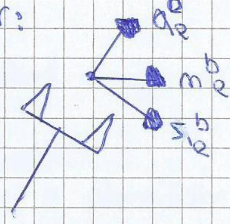
$$ {}^{2}T_E = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\operatorname{sen} q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \operatorname{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$\Downarrow$$

$$ {}^{b}T_E = {}^{b}T_2 \cdot {}^{2}T_E = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\operatorname{sen}(q_1+q_2) & 0 & a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1+q_2) \\ \operatorname{sen}(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & a_1 \operatorname{sen} q_1 + a_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

E' bene fin da subito fornire alcune spiegazioni. Effettuiamo uno zoom sul tool del robot:

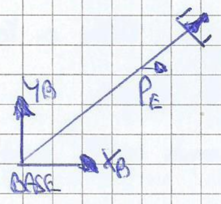


a_e^b = versore approccio (avvicinamento verso il pezzo)

s_e^b = sliding con verso di apertura del tool

n_e^b = versore normale agli altri due.

Il vettore P^E punta al centro del tool.

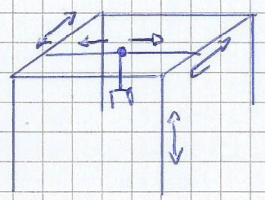


La cinematica diretta può essere espressa tramite la matrice di trasformazione omogenea della terna terminale rispetto alla terna base:

$$ T_E^{b}(q) = \begin{bmatrix} n_e^b(q) & s_e^b(q) & a_e^b(q) & p_e^b(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

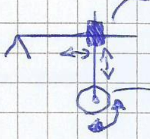
In base al tipo ed al numero dei giunti possiamo fare delle suddivisioni dei robot manipolatori.

Un robot con tutti i giunti traslazionali viene detto robot cartesiano.



3 GIUNTI TRASLAZIONALI (tipo carro ponte)

Un robot con due giunti traslazionali e un giunto rotazionale viene detto robot sferico.



Un robot con 2 giunti rotazionali ed un giunto traslazionale viene detto robot sferico.

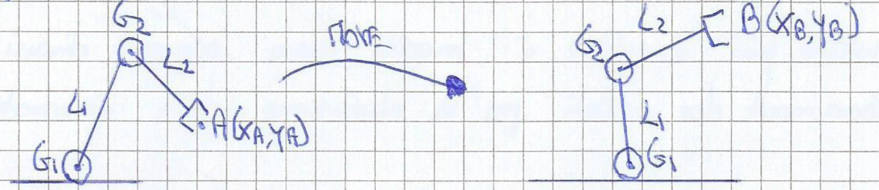
Un robot antropomorfo ha tutti i giunti rotazionali. Oltre a tale classificazione vi è anche una classificazione legata allo spazio di lavoro.
Per spazio di lavoro si intende l'insieme dei punti nello spazio raggiungibili dal robot.
Per posa si intende la posizione di un robot nel piano in termini di coordinate (x,y) e l'angolo ϑ formato con l'asse delle x.
Le variabili di giunto invece sono gli angoli che ogni link forma nei confronti del successivo. Quindi:

$$\{x_E, y_E, \vartheta_E\} = T_P\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots\}$$

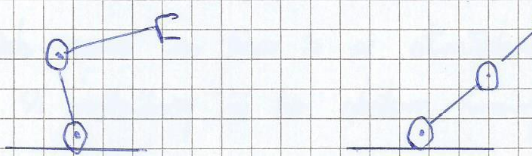
La cinematica inversa consente, data la posizione e postura dell'end effector, di calcolare le variabili di giunto. Quindi:

$$\{g_1, g_2, ..\} = T\{x_E, y_E, g_E\}$$

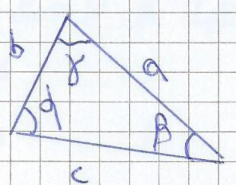
Per quanto riguarda la cinematica inversa le cose si complicano in quanto ci possono essere differenti soluzioni al medesimo problema. Per esempio si supponga di avere un robot planare ossia un robot che si muove nel piano X,Y che sia inizialmente nella posizione seguente:



Nella posizione iniziale (x_A, y_A) le variabili di giunto valgono g_1^A e g_2^A. Nella posizione finale le variabili di giunto g_1^B e g_2^B quanto varranno? È chiaro che ci possono essere più soluzione al problema. Per esempio:

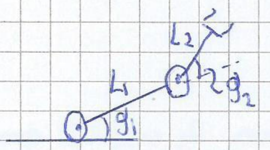


Per una configurazione di questo tipo si potrebbe usare la legge nota come legge dei coseni. Tale legge viene anche chiamata teorema di Carnot:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Quindi consideriamo q_2:



$$\cos q_2 = \frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

$$\Downarrow$$

$$q_2 = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)$$

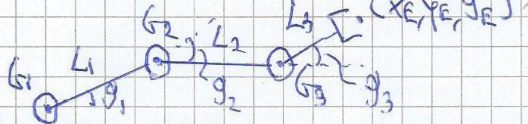
Per q_1:

$$q_1 = \mathrm{Tg}^{-1}(y/x) - \mathrm{Tg}^{-1}\left(\frac{l_2 \operatorname{sen} q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}\right)$$

Per strutture più complesse è meglio usare approcci diversi. Ci sono grossolanamente due metodi per la risoluzione della cinematica inversa:

- metodo per il calcolo in forma chiusa → metodo analitico; → metodo geometrico
- metodo per il calcolo della sol. numerica → metodi iterativi; → metodi incrementali.

