec{q}) \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$ dove $\vec{q} = [q_1 \cdots q_m]^T$. L'obbiettivo della cinematica differenziale è di determinare la relazione tra la velocità dei giunti e la velocità lineare e angolare dell'end-effector.

Siano: $\dot{\vec{p}}$ = vettore velocità lineare, $\vec{\omega}$ = vettore velocità angolare $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{P}} = \vec{J_P}(\vec{q})\dot{\vec{q}} \\ \vec{\omega} = \vec{J_O}(\vec{q})\dot{\vec{q}} \end{cases}$

$\vec{J_P}$ è una matrice $(3 \times m)$ e fornisce il contributo delle velocità dei giunti alla velocità lineare $\dot{\vec{p}}$ dell'end-effector. Analogamente $\vec{J_O}$. Quindi:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \vec{J}(\vec{q}) \cdot \dot{\vec{q}}$$ → equazione cinematica differenziale del manipolatore

$\vec{J} = \begin{bmatrix} \vec{J_P} \\ \vec{J_O} \end{bmatrix}$ = Jacobiano. Si ricordi che: $\vec{J}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{g}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \partial g_1(\vec{x})/\partial \vec{x} \\ \partial g_2(\vec{x})/\partial \vec{x} \\ \vdots \\ \partial g_m/\partial \vec{x} \end{bmatrix}$ è una matrice $m \times m$.

Se i giunti sono $3 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \vec{J_P}$ e $\vec{J_O}$ hanno dimensioni dell'ordine: $(3 \times m)$.

Si ricordi inoltre che: $$\dot{\vec{g}}(\vec{x}) = \frac{d}{dt}\vec{g}(\vec{x}(t)) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}\dot{\vec{x}} = J_g(\vec{x})\dot{\vec{x}}$$

Vediamo ora la derivata di una matrice di rotazione. Supponiamo che essa vari nel

(16)

tempo. Siccome: $R(t)\cdot R(t)^T = I$ e $R(t) = \begin{bmatrix} \vec{x}'^T(t)\vec{x} & \vec{y}'^T(t)\vec{x} & \vec{z}'^T(t)\vec{x} \\ \vec{x}'^T(t)\vec{y} & \vec{y}'^T(t)\vec{y} & \vec{z}'^T(t)\vec{y} \\ \vec{x}'^T(t)\vec{z} & \vec{y}'^T(t)\vec{z} & \vec{z}'^T(t)\vec{z} \end{bmatrix} \Rightarrow (R(t)\cdot R(t)^T)' = R'(t)\cdot R(t)^T + R(t)\cdot R(t)'^T = 0$

NB: $\underline{R(t)' = \dot{R}(t)}$

$\Downarrow$

$\underline{S(t) + S^T(t) = 0}$ con $S(t) =$ MATRICE ANTISIMMETRICA posto: $\underline{S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)}$

Siccome: $S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$ e $S(t)\cdot R(t) = \dot{R}(t)\cancel{R^T(t)\cdot R(t)} \Rightarrow \dot{R}(t) = S(t)R(t)$

Interpretazione:

$\vec{p}' =$ vettore costante

$\vec{p}(t) = R(t)\vec{p}' \Rightarrow \dot{\vec{p}}(t) = \dot{R}(t)\vec{p}'$ cioè: $\dot{p}(t) = S(t)R(t)\vec{p}'$

Sia $\vec{\omega}(t) =$ vettore velocità angolare $\Rightarrow \dot{\vec{p}}(t) = \vec{\omega}(t)\times R(t)\vec{p}'$. Infatti: $\dot{\vec{p}}(t) = \dot{R}(t)\vec{p}' = S(\vec{\omega}(t))R(t)\cdot\vec{p}' = S(\vec{\omega}(t))\cdot\vec{P}(t)$

NB: $\vec{p}' =$ vettore nel sistema mobile. Quindi:

$$\dot{\vec{p}}(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{p}(t) \qquad \text{con} \quad S(t) \triangleq \dot{R}(t)R(t)^T$$

Quindi $\vec{S}$ è uno strumento che mi descrive il prodotto vettoriale.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{con } \underline{\vec{\omega}(t) = [\omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^T} \text{ e } \underline{S(t) = S(\omega(t))}$$

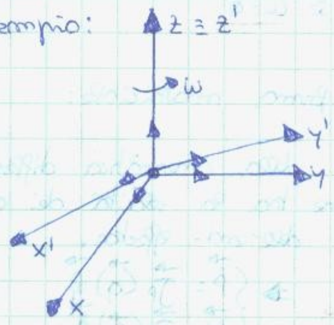
NB: $\vec{V}_{O_1} = 0$

$p(t)' = P' - O_1$

$V_t = 0 + \vec{\omega}(t)\times R(t)\vec{p}'$ e quindi $\dot{p}(t)$ mi rappresenta la velocità del vettore $\vec{p}(t)$ nel sistema fisso. Infatti:

$$\dot{p}(t) = \frac{dp}{dt} = V = V_t + V' = \omega(t)\times R(t)\vec{p}' \quad \text{visto che } \vec{V}_{O_1} = 0$$

