7) Si consideri: $\{\min z = x_1+4x_2+3x_3 : x_1+3x_2+x_3 = 3$
$2x_1 - x_2 = 4$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

a) Risolvere il problema con il simplesso

b) Scrivere il problema duale

c) Risolvere graficamente il problema duale

d) Si trovi soluzione ottima del primale con gli scarti complementari.

7) a)

		x_1	x_2	x_3
$-z$	0	1	4	3
	3	1	3	1
	4	2	-1	0

Non esiste una base iniziale ammissibile. Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	0	0	0	1	1
x_4	3	1	3	1	1	0
x_5	4	2	-1	0	0	1

$\underbrace{\hphantom{x_4\ x_5}}_{I}$

$\Rightarrow$ Forma canonica:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-7	-3	-2	-1	0	0
x_4	3	1	3	1	1	0
x_5	4	2	-1	0	0	1

$\underbrace{\hphantom{x_4\ x_5}}_{I}$

Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-1	0	$-7/2$	-1	0	$3/2$
x_4	1	0	$7/2$	1	1	$-1/2$
x_1	2	1	$-1/2$	0	0	$1/2$

$\Rightarrow$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	0	$7/2$	-1	1	1
x_2	$2/7$	0	1	$2/7$	$2/7$	$-1/7$
x_1	$15/7$	1	0	$1/7$	$1/7$	$3/7$

NB: $c_3 = -1 < 0$ ma non fa parte della base.

Concludendo:

		x_1	x_2	x_3
$-z$	0	1	4	3
x_2	$2/7$	0	1	$2/7$
x_1	$15/7$	1	0	$1/7$

$\Rightarrