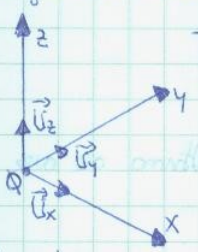
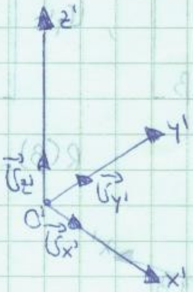
APPUNTI DI ROBOTICA INDUSTRIALE:

Un corpo rigido è un corpo che non subisce modifiche dimensionali. Un robot può essere concepito come un corpo rigido. Consideriamo:



$\vec{U}_z, \vec{U}_y, \vec{U}_x$ sono i versori degli assi.

SISTEMA FISSO



SISTEMA MOBILE

Un corpo è descritto nello spazio da posizione e orientamento.

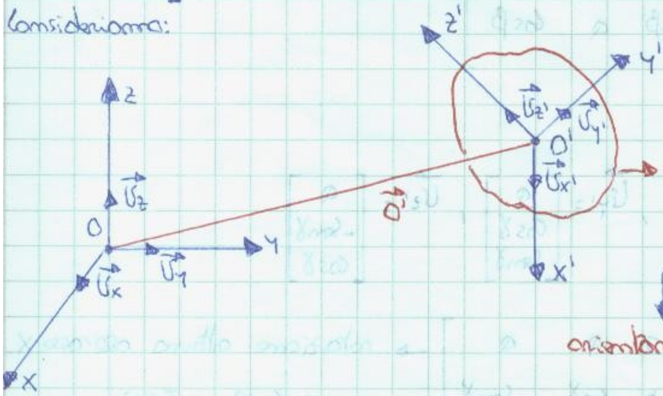
$$\vec{O}' = O'_x \vec{U}_x + O'_y \vec{U}_y + O_{z'} \vec{U}_z$$

Matricialmente:

$$\vec{O}' = \begin{bmatrix} O_{x'} \\ O_{y'} \\ O_{z'} \end{bmatrix}$$

posizione

Consideriamo:



corpo rigido

$$\underbrace{\begin{cases} \vec{U}_{x'} = x'_x \vec{U}_x + x'_y \vec{U}_y + x'_z \vec{U}_z \\ \vec{U}_{y'} = y'_x \vec{U}_x + y_{y'} \vec{U}_y + y_{z'} \vec{U}_z \\ \vec{U}_{z'} = z_{x'} \vec{U}_x + z_{y'} \vec{U}_y + z_{z'} \vec{U}_z \end{cases}}_{\text{coseni direttori}}$$

orientamento

$\vec{U}_{x'}, \vec{U}_{y'}, \vec{U}_{z'}$ sono i versori della terna solidale con il corpo. Matricialmente:

$$R = \begin{bmatrix} \vec{U}_{x'} & \vec{U}_{y'} & \vec{U}_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y_{z'} & z_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{U}_{x'}^T \vec{U}_x & \vec{U}_{y'}^T \vec{U}_x & \vec{U}_{z'}^T \vec{U}_x \\ \vec{U}_{x'}^T \vec{U}_y & \vec{U}_{y'}^T \vec{U}_y & \vec{U}_{z'}^T \vec{U}_y \\ \vec{U}_{x'}^T \vec{U}_z & \vec{U}_{y'}^T \vec{U}_z & \vec{U}_{z'}^T \vec{U}_z \end{bmatrix}$$

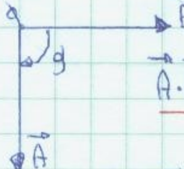
Matrice di rotazione

rotazione x — rotazione y — rotazione z (si analizzano le varie componenti).

Infatti: $\vec{U}_{x'} = \begin{bmatrix} x_{x'} \\ x_{y'} \\ x_{z'} \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{y'} = \begin{bmatrix} y_{x'} \\ y_{y'} \\ y_{z'} \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{z'} = \begin{bmatrix} z_{x'} \\ z_{y'} \\ z'_z \end{bmatrix}$

Si noti in particolare che:
$$\begin{cases} \vec{U}_{x'}^T \vec{U}_{y'} = 0 \\ \vec{U}_{y'}^T \vec{U}_{z'} = 0 \\ \vec{U}_{z'}^T \vec{U}_{x'} = 0 \end{cases}$$

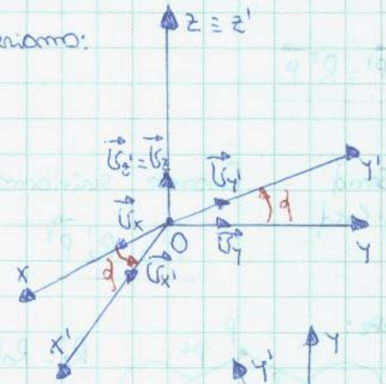
NB:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$$

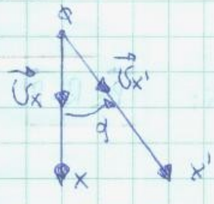
$$\begin{cases} \vec{U}_{x'}^T \vec{U}_{x'} = 1 \\ \vec{U}_{y'}^T \vec{U}_{y'} = 1 \\ \vec{U}_{z'}^T \vec{U}_{z'} = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{R} \text{ è ortogonale} \Rightarrow R^T \cdot R = I \quad \text{. Ma: } R^{-1} R^T R = I \cdot R^{-1} \Rightarrow R^T = R^{-1}$$

Consideriamo:



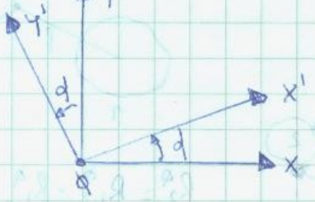
$$\vec{U}_{x'} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_{y'} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_{z'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NB:



$$\begin{cases} X_{x'} = \text{proietto } x' \text{ su } x. \\ X_{y'} = \text{trasformo e vedo rispetto a } y'. \\ X_{z'} = \text{trasformo } x \text{ e vedo rispetto a } z'. \end{cases}$$