Ad esempio:



$$R_z(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(t) \triangleq \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}\sin\vartheta & -\dot{\vartheta}\cos\vartheta & 0 \\ \dot{\vartheta}\cos\vartheta & -\dot{\vartheta}\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

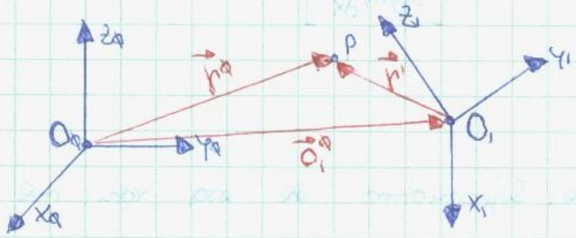
Infatti $\dot{R}(t) = \begin{bmatrix} (\cos\vartheta)' & (-\sin\vartheta)' & 0 \\ (\sin\vartheta)' & (\cos\vartheta)' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}\sin\vartheta & -\dot{\vartheta}\cos\vartheta & 0 \\ -\dot{\vartheta}\cos\vartheta & -\dot{\vartheta}\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\vartheta} & 0 \\ \dot{\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S(\vec{\omega}(t))$$

NB: ϑ va anch'essa derivata.

NB: $\omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \rightarrow$ velocità angolare intorno all'asse z.

Si consideri:



$$\underline{\vec{p}^0 = \vec{O}_1^0 + R_1^0\vec{p}'}$$

Derivando si ottiene: $\dot{\vec{p}}^0 = \dot{\vec{O}}_1^0 + R_1^0\dot{\vec{p}}_1 + \dot{R}_1^0\vec{p}_1$

$\Downarrow$

$\dot{\vec{p}}^0 = \dot{O}_1^0 + R_1^0\dot{\vec{p}}_1 + S(\vec{\omega}_1^0)R_1^0\vec{p}'$ perché: $\underline{\dot{R}_1^0 = S(\vec{\omega}_1^0)\cdot R_1^0}$

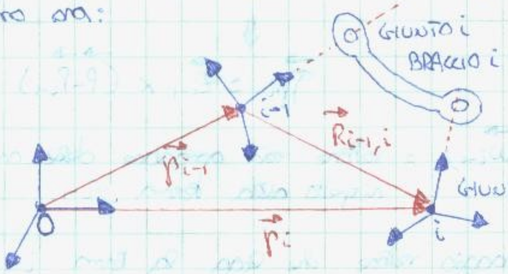
Indicando con $\vec{r}_i^{\,0}$ il vettore: $\vec{r}_i^{\,0} = R_i^0 \vec{p}^{\,i} \Rightarrow \dot{\vec{p}}^{\,0} = \dot{\vec{O}}_i^0 + R_i^0 \dot{\vec{p}}^{\,i} + \vec{\omega}_i^0 \times \vec{r}_i^{\,0}$ e $\dot{\vec{p}}^{\,i} = 0$.

Quindi:

$$\dot{\vec{p}}^{\,0} = \dot{\vec{O}}_i^0 + \vec{\omega}_i^0 \times \vec{r}_i^{\,0}$$

NB: $\vec{p}^{\,i}$ è fisso nella terna $i \Rightarrow \dot{\vec{p}}^{\,i} = 0$.

Consideriamo ora:



$R_{i-1,i}^{i-1}$ = posizione dell'origine della terna i rispetto alla terna $i-1$, espressa nella terna $i-1$.

Quindi:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \vec{R}_{i-1} \vec{r}_{i-1,i}^{\,i-1}$$

Perciò:

$$\dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{i-1} + \vec{R}_{i-1} \dot{\vec{r}}_{i-1,i}^{\,i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{R}_{i-1} \vec{r}_{i-1,i}^{\,i-1};$$ Infatti: $\dot{\vec{R}}_{i-1} = \vec{S}_{i-1} \cdot \vec{R}_{i-1} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{i-1} = \omega_{i-1} \times R_{i-1}$

Quindi: $\dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{i-1} + \vec{V}_{i-1,i} + \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{R}_{i-1,i}$ ricordandosi che: $\dot{\vec{p}}_i - \dot{\vec{p}}_{i-1} = \vec{V}$, $\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{R}_{i-1,i} = \vec{V}'$ $\Rightarrow \vec{V} - \vec{V}' = \underbrace{V_{i-1,i}}_{\text{vel. di trascinamento}}$

L'espressione evidenziata rappresenta la velocità lineare del braccio i in funzione della velocità lineare e angolare del braccio $i-1$.