Il primo metodo ci da una soluzione esatta mentre il secondo metodo ha un tempo di esecuzione indefinito se si vuole un errore definito, e viceversa. Consideriamo il primo metodo ed in particolare il metodo analitico.



Poniamo:

$$T_3^b = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2+q_3) & -\operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & 0 & l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2) \\ \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_3) & \cos(q_1+q_2+q_3) & 0 & l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta_E & -\mathrm{sen}\,\vartheta_E & 0 & x_E \\ \mathrm{sen}\,\vartheta_E & \cos\vartheta_E & 0 & y_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_E = \ell_1\cos\vartheta_1 + \ell_2\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ y_E = \ell_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1 + \ell_2\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ \vartheta_E = \vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3 \end{cases}$$

Eleviamo le prime due equazioni al quadrato:

$$x_E^2 = \ell_1^2\cos^2\vartheta_1 + \ell_2^2\cos^2(\vartheta_1+\vartheta_2) + 2\ell_1\ell_2\cos\vartheta_1\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)$$
$$y_E^2 = \ell_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta_1 + \ell_2^2\,\mathrm{sen}^2(\vartheta_1+\vartheta_2) + 2\ell_1\ell_2\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)$$

Sommiamole:

$$x_E^2+y_E^2 = \ell_1^2+\ell_2^2+2\ell_1\ell_2\left(\cos\vartheta_1\cos(\vartheta_2+\vartheta_1) + \mathrm{sen}\,\vartheta_1\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right)$$

Dalla trigonometria si ricorda che:

$$\cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$x_E^2+y_E^2 = \ell_1^2+\ell_2^2+2\ell_1\ell_2\cos\vartheta_2$$

Quindi: $\cos\vartheta_2 = \dfrac{x_E^2+y_E^2-\ell_1^2-\ell_2^2}{2\ell_1\ell_2} \Rightarrow \vartheta_2 = \cos^{-1}\left(\dfrac{x_E^2+y_E^2-\ell_1^2-\ell_2^2}{2\ell_1\ell_2}\right)$

Per ϑ_1:

$$x_E = \ell_1\cos\vartheta_1 + \ell_2\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) = \ell_1\cos\vartheta_1 + \ell_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \mathrm{sen}\,\vartheta_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2)$$
$$y_E = \ell_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1 + \ell_2\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2) = \ell_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1 + \ell_2(\mathrm{sen}\,\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2)$$

$$\Downarrow$$

$$x_E = (\ell_1+\ell_2\cos\vartheta_2)\cos\vartheta_1 - \ell_2\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1$$
$$y_E = \ell_2\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2\cos\vartheta_1 + (\ell_1+\ell_2\cos\vartheta_2)\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1$$

Passiamo alla forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2\cos\vartheta_2 & -l_2\sin\vartheta_2 \\ l_2\sin\vartheta_2 & l_1 + l_2\cos\vartheta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 \end{bmatrix}$$

Ricordandosi che per invertire una matrice bisogna:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \text{MATRICE} \\ \text{COFATTORI} \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(l_1+l_2\cos\vartheta_2)^2 + l_2^2\sin^2\vartheta_2} \cdot \begin{bmatrix} l_1 + l_2\cos\vartheta_2 & l_2\sin\vartheta_2 \\ -l_2\sin\vartheta_2 & l_1 + l_2\cos\vartheta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix}$$

Quindi:

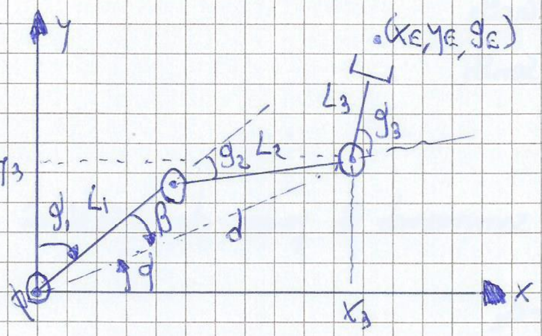
$$\vartheta_1 = \operatorname{atan2}\left(-l_2\sin\vartheta_2\, x_E + (l_1 + l_2\cos\vartheta_2)\, y_E,\ (l_1+l_2\cos\vartheta_2)\, x_E + l_2\sin\vartheta_2\, y_E\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_E - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

Si noti che la funzione atan2 (arcotangente 2) in trigonometria rappresenta una variazione della funzione arctg.
La funzione Atan2 restituisce l'Arctg delle coordinate x, y specificate come argomenti.
A questo punto verrà analizzato il metodo geometrico.