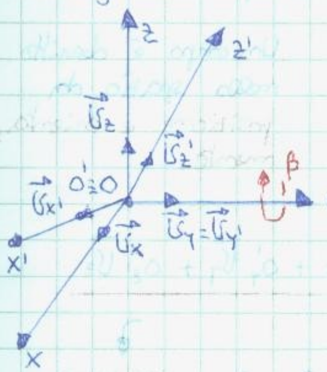
$$\vec{U}_{x'} = \begin{bmatrix} X_{x'} \\ X_{y'} \\ X_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

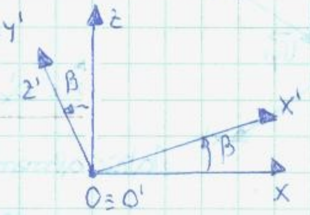


Quindi:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rotazione rispetto all'asse } z.$$

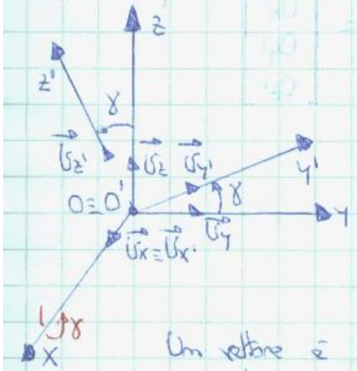
Analogamente:

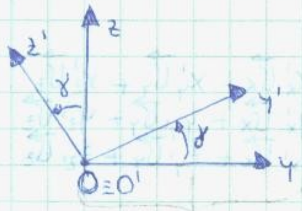




$\vec{U}_{x'} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ -\operatorname{sen}\beta \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{y'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{z'} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{bmatrix}$

$R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$ → rotazione attorno all'asse y.





$\vec{U}_{x'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{y'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma \end{bmatrix}$, $\vec{U}_{z'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$

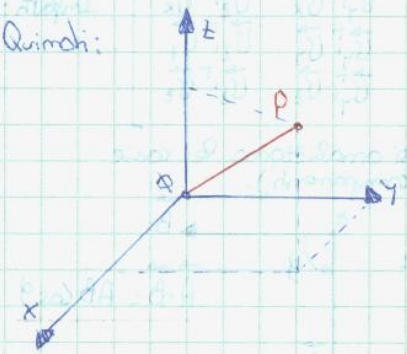
$R(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$ → rotazione attorno all'asse x.

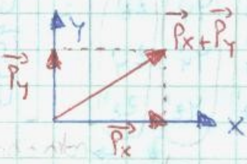
NB: $R_k(-\vartheta) = R_k^T(\vartheta)$, $k = x, y, z$

Un vettore è un'entità matematico-geometrica che ha 3 caratteristiche:

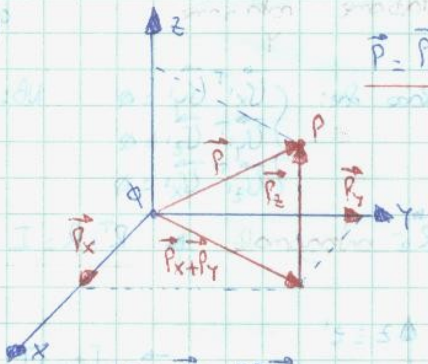
1) direzione
2) verso
3) intensità

Quindi:





$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z$



Matricialmente:

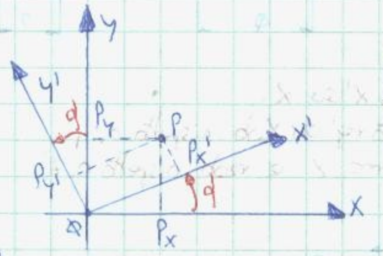
$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$, $\vec{P}' = \begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix}$

Se $\vec{P}, \vec{P}'$ rappresentano lo stesso punto si ha:

$$\vec{P} = P_{x'} \vec{U}_{x'} + P_{y'} \vec{U}_{y'} + P_{z'} \vec{U}_{z'} = \begin{bmatrix} \vec{U}_{x'} & \vec{U}_{y'} & \vec{U}_{z'} \end{bmatrix} \cdot \vec{P}'$$

NB: $\vec{P}' = R^T \vec{P}$

Quindi: $\vec{P} = R \cdot \vec{P}'$ • Es:

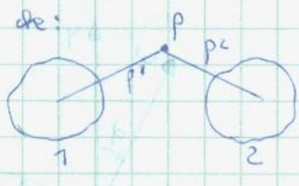


$$\begin{cases} P_x = P_{x'} \cos\alpha - P_{y'} \operatorname{sen}\alpha \\ P_y = P_{x'} \operatorname{sen}\alpha + P_{y'} \cos\alpha \\ P_z = P_{z'} \end{cases}$$

Quando scriviamo:

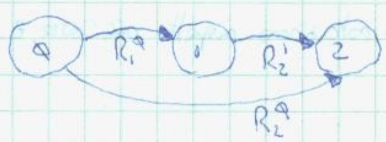
$\vec{P}^1 = R_2^1 \vec{P}^2$

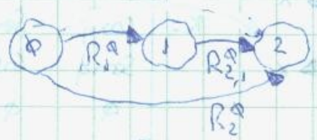
vuol dire che:



R_2^1 = Rotazione del sistema 2 rispetto a 1.

In particolare: $R_2^0 = R_1^0 \cdot R_2^1$ POSTMOLTIPLICAZIONE.