Per quel che riguarda la velocità angolare si ha:

$$R_i = R_{i-1} R_i^{i-1}$$

$V_{i-1,i}$ = velocità origine terna i rispetto a $i-1$.

Quindi: $\vec{S}(\omega_i)\vec{R}_i = \vec{S}(\omega_{i-1})R_i + R_{i-1}\vec{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1})\vec{R}_i^{i-1}$

dove:

$\omega_{i-1,i}^{i-1}$ = velocità angolare della terna i rispetto alla terna $i-1$.

Perciò: $\vec{R}_{i-1}\vec{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1})\vec{R}_i^{i-1} = \vec{R}_{i-1}\vec{S}(\omega_{i-1,i}^{i-1})\vec{R}_{i-1}^T \vec{R}_{i-1}\vec{R}_i^{i-1} \Rightarrow \vec{R}_{i-1}S(\omega_{i-1,i}^{i-1})\vec{R}_i^{i-1} = \vec{S}(R_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})R_i$

Concludendo:

$$\vec{S}(\omega_i)\vec{R}_i = \vec{S}(\omega_{i-1})\vec{R}_i + \vec{S}(\vec{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1})\vec{R}_i \Rightarrow \omega_i = \omega_{i-1} + \vec{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1} = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

In particolare per un giunto prismatico la velocità angolare $\omega_{i-1,i} = 0$ e quindi:

$\vec{V}_{i-1} = \dot{d}_i \vec{z}_{i-1} \Rightarrow$ vel. lineare diretta lungo z_{i-1} e trasla la terna di d_i lungo z_{i-1}.

NB: $V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \vec{V}_{i-1} = \dot{d}_i z_{i-1}$ con $\dot{d}_i = \frac{d_i}{dt}$ e in particolare: $\begin{cases} \omega_i = \omega_{i-1} \\ \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{i-1} + \dot{d}_i z_{i-1} + \vec{\omega}_i \times \vec{R}_{i-1,i} \end{cases}$

Con un giunto rotoidale si ha: $\vec{\omega}_{i-1,i} = \dot{\vartheta}_i \vec{z}_{i-1}$ visto che: $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$ per def. di velocità angolare.

La velocità lineare:

$$\vec{V}_{i-1,i} = \vec{\omega}_{i-1,i} \times \vec{R}_{i-1,i} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \vec{z}_{i-1} \\ \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{i-1} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i-1,i} \end{cases}$$

Infatti:

$$\vec{V}_{i-1,i} = \vec{\omega}_{i-1,i} \times \vec{r}_{i-1,i}.$$

Vediamo ora un metodo per calcolare lo jacobiano. Partizioniamo così lo jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} J_{P_1} & \cdots & J_{P_m} \\ J_{O_1} & \cdots & J_{O_m} \end{bmatrix}$$ Ricordandosi che: $\begin{cases} \dot{\vec{p}} = J_P \cdot \dot{\vec{q}} \\ \vec{\omega} = J_O \cdot \dot{\vec{q}} \end{cases} \Rightarrow$ il termine $\dot{q}_i J_{P_i}$ rappresenta il contributo del singolo giunto i alla velocità lineare dell'end-effector.

Analogamente: $\dot{q}_i J_{O_i}$ esprime il contributo del giunto i alla velocità angolare dell'end-effector.

Nei giunti prismatici: $q_i = d_i$, mentre nei giunti rotoidali $q_i = \vartheta_i$. Calcolo velocità angolare:

- se i è prismatico: $\dot{q}_i \vec{J}_{O_i} = 0 \Rightarrow \vec{J}_{O_i} = 0$
- se i è rotoidale: $\dot{q}_i \vec{J}_{O_i} = \dot{\vartheta}_i \vec{z}_{i-1} \Rightarrow \vec{J}_{O_i} = \vec{z}_{i-1}$

(18)

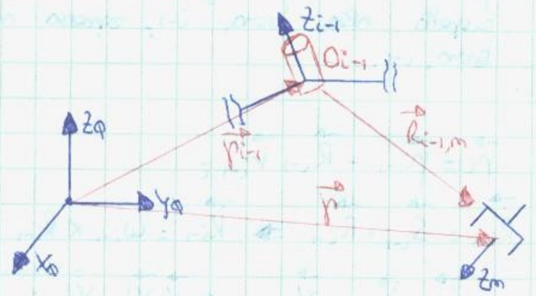
Calcolo velocità lineare: • i prismatico: $\dot q_i \vec J_{Pi} = \dot d_i \vec z_{i-1} \Rightarrow \vec J_{Pi} = \vec z_{i-1}$