Consideriamo il seguente robot:



Dal noto teorema di Pitagora si ha:

$$d^2 = x_3^2 + y_3^2 \quad e \quad d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(\pi - g_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\pi - g_2) = -\cos(g_2) \quad e \text{ quindi: } \cos(g_2) = \frac{d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

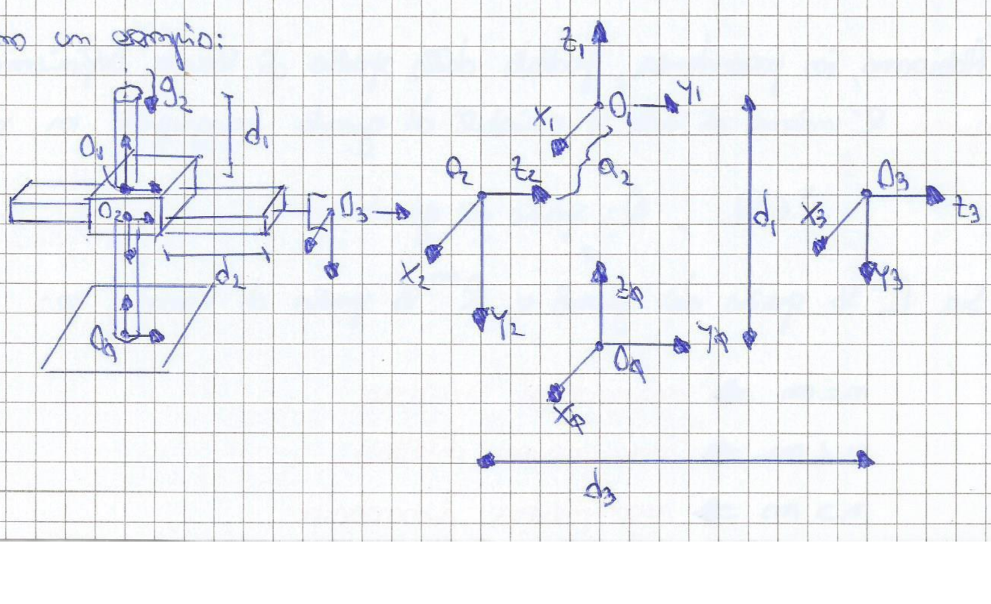
Per il calcolo di g_1:

$$g_1 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \quad e \quad \alpha = \mathrm{Atan}(y, x)$$

Inoltre:

$$l_2^2 = l_1^2 + d^2 - 2 l_1 d \cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{l_1^2 - l_2^2 + d^2}{2 l_1 d}$$

Vediamo un esempio:

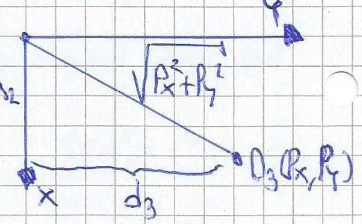


Le coordinate di O_3 sono:

$$P_x = -d_3 \operatorname{sen}\vartheta_2 + a_2 \cos\vartheta_2$$
$$P_y = d_3 \cos\vartheta_2 + a_2 \operatorname{sen}\vartheta_2$$
$$P_z = d_1$$

Elevando al quadrato e sommando le prime due relazioni si ottiene:

$$P_x^2 + P_y^2 = d_3^2 + a_2^2$$
$$\Downarrow$$
$$d_3 = \sqrt{(P_x^2 + P_y^2 - a_2^2}$$



Chiaramente noto d_3 si ricavano Seno e Coseno di ϑ_2:

$$\begin{aligned} P_x &= -d_3 \operatorname{sen}\vartheta_2 + a_2 \cos\vartheta_2 \\ P_y &= d_3 \cos\vartheta_2 + a_2 \operatorname{sen}\vartheta_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\vartheta_2 = a_2 P_y - d_3 P_x / d_3^2 + a_2^2 \\ \cos\vartheta_2 = P_y - a_2 \operatorname{sen}(\vartheta_2) / d_3 \end{cases}$$

In conclusione:

$$\vartheta_2 = \mathrm{ATAN2}(\operatorname{sen}\vartheta_2, \cos\vartheta_2)$$

Abbiamo, in precedenza, parlato dello spazio di lavoro. Definiamo spazio dei giunti l'insieme di tutte le variabili di giunto raggruppate in vettore.

$$\vec{q} \in Q \quad , \quad Q = \text{spazio dei giunti}.$$

Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio dei giunti e $\mathbb{R}^m$ lo spazio di lavoro, se:

$n = m \Rightarrow$ manipolatore normale

$n < m \Rightarrow$ manipolatore difettivo

$n > m \Rightarrow$ manipolatore ridondante