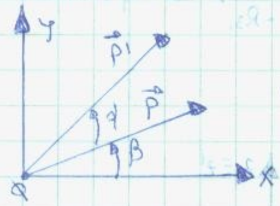


$R_2^0 = R_{1,2}^0 \cdot R_1^0$ PREMOLTIPLICAZIONE

In particolare:

$$\vec P = P_{x'}\vec U_{x'} + P_{y'}\vec U_{y'} + P_{z'}\vec U_{z'} \Rightarrow \vec P = P_{x'}\begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\alpha\\ \operatorname{Sen}\alpha\\ 0\end{bmatrix} + P_{y'}\begin{bmatrix}-\operatorname{Sen}\alpha\\ \operatorname{Cos}\alpha\\ 0\end{bmatrix} + P_{z'}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Se ho:



$$\begin{cases} P_x = P\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) = P\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta - P\operatorname{Sen}\beta\operatorname{Sen}\alpha = P_{x'}\operatorname{Cos}\alpha - P_{y'}\operatorname{Sen}\alpha \\ P_y = P\operatorname{Sen}(\alpha+\beta) = P\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Sen}\alpha + P\operatorname{Sen}\beta\operatorname{Cos}\alpha = P_{x'}\operatorname{Sen}\alpha + P_{y'}\operatorname{Cos}\alpha \end{cases}$$

NB: $R_i^j = (R_j^i)^{-1} = (R_j^i)^T$

Consideriamo: 3 terne con origine in comune: $\begin{cases} p^1 = R_2^1 p^2 \\ p^0 = R_1^0 p^1 \\ p^0 = R_2^0 p^2 \end{cases} \Rightarrow p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2$

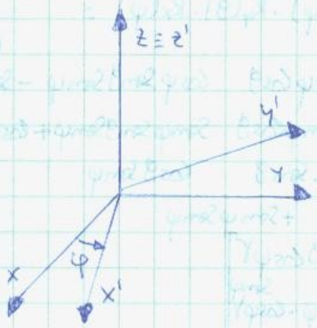
$\Downarrow$

$R_2^0 p^2 = R_1^0 \cdot R_2^1 \cdot p^2$

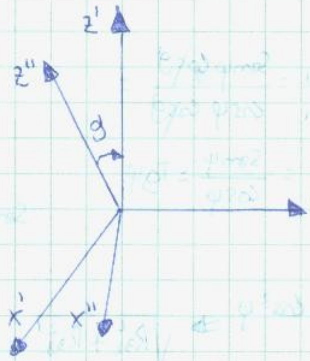
Quindi: $R_2^0 = R_1^0 \cdot R_2^1$

Con gli angoli di Eulero si cerca di pervenire a rappresentazioni minime.
Si noti che per una rappresentazione minima dell'orientamento si usa un insieme di tre angoli. $\phi = [\varphi\ \theta\ \psi]^T$. Per garantire che due rotazioni successive non avvengano attorno ad assi paralleli si usano gli angoli di Eulero.

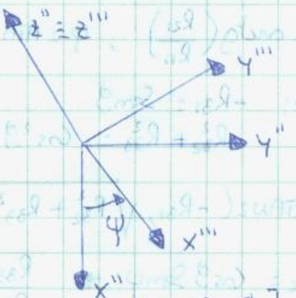
ANGOLI: ZYZ



Quindi ruoto attorno all'asse z di un angolo φ



Poi ruoto la terna di un angolo θ attorno all'asse y'. Infine ruoto la nuova terna attorno all'asse z'' di un angolo ψ.



Quindi:

$$R(\phi) = R_z(\varphi)\cdot R_{y'}(\theta)\cdot R_{z''}(\psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\psi - \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\psi & -\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sen}\psi - \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Cos}\psi & \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sen}\theta \\ \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sen}\psi & -\operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sen}\psi + \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\psi & \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\psi & \operatorname{Sen}\theta\operatorname{Sen}\psi & \operatorname{Cos}\theta \end{bmatrix}$$

Partendo dalla matrice sopra, ricavare gli angoli di Eulero (problema inverso). Si noti che:

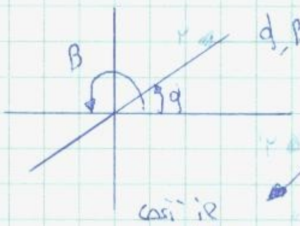
$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{consideriamo } R_{13} \text{ e } R_{23};\ \begin{cases} R_{13} = \operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sen}\theta \\ R_{23} = \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{R_{13}}{R_{23}} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi\,\cancel{\operatorname{Sen}\theta}}{\operatorname{Sen}\varphi\,\cancel{\operatorname{Sen}\theta}} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sen}\varphi} =$$

$= \operatorname{arctg}\varphi$

NB: ATAN2 (x,y) → tiene conto del segno dell'angolo.

$\Downarrow$

$\varphi = \text{ATAN2}(R_{23}, R_{13})$



α, β hanno la stessa tangente, ma gli angoli sono differenti.
Analogamente:

$(R_{13}+R_{23})^2 = (\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sen}\theta + \operatorname{Sen}\varphi\operatorname{Sen}\theta)^2$ oppure più precisamente:

$R_{13}^2 + R_{23}^2 = \operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\varphi\operatorname{Sen}^2\theta$, $\operatorname{Cos}\theta = R_{33}$

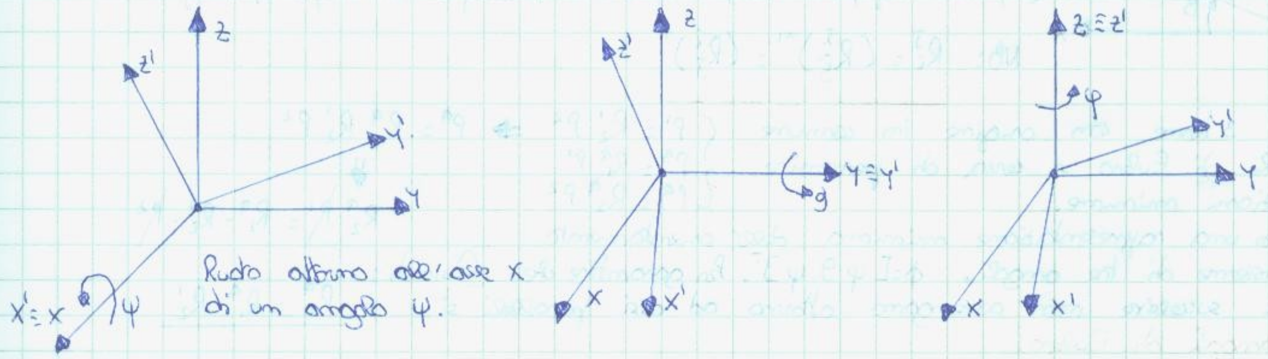
così il risultato non torna.