• i rotoidale: $\dot q_i \vec J_{Pi} = \vec \omega_{i-1,i} \times \vec R_{i-1,m} = \dot\vartheta \vec z_{i-1} \times (\vec P - \vec P_{i-1})$

$$\Downarrow$$

$$\vec J_{Pi} = \vec z_{i-1} \times (\vec P - \vec P_{i-1})$$

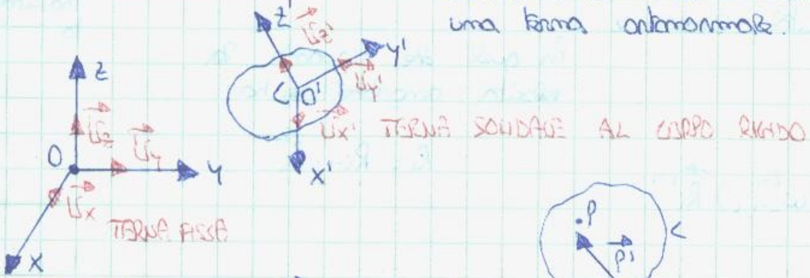
Graficamente si ha:



NB: $\vec\omega_{i-1,i}$ = vettore vel. angolare della terna i rispetto alla terna i-1.

NB: $\vec R_{i-1,m}$ = raggio vettore che lega la terna i-1 alla terna m dell'end-effector.

* PANORAMICA SUI CORPI RIGIDI: Un link è un corpo rigido, cioè un corpo le cui dimensioni non variano. Consideriamo un corpo rigido in movimento rispetto ad una terna ortonormale.



Sia R(t) la matrice orientamento della terna solidale rispetto alla terna fissa al tempo t.

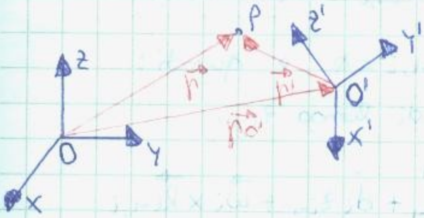
$$R(t) = \begin{bmatrix} x'^T(t)\vec U_x & y'^T(t)\vec U_x & z'^T(t)\vec U_x \\ x'^T(t)\vec U_y & y'^T(t)\vec U_y & z'^T(t)\vec U_y \\ x'^T(t)\vec U_z & y'^T(t)\vec U_z & z'^T(t)\vec U_z \end{bmatrix}$$

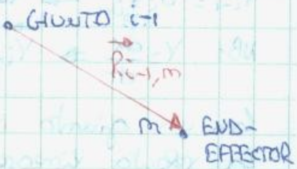
Sia P punto $\in C \Rightarrow \vec p'$ vettore costante.
Il moto di P rispetto alla terna fissa è: $\vec p(t) = \vec p_{O'}(t) + R(t)\vec p'$

Derivando si ottiene: $\dot{\vec p}(t) = \dot{\vec p}_{O'}(t) + \vec\omega \times (\vec P' - \vec P_{O'})$ NB: $\vec\omega$ = vettore libero

Siccome:
$\dot q_i \vec J_{Pi} = \dot{\vec p}_i = \vec\omega_{i-1,i} \times \vec R_{i-1,m}$ visto che $\dot{\vec p}_{O'} = 0$ e:

NB: $\vec R_{i-1,m} = \vec P - \vec P_{i-1}$





Quindi in definitiva abbiamo:

$$\begin{bmatrix} \vec J_{Pi} \\ \vec J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{per giunto prismatico.} \\ \begin{bmatrix} \vec z_{i-1} \times (\vec P - \vec P_{i-1}) \\ \vec z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{per giunto rotoidale.} \end{cases}$$

In particolare $\vec z_{i-1} = R_1^0(q_1) \cdots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0$

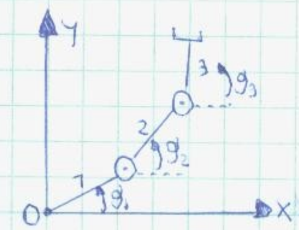
$z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T \rightarrow$ seleziona la terza colonna.

$\vec z_{i-1}$ quindi è dato dalla terza colonna della matrice R_{i-1}^0. Il vettore $\vec p$ è dato dai tre elementi della quarta colonna della matrice T_m^0.

$\tilde{\vec p} = A_1^0(q_1) \cdots A_m^{m-1}(q_m)\tilde{\vec p}_0$ con $\tilde{\vec p}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \rightarrow$ seleziona la quarta colonna.

NB: $\tilde{\vec p}$ è il vettore $\vec p$ in coordinate omogenee. $\tilde{\vec p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \cdots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{\vec p}_0$.

Es: ① ROBOT PLANARE A TRE BRACCI: qui $\vec J_{Pi} = 0$ e c'è solo $\vec J_{Oi}$ in quanto i giunti sono di rotazione.



$$J(q) = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \times (\vec{P}-\vec{P}_0) & \vec{z}_1 \times (\vec{P}-\vec{P}_1) & \vec{z}_2 \times (\vec{P}-\vec{P}_2) \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } \vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) \\ a_1 \operatorname{sen} q_1 + a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) + a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 \\ a_1 \operatorname{sen} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) \\ a_1 \operatorname{sen} q_1 + a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre: $z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

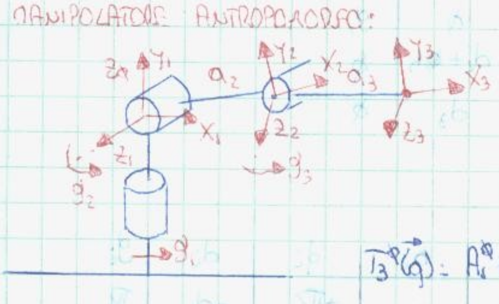
Quindi:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} -a_1 \operatorname{sen} q_1 - a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) - a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & -a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) - a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & -a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) & a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) & a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti si ricordi che:

$$J_P = \begin{bmatrix} -a_1 \operatorname{sen} q_1 - a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) - a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & -a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) - a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & -a_3 S_{123} \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) & a_2 \cos(q_1+q_2) + a_3 \cos(q_1+q_2+q_3) & a_3 C_{123} \end{bmatrix}$$

2) MANIPOLATORE ANTROPOMORFO:



$$\text{NB: } J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P}{\partial q_3} \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos(q_2+q_3) & -\cos q_1 \operatorname{sen}(q_2+q_3) & \operatorname{sen} q_1 & \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) \\ \operatorname{sen} q_1 \cos(q_2+q_3) & -\operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen}(q_2+q_3) & -\cos q_1 & \operatorname{sen} q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) \\ \operatorname{sen}(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & 0 & a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 \operatorname{sen}(q_2+q_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \times (\vec{P}-\vec{P}_0) & \vec{z}_1 \times (\vec{P}-\vec{P}_1) & \vec{z}_2 \times (\vec{P}-\vec{P}_2) \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos q_1 \cos q_2 \\ a_2 \operatorname{sen} q_1 \cos q_2 \\ a_2 \operatorname{sen} q_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \begin{bmatrix} \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) \\ \operatorname{sen} q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) \\ a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 \operatorname{sen}(q_2+q_3) \end{bmatrix} \quad \text{e con } \vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_1 \\ -\cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{z}_2$$

Quindi:

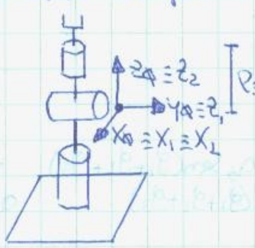
$$\vec{J} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) & -\cos q_1 (a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 \operatorname{sen}(q_2+q_3)) & \ldots \\ \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) & -\operatorname{sen} q_1 (a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 \operatorname{sen}(q_2+q_3)) & \ldots \\ 0 & a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3) & \\ 0 & \operatorname{sen} q_1 & \\ 0 & -\cos q_1 & \\ 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ldots & -a_3 \cos q_1 \operatorname{sen}(q_2+q_3) \\ \ldots & -a_3 \operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen}(q_2+q_3) \\ \ldots & a_3 \cos(q_2+q_3) \\ \ldots & \operatorname{sen} q_1 \\ & -\cos q_1 \\ & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e con } J_P = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) & -\cos q_1 (a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 \operatorname{sen}(q_2+q_3)) & * \\ \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3)) & -\operatorname{sen} q_1 (a_2 \operatorname{sen} q_2 + a_3 S_{23}) & ** \\ 0 & a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2+q_3) & *** \end{bmatrix}$$

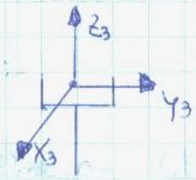
$* = -a_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3)$
$** = -a_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2+\theta_3)$
$*** = a_3 \cos(\theta_2+\theta_3)$

Vediamo altri esempi:

1)



zoom:

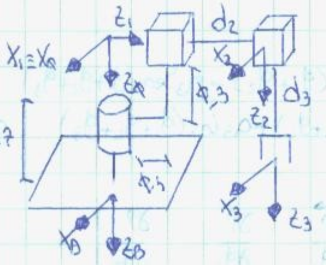


PARAMETRI DI DENAVIT-HARTENBERG:

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	0	θ_2
3	0	0	ρ_3	θ_3

Determinare i parametri di Denavit-Hartenberg.