$\Downarrow$

$$\vartheta = ATAN2\left(\sqrt{R_{13}^2 + R_{23}^2},\ R_{33}\right) = ATAN2\left(\sqrt{\cos^2\varphi\, sen^2\vartheta + sen^2\varphi\, sen^2\vartheta},\ \cos\vartheta\right)$$

Infine: $\begin{cases} R_{32} = sen\vartheta\, sen\psi \\ -R_{31} = sen\vartheta \cos\psi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{R_{32}}{-R_{31}} = \dfrac{sen\vartheta\, sen\psi}{sen\vartheta \cos\psi} = Tg\psi \Rightarrow \psi = arctg\left(\dfrac{R_{32}}{-R_{31}}\right) \Rightarrow \psi = ATAN2(R_{32}, -R_{31})$.

ANGOLI ZYX: (RPY) = Roll, Pitch - Yaw con $\phi = [\varphi, \vartheta, \psi]^T$.



NB: le rotazioni in senso antiorario sono tutte positive. Quindi: $R(\phi) = R_z(\varphi) \cdot R_y(\vartheta) \cdot R_x(\psi) =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\, sen\vartheta\, sen\psi - sen\varphi\cos\psi & \cos\varphi\, sen\vartheta\cos\psi + sen\varphi\, sen\psi \\ sen\varphi\cos\vartheta & sen\varphi\, sen\vartheta\, sen\psi + \cos\varphi\cos\psi & sen\varphi\, sen\vartheta\cos\psi - \cos\varphi\, sen\psi \\ -sen\vartheta & \cos\vartheta\, sen\psi & \cos\vartheta\cos\psi \end{bmatrix}$$

Problema inverso:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_{11} = \cos\varphi\cos\vartheta \\ R_{21} = sen\varphi\cos\vartheta \end{matrix} \Rightarrow \frac{R_{21}}{R_{11}} = \frac{sen\varphi\cos\vartheta}{\cos\varphi\cos\vartheta} = \frac{sen\varphi}{\cos\varphi} = Tg\varphi$$

Quindi:

$$\varphi = arctg\left(\frac{R_{21}}{R_{11}}\right),\quad \varphi = ATAN2(R_{21}, R_{11}).$$

Analogamente: $-R_{31} = sen\vartheta$

$$R_{32}^2 + R_{33}^2 = \cos^2\vartheta\, sen^2\psi + \cos^2\vartheta\cos^2\psi \Rightarrow \sqrt{R_{32}^2 + R_{33}^2} = \sqrt{\cos^2\vartheta\, sen^2\psi + \cos^2\vartheta\cos^2\psi}$$

Perciò:

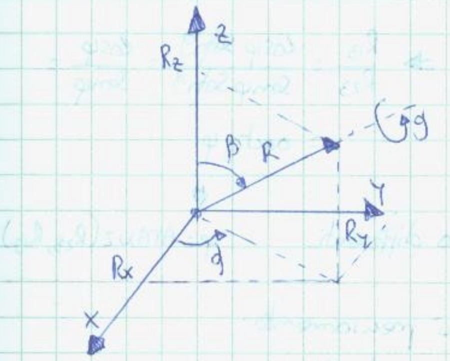
$$\vartheta = ATAN2\left(-R_{31}, \sqrt{R_{32}^2 + R_{33}^2}\right)$$

Infine: $\begin{cases} R_{32} = \cos\vartheta\, sen\psi \\ R_{33} = \cos\vartheta\cos\psi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{R_{33}}{R_{32}} = \dfrac{\cos\vartheta\cos\psi}{\cos\vartheta\, sen\psi} = \dfrac{\cos\psi}{sen\psi} = arctg\,\psi$ o meglio $\dfrac{R_{32}}{R_{33}} = \dfrac{\cos\vartheta\, sen\psi}{\cos\vartheta\cos\psi} = \dfrac{sen\psi}{\cos\psi} = Tg\psi$

Quindi:

$$\psi = arctg\left(\frac{R_{32}}{R_{33}}\right) = ATAN2(R_{32}, R_{33}).$$

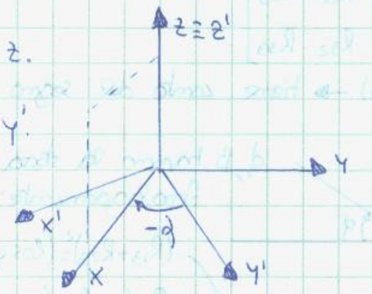
Rotazione attorno a un generico asse:



Bisogna prima sovrapporre R a z, ruotando di un angolo ϑ attorno all'asse z. Più precisamente:

1) Ruota di $-\alpha$ attorno a z.

2) Ruota di $-\beta$ attorno a y'.



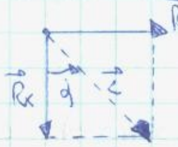
3) Ruota di ϑ intorno a z''.

4) Ruota di β attorno a y e α attorno a z.