2)

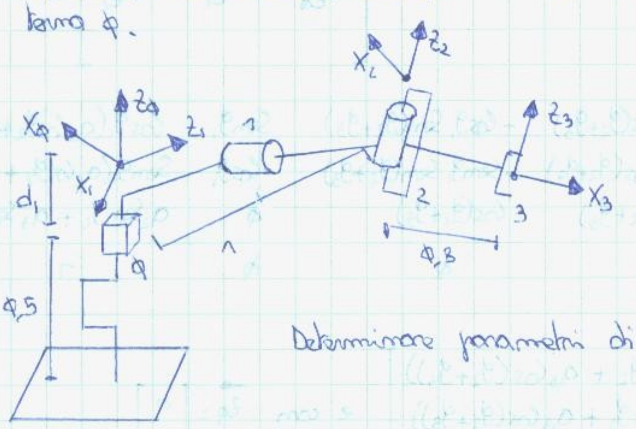


Determinare i parametri di Denavit-Hartenberg:

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$+\pi/2$	$d_2+0{,}4$	0
3	0	0	d_3	0

NB: La terna base è diversa dalla terna 0.

3)



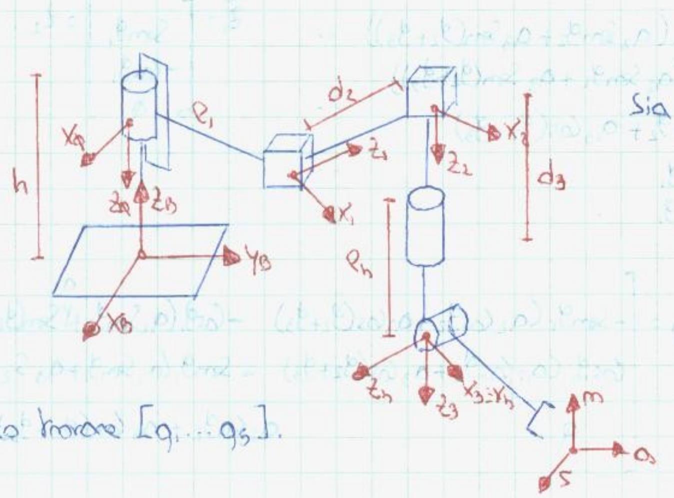
PARAMETRI:

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$+\pi/2$	$-d_1$	$\pi/2$
2	0	$\pi/2$	1	θ_2
3	0,8	0	0	θ_3

Determinare parametri di Denavit-Hartenberg.

Vediamo ora qualche esempio di cinematica inversa

1)



Sia nota la matrice dei parametri:

LINK	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	ℓ_1	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	0
3	0	0	$d_3+\ell_h$	0

Voglio trovare $[q_1 \dots q_3]$.

con: $[\underbrace{P_x, P_y, P_z}_{\text{pos. finale}}, \underbrace{\varphi, \theta, \psi}_{\text{terna in base}}]$

21

I primi tre gradi di libertà danno la posizione, mentre gli ultimi due gradi di libertà forniscono l'orientamento. Quindi:

$$\begin{cases} p = p(\vartheta_1, d_2, d_3) \\ \phi = \phi(\vartheta_4, \vartheta_5) \end{cases}$$

– ORIENTAMENTO: $R(\phi) = R_{ee}(\phi)$ dove $R_{ee}(\phi)$ = matrice di orientamento dell'end-effector.

$R(\phi) = R_{ee}(\phi) = R_3^b(\vartheta_1, d_2, d_3) \cdot R_{ee}^3(\vartheta_4, \vartheta_5)$ – $R_{ee}^3(\vartheta_4, \vartheta_5)$; Quindi: $(R_3^b(\vartheta_1))^{-1} R(\phi) = R_{ee}^3(\vartheta_4, \vartheta_5)$

Calcoliamo:

$$(R_3^b)^{-1} \Rightarrow R_0^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & -\cos\vartheta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postmoltiplicando e trasponendo si ha:

$$R_3^b = R_0^b \cdot R_1^0 \cdot R_2^1 \cdot R_3^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & 0 & -\cos\vartheta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & 0 & \cos\vartheta_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot I = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Trasponendo si ha:

$$(R_3^b)^T = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (R_3^b)^T \cdot R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi C\vartheta & C\varphi S\vartheta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\vartheta C\psi + S\varphi S\psi \\ S\varphi C\vartheta & S\varphi S\vartheta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\vartheta S\psi - C\varphi S\psi \\ -S\vartheta & C\vartheta S\psi & C\vartheta C\psi \end{bmatrix}$$

dove $R(\phi) = R_z(\varphi) R_y(\vartheta) R_x(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi \end{bmatrix}$

Quindi:

$$R_{ee}^3(\vartheta_4, \vartheta_5) = \begin{bmatrix} p & \varphi \\ \vartheta_6 = 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_4\sin\vartheta_5 & -\sin\vartheta_4 & \cos\vartheta_4\sin\vartheta_5 \\ \sin\vartheta_4\cos\vartheta_5 & \cos\vartheta_4 & \sin\vartheta_4\sin\vartheta_5 \\ -\sin\vartheta_5 & 0 & \cos\vartheta_5 \end{bmatrix}$$

(22)

Perciò: $(R_3^b)^T R(\varphi) = R_{ee}^3(\vartheta_h, \vartheta_5) \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\text{Sen}\vartheta_1 & 0 \\ -\text{Sen}\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi C\vartheta & C\varphi S\vartheta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\vartheta C\psi + S\varphi S\psi \\ S\varphi C\vartheta & S\varphi S\vartheta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\vartheta C\psi - C\varphi S\psi \\ -S\vartheta & C\vartheta S\psi & C\vartheta C\psi \end{bmatrix} =$

Quindi:

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S\vartheta & -C\vartheta S\psi & -C\vartheta C\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 & -\text{Sen}\vartheta_h & \cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 \\ \text{Sen}\vartheta_h \cos\vartheta_5 & \cos\vartheta_h & \text{Sen}\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 \\ -\text{Sen}\vartheta_5 & 0 & \cos\vartheta_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} +\text{Sen}\vartheta = -\text{Sen}\vartheta_5 \\ \cos\vartheta_5 = -\cos\vartheta\cos\psi \end{cases}$$

Inoltre $\underline{-C\vartheta S\psi = 0}$. Perciò:

$\cos\vartheta\,\text{Sen}\psi = 0$ per $\vartheta = \pi/2$ e $\psi = 0$ o $\psi = \pi$ e $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. $\Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta_5 = -\cos\vartheta \\ \text{Sen}\vartheta_5 = -\text{Sen}\vartheta \end{cases}$

Per $\psi = \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta_5 = -\cos\vartheta \\ \text{Sen}\vartheta_5 = -\text{Sen}\vartheta \end{cases}$ Sostituendo si ha:

Quindi:

$$(R_3^b)^T R(\varphi) = \begin{bmatrix} -\cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta & -\text{Sen}\vartheta_h & -\cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta \\ -\text{Sen}\vartheta_h \cos\vartheta & \cos\vartheta_h & -\text{Sen}\vartheta_h \cos\vartheta \\ \text{Sen}\vartheta & 0 & -\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \cos\vartheta_1\cos\varphi\cos\vartheta - \cos\vartheta_1\text{Sen}\varphi\cos\vartheta & \cos\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\vartheta\,\text{Sen}\psi - \\ \underline{-\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\cos\vartheta - \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\cos\vartheta} & -\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\vartheta\,\text{Sen}\psi + \\ \text{Sen}\vartheta & -\cos\vartheta\,\text{Sen}\psi \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c|c} -\cos\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\psi - \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\vartheta\,\text{Sen}\psi - \text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\cos\psi & \cos\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\vartheta\,\text{Sen}\psi + \cos\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\psi - \\ +\text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\cos\psi - \cos\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\vartheta\,\text{Sen}\psi - \cos\vartheta_1\cos\varphi\cos\psi & -\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\vartheta\cos\psi - \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\psi - \\ -\cos\vartheta\,\text{Sen}\psi & -\cos\vartheta\cos\psi \end{array}$$

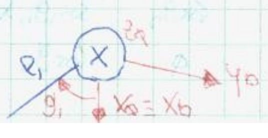
$$\left.\begin{array}{c} -\text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\vartheta\cos\psi - \text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\psi \\ -\cos\vartheta_1\text{Sen}\varphi\,\text{Sen}\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta_1\cos\varphi\,\text{Sen}\psi \\ -\cos\vartheta\cos\psi \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 & -\text{Sen}\vartheta_h & \cos\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 \\ \underline{\text{Sen}\vartheta_h \cos\vartheta} & \cos\vartheta_h & \text{Sen}\vartheta_h \text{Sen}\vartheta_5 \\ -\text{Sen}\vartheta_5 & 0 & \cos\vartheta_5 \end{bmatrix}$$

NB: $-\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi\cos\vartheta - \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi\cos\vartheta = \text{Sen}\vartheta_h\cos\vartheta \Rightarrow (-\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi - \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi)\cancel{\cos\vartheta} = \text{Sen}\vartheta_h\cancel{\cos\vartheta}$