Quindi: $R(\vartheta,\vec{R}) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\vartheta)\, R_y(-\beta)\, R_z(-\alpha)$. Posto: $\operatorname{Sen}\alpha = \dfrac{R_y}{\sqrt{R_x^2+R_y^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{R_x}{\sqrt{R_x^2+R_y^2}}$

Infatti:

$\operatorname{Sen}\beta = \sqrt{R_x^2+R_y^2}$, $\cos\beta = R_z$



Th di Pitagora:

$|\vec{z}| = \sqrt{R_x^2+R_y^2}$, ma $\sqrt{R_x^2+R_y^2}\, \operatorname{Sen}\alpha = R_y$

Analogamente: $\sqrt{R_x^2+R_y^2}\,\cos\alpha = R_x$. Quindi:

$$R(\vartheta,\vec{R}) = \begin{bmatrix} R_x^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta & R_xR_y(1-\cos\vartheta)-R_z\operatorname{Sen}\vartheta & R_xR_z(1-\cos\vartheta)+R_y\operatorname{Sen}\vartheta \\ R_xR_y(1-\cos\vartheta)+R_z\operatorname{Sen}\vartheta & R_y^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta & R_yR_z(1-\cos\vartheta)-R_x\operatorname{Sen}\vartheta \\ R_xR_z(1-\cos\vartheta)-R_y\operatorname{Sen}\vartheta & R_yR_z(1-\cos\vartheta)+R_x\operatorname{Sen}\vartheta & R_z^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Infatti: $R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{Sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{Sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{Sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$, $R_z(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{Sen}\vartheta & 0 \\ \operatorname{Sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_y(-\beta) = \begin{bmatrix} +\cos(-\beta) & 0 & \operatorname{Sen}(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sen}(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{bmatrix}$, $R_z(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{Sen}(-\alpha) & 0 \\ \operatorname{Sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$R(\vartheta,\vec{R}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{Sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{Sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{Sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{Sen}\vartheta & 0 \\ \operatorname{Sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \operatorname{Sen}(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sen}(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{Sen}(-\alpha) & 0 \\ \operatorname{Sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

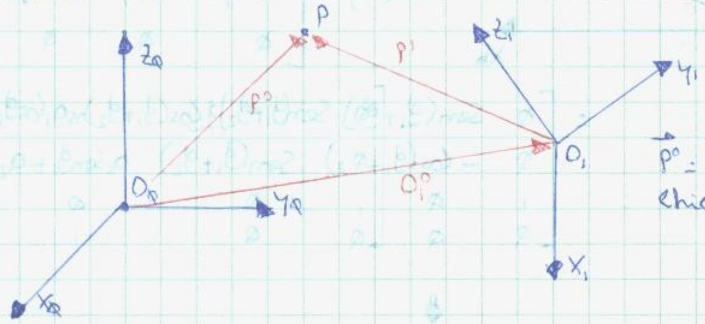
Si noti in particolare che: $R(-\vartheta,-\vec{R}) = R(\vartheta,\vec{R})$

Problema inverso:

$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\dfrac{R_{11}+R_{22}+R_{33}-1}{2}\right)$

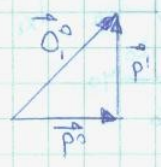
$R = \dfrac{1}{2\operatorname{Sen}\vartheta}\begin{bmatrix} R_{32}-R_{23} \\ R_{13}-R_{31} \\ R_{21}-R_{12} \end{bmatrix}$

Consideriamo ora:



$\vec{p}^0 = \vec{O}_1^0 + \vec{R}_1^0\,\vec{p}^1$

Chiaramente:



$\vec{p}^0 + \vec{p}^1 = \vec{O}_1^0$

Si noti che $\vec{p}^1$ viene applicato su una terna ruotata, quindi il fattore $\vec{R}_1^0$ è fondamentale. In particolare:

$\vec{p}^0 = \vec{O}_1^0 + \vec{R}_1^0\,\vec{p}^1 \Rightarrow \vec{p}^0 - \vec{O}_1^0 = \vec{R}_1^0\,\vec{p}^1 \Rightarrow (\vec{p}^0 - \vec{O}_1^0)\,\vec{R}_1^{0\,T} = \vec{p}^1 \Rightarrow p^0 R_1^{0\,T} - \vec{O}_1^0\,\vec{R}_1^{0\,T} = \vec{p}^1$

Con una rappresentazione omogenea si ha: $\tilde{p} = \begin{bmatrix} \vec{p} \\ 1 \end{bmatrix}$ → componente unitario.

⑥

Quindi: $A_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & O_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix}$ → Matrice di trasformazione omogenea.

Infatti: O_1^0 = trasformato dell'origine rispetto alla terna 0.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & O_{11}^T \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & O_{12}^T \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & O_{13}^T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ vettore trasformato dell'origine.

→ matrice di rotazione

Perciò:

$$\tilde{p}^0 = A_1^0 \tilde{p}^1$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{p}^1 = A_0^1 \tilde{p}^0 = (A_1^0)^{-1} \tilde{p}^0$$

In forma matriciale:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} R_1^{0^T} & -R_1^{0^T} O_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & -R_0^1 O_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix}$$

NB: $A^{-1} \neq A^T$.

Quindi la matrice di trasformazione omogenea non gode della proprietà di ortogonalità.

MANIPOLATORE E CINEMATICA DIRETTA.

Un manipolatore è fatto da link connessi da giunti. I giunti possono essere traslazionali o rotoidali. Noi considereremo catene aperte, del tipo:

→ end-effector. Ogni giunto fornisce un grado di libertà (gdl).

dove: a_e^b, s_e^b, m_e^b sono i versori della terna dell'end-effector.

NB: m_e^b = normale al foglio.

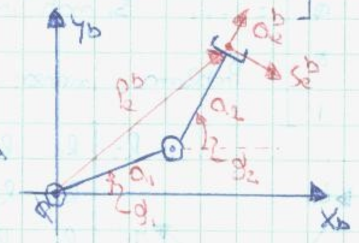
Si noti che:

$$T_e^b(q) = \begin{bmatrix} m_e^b(q) & s_e^b(q) & a_e^b(q) & p_e^b(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ matrice del braccio in funzione delle variabili di giunto q.

$\begin{cases} \vec{a}_e = \text{approccio} \\ \vec{s}_e = \text{scivolamento} \end{cases}$

• Es:

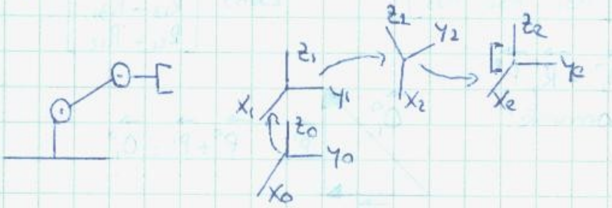


MANIPOLATORE PLANARE A 2 BRACCI.

$$T_e^b(q) = \begin{bmatrix} m_e^b(q) & s_e^b(q) & a_e^b(q) & p_e^b(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sin(\vartheta_1+\vartheta_2) & \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & a_1\cos\vartheta_1 + a_2\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ 0 & -\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & \sin(\vartheta_1+\vartheta_2) & a_1\sin\vartheta_1 + a_2\sin(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

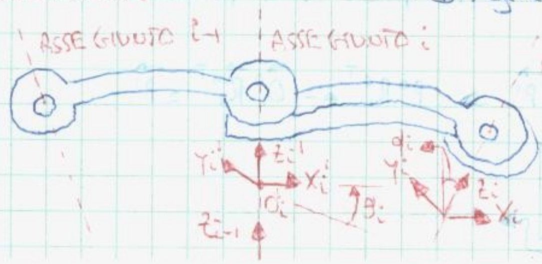
In ogni giunto bisogna inserire una terna di riferimento. Quindi, per esempio:



$$\Downarrow$$

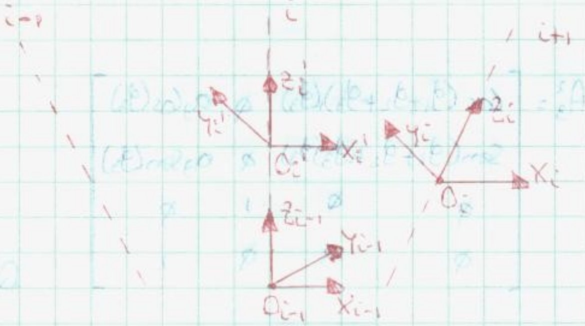
In generale: $T_m^0(q) = A_1^0(q_1)\, A_2^1(q_2)\, A_3^2(q_3) \dots A_m^{m-1}(q_m)$

PARAMETRI DI DENAVIT-HARTENBERG:



Passi:

1) Si sceglie z_i giacente sull'asse del giunto $i+1$.
2) Si individua O_i dall'intersezione di z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i
3) Si sceglie l'asse x_i normale rispetto a z_i e z_{i-1} con verso che va dal giunto i al giunto $i+1$



Per la terna 0 (la terna della base) si specifica solo z_0 e O_0 arbitrariamente. Per la terna m, non vi è giunto $m+1$ → z_m va allineato a z_{m-1}

NB: La normale comune è il segmento di minima distanza tra due rette.

Es:

I parametri di Denavit Hartenberg sono:

- a_i = distanza di O_i da O_i'
- d_i = coordinata su z_{i-1} di O_i'
- α_i = angolo tra z_{i-1} e z_i attorno a x_i
- ϑ_i = angolo tra x_{i-1} e x_i attorno a z_i

NB: a_i, α_i sono variabili di link, mentre ϑ_i e d_i sono variabili di giunto.

Vediamo le trasformazioni generiche:

$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ruotato attorno all'asse z e traslato di una quantità pari a d_i

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\operatorname{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslato lungo x di a_i e ruoto attorno a x_i'

Quindi:

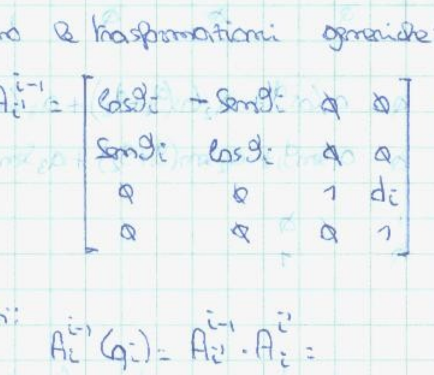
$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} \cdot A_i^{i'} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\operatorname{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i\cos\alpha_i & \operatorname{sen}\vartheta_i\operatorname{sen}\alpha_i & a_i\cos\vartheta_i \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i\cos\alpha_i & -\cos\vartheta_i\operatorname{sen}\alpha_i & a_i\operatorname{sen}\vartheta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo: $\underline{T_e^b(q) = T_0^b\, T_m^0\, T_e^m}$ → MATRICE DEL BRACCIO

Es:

①



$$T_3^0(q) = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \quad \text{con} \quad A_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & -\operatorname{sen}\vartheta_1 & 0 & a_1\cos\vartheta_1 \\ \operatorname{sen}\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & 0 & a_1\operatorname{sen}\vartheta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NB:
$$A_i^{i-1}(q) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\operatorname{sen}\vartheta_i & 0 & a_i\cos\vartheta_i \\ \operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & a_i\operatorname{sen}\vartheta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In pratica ruoto di un angolo ϑ_i attorno a z_i e traslo di:

$$\begin{cases} a_i\cos\vartheta_i \to \text{lungo l'asse } x \\ a_i\operatorname{sen}\vartheta_i \to \text{lungo l'asse } y \end{cases}$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & -\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) & 0 & \dots \\ \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) & \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots a_2\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ a_2\operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\text{sen}(q_3) & 0 & a_3\cos(q_3) \\ \text{sen}(q_3) & \cos(q_3) & 0 & a_3\,\text{sen}(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti anche che: $A_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & a_2\cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & a_2\,\text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$T_3^0(q) = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\text{sen}\,q_1 & 0 & a_1\cos q_1 \\ \text{sen}\,q_1 & \cos q_1 & 0 & a_1\,\text{sen}\,q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

Si noti che abbiamo usato la postmoltiplicazione, cioè

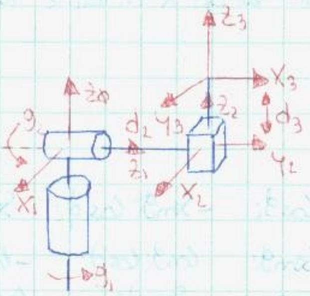
Si noti che:

$$T_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \cdot \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\text{sen}\,q_2 & 0 & a_2\cos q_2 \\ \text{sen}\,q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2\,\text{sen}\,q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\text{sen}\,q_3 & 0 & a_3\cos q_3 \\ \text{sen}\,q_3 & \cos q_3 & 0 & a_3\,\text{sen}\,q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

trasformazione costante.