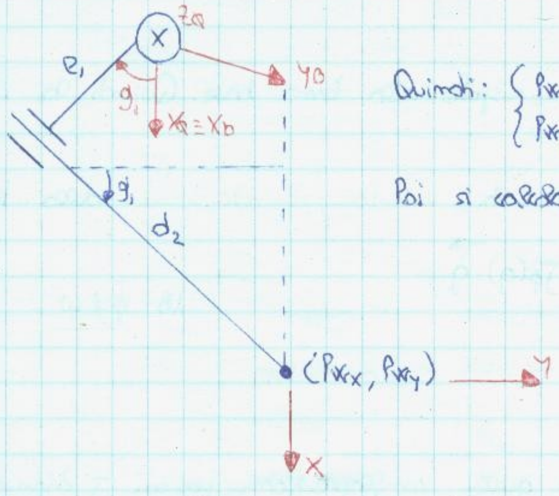
Quindi: $\text{Sen}\vartheta_h = -(\text{Sen}\vartheta_1\cos\varphi + \text{Sen}\vartheta_1\text{Sen}\varphi) = -\text{Sen}\vartheta_1(\cos\varphi + \text{Sen}\varphi) \Rightarrow \vartheta_h = \pi - (\vartheta_1 + \varphi)$.

Per quanto riguarda la posizione si ha:

-POSIZIONE: GIUNTO 1:



Quindi ho ricavato ϑ_1. Per essere più precisi:



Quindi: $\begin{cases} P_{wx} = \ell_1 \cos\vartheta_1 + d_2 \operatorname{sen}\vartheta_1 \\ P_{wy} = -\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 + d_2 \cos\vartheta_1 \end{cases}$

Poi si calcola: $P_{wx}^2 + P_{wy}^2 = (\ell_1 \cos\vartheta_1 + d_2 \operatorname{sen}\vartheta_1)^2 + (-\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 + d_2 \cos\vartheta_1)^2 = \ell_1^2 \cos^2\vartheta_1 + d_2^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_1 + 2\ell_1 \cos\vartheta_1 d_2 \operatorname{sen}\vartheta_1 + \ell_1^2 \operatorname{sen}^2\vartheta_1 + d_2^2 \cos^2\vartheta_1 - 2\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 d_2 \cos\vartheta_1$

→ funzione di d_2 ($f(d_2)$), e non di ϑ_1.

Ma:

$$P_{wx}^2 + P_{wy}^2 = \ell_1^2 (\underbrace{\cos^2\vartheta_1 + \operatorname{sen}^2\vartheta_1}_{1}) + d_2^2 (\underbrace{\operatorname{sen}^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_1}_{1})$$

$$\Downarrow$$

$$P_{wx}^2 + P_{wy}^2 = \ell_1^2 + d_2^2$$

Quindi:

$$d_2 = \sqrt{P_{wx}^2 + P_{wy}^2 - \ell_1^2}$$

Vediamo ora un esempio sulla cinematica differenziale:

① Abbiamo: $J_P = \begin{bmatrix} -\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - \ell_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 & \ell_2 \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ \ell_1 \cos\vartheta_1 + \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{bmatrix}$ Trovare la configurazione in modo che J_P sia una matrice di identità.

Si ha:

$$J_P = \begin{bmatrix} -\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - \ell_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 & \ell_2 \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ \ell_1 \cos\vartheta_1 + \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \Rightarrow \begin{cases} -\ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - \ell_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 = 1 \\ \ell_2 \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) = 0 \\ \ell_1 \cos\vartheta_1 + \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = 0 \\ \ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = 1 \end{cases}$$

Perciò:

$\ell_2 \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = 1 \Rightarrow \ell_2 = \dfrac{1}{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)}$ e quindi: $\dfrac{1}{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)} \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) = 0 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) = 0$$

Quindi:

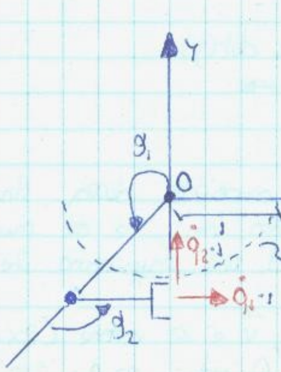
$\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = 1/\ell_2$ e $\begin{cases} \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = 1 \\ \ell_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\vartheta_1+\vartheta_2) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \ell_1 \cos\vartheta_1 = -1 \\ \ell_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \ell_1^2 = 2 \text{ e } \ell_1 = \sqrt{2}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\vartheta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\vartheta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \vartheta_1 = \tfrac{5}{4}\pi \text{ e } \vartheta_2 = -\tfrac{5}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi$$



→ circonferenza di raggio unitario.

Quindi: $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{q}_1 \\ \dot{y} = \dot{q}_2 \end{cases}$