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2+q_3) & -\text{sen}(q_1+q_2+q_3) & 0 & a_1\cos q_1 + a_2\cos(q_1+q_2) + a_3\cos(q_1+q_2+q_3) \\ \text{sen}(q_1+q_2+q_3) & \cos(q_1+q_2+q_3) & 0 & a_1\,\text{sen}\,q_1 + a_2\,\text{sen}(q_1+q_2) + a_3\,\text{sen}(q_1+q_2+q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)



MANIPOLATORE SFERICO

Abbiamo due giunti rotazionali e un giunto prismatico (traslazionale). Si noti che per comodità abbiamo posto: $O_0 \equiv O_1$ → così si semplificano i parametri di Hartenberg che sono:

BRACCIO	a_i	α_i	d_i	q_i
1	0	$-90°$	0	q_1
2	0	$+90°$	d_2	q_2
3	0	0	d_3	0

Quindi:

$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\text{sen}\,q_1 & 0 \\ \text{sen}\,q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ ruota attorno a y_1

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \text{sen}\,q_2 & 0 \\ \text{sen}\,q_2 & 0 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed infine: $A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ sostanzialmente non svolgo nessuna rotazione ma faccio una semplice traslazione lungo l'asse z.

Quindi:

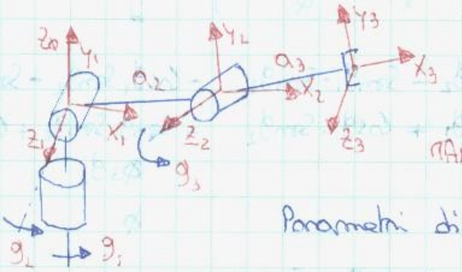
$$T_3^0(q) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot A_3^2(d_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\text{sen}\,q_1 & 0 \\ \text{sen}\,q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \text{sen}\,q_2 & 0 \\ \text{sen}\,q_2 & 0 & -\cos q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cdot \cos q_2 & -\text{sen}\, q_1 & \cos q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 & -d_2\, \text{sen}\, q_1 \\ \text{sen}\, q_1 \cdot \cos q_2 & \cos q_1 & \text{sen}\, q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 & d_2 \cos q_1 \\ -\text{sen}\, q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cdot \cos q_2 & -\text{sen}\, q_1 & \cos q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 & d_3 \cos q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 - d_2\, \text{sen}\, q_1 \\ \text{sen}\, q_1 \cdot \cos q_2 & \cos q_1 & \text{sen}\, q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 & d_3\, \text{sen}\, q_1 \cdot \text{sen}\, q_2 + d_2 \cos q_1 \\ -\text{sen}\, q_2 & 0 & \cos q_2 & d_3 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ Matrice del braccio.

(3) 

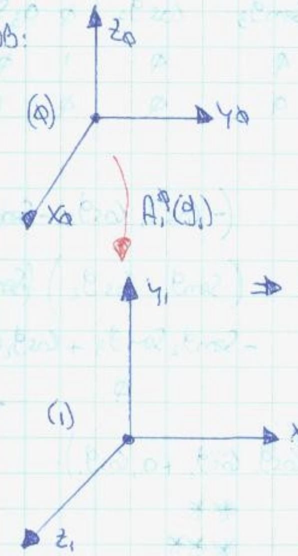
MANIPOLATORE ANTROPOMORFO. $q = [q_1\ q_2\ q_3]^T$

Parametri di Denavit-Hartenberg:

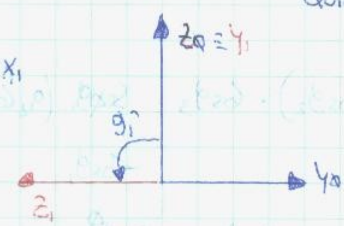
BRACCIO	a_i	α_i	d_i	q_i
1	0	90°	0	q_1
2	a_2	0	0	q_2
3	a_3	0	0	q_3

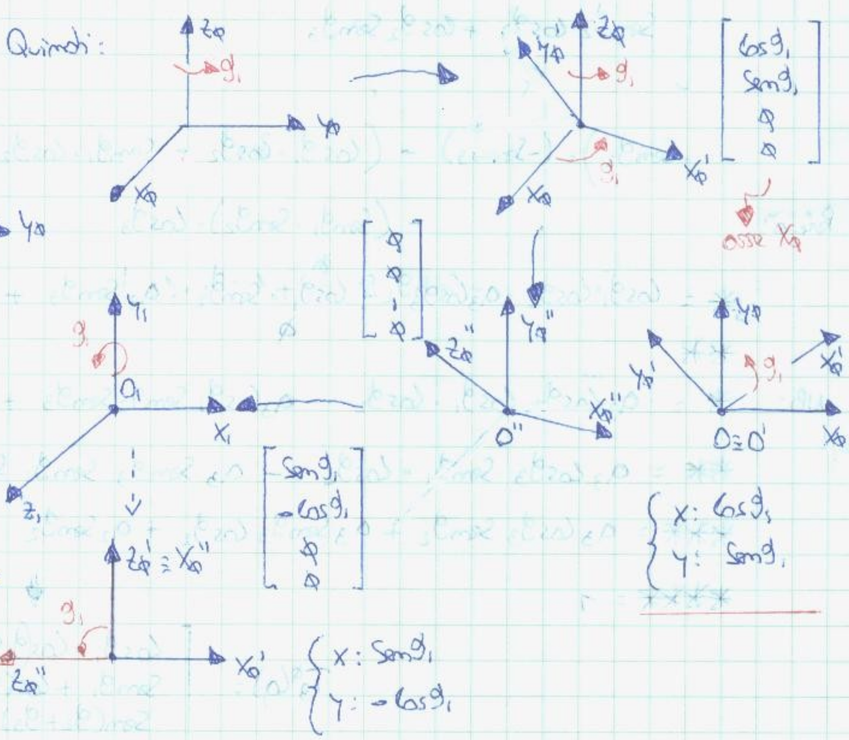
$$A_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \text{sen}\, q_1 & 0 \\ \text{sen}\, q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ ruota attorno all'asse y_0 di q_1.

NB: 

→ La trasformazione $A_1^0(q_1)$ ruota di q_1 attorno all'asse z_0.



Quindi: 

NB: L'ultima colonna della matrice è:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{non c'è nessuna traslazione.}$$

Analogamente: ↱ rotazione attorno a z. • Zoom:

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\text{sen}\, q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \text{sen}\, q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2\, \text{sen}\, q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10

$$A_3^2(\vartheta_3) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_3 & -\text{sen}\,\vartheta_3 & 0 & a_3\cos\vartheta_3 \\ \text{sen}\,\vartheta_3 & \cos\vartheta_3 & 0 & a_3\,\text{sen}\,\vartheta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi per $i = 2,3$ si ha:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\text{sen}\,\vartheta_i & 0 & a_i\cos\vartheta_i \\ \text{sen}\,\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & a_i\,\text{sen}\,\vartheta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$T_3^0(q) = A_1^0(\vartheta_1)\cdot A_2^1(\vartheta_2)\cdot A_3^2(\vartheta_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 & 0 & \text{sen}\,\vartheta_1 & a_1\cos\vartheta_1 \\ \text{sen}\,\vartheta_1 & 0 & -\cos\vartheta_1 & a_1\,\text{sen}\,\vartheta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta_2 & -\text{sen}\,\vartheta_2 & 0 & a_2\cos\vartheta_2 \\ \text{sen}\,\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 & 0 & a_2\,\text{sen}\,\vartheta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta_3 & -\text{sen}\,\vartheta_3 & 0 & a_3\cos\vartheta_3 \\ \text{sen}\,\vartheta_3 & \cos\vartheta_3 & 0 & a_3\,\text{sen}\,\vartheta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - 0 & -\cos\vartheta_1\,\text{sen}\,\vartheta_2 - 0 & \text{sen}\,\vartheta_1 & \cos\vartheta_1\, a_2\cos\vartheta_2 - 0 + a_1\cos\vartheta_1 \\ \text{sen}\,\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 + 0 & -\text{sen}\,\vartheta_1\,\text{sen}\,\vartheta_2 + 0 & -\cos\vartheta_1 & a_2\cos\vartheta_2\,\text{sen}\,\vartheta_1 + 0 + a_1\,\text{sen}\,\vartheta_1 \\ \text{sen}\,\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 & 0 & a_2\,\text{sen}\,\vartheta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta_3 & -\text{sen}\,\vartheta_3 & 0 & a_3\cos\vartheta_3 \\ \text{sen}\,\vartheta_3 & \cos\vartheta_3 & 0 & a_3\,\text{sen}\,\vartheta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - 0)\cdot\cos\vartheta_3 - (\cos\vartheta_1\,\text{sen}\,\vartheta_2 - 0)\,\text{sen}\,\vartheta_3 & (-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - 0)\cdot(-\text{sen}\,\vartheta_3) - (\cos\vartheta_1\cdot\text{sen}\,\vartheta_2 - 0)\cdot\cos\vartheta_3 & \text{sen}\,\vartheta_1 & \ast \\ (\text{sen}\,\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2)\cdot\cos\vartheta_3 + (-\text{sen}\,\vartheta_1\cdot\text{sen}\,\vartheta_2)\cdot\text{sen}\,\vartheta_3 & (\text{sen}\,\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2)(-\text{sen}\,\vartheta_3) - (\text{sen}\,\vartheta_1\cdot\text{sen}\,\vartheta_2)\cdot\cos\vartheta_3 & -\cos\vartheta_1 & \ast\ast \\ \text{sen}\,\vartheta_2\cos\vartheta_3 + \cos\vartheta_2\,\text{sen}\,\vartheta_3 & -\text{sen}\,\vartheta_2\,\text{sen}\,\vartheta_3 + \cos\vartheta_2\cos\vartheta_3 & 0 & \ast\ast\ast \\ 0 & 0 & 0 & \ast\ast\ast\ast \end{bmatrix}$$

NB:

$\ast = a_3\cos\vartheta_3\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - a_3\cos\vartheta_1\,\text{sen}\,\vartheta_2\,\text{sen}\,\vartheta_3 + \cos\vartheta_1\, a_2\cos\vartheta_2 + a_1\cos\vartheta_1$

$\ast\ast = a_3\cos\vartheta_3\,\text{sen}\,\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - a_3\,\text{sen}\,\vartheta_3\,\text{sen}\,\vartheta_1\,\text{sen}\,\vartheta_2 + a_2\cos\vartheta_2\,\text{sen}\,\vartheta_1 + a_1\,\text{sen}\,\vartheta_1$

$\ast\ast\ast = a_3\cos\vartheta_3\,\text{sen}\,\vartheta_2 + a_3\,\text{sen}\,\vartheta_3\cos\vartheta_2 + a_2\,\text{sen}\,\vartheta_2$

$\ast\ast\ast\ast = 1$

$$\Downarrow$$

$$T_3^0(q) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1\cdot\cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\cos\vartheta_1\,\text{sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & \text{sen}\,\vartheta_1 & \ast \\ \text{sen}\,\vartheta_1\cdot\cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\text{sen}(\vartheta_1)\cdot\text{sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & -\cos\vartheta_1 & \ast\ast \\ \text{sen}(\vartheta_2+\vartheta_3) & \cos(\vartheta_2+\vartheta_3) & 0 & \ast\ast\ast \\ 0 & 0 & 0 & \ast\ast\ast\ast \end{bmatrix}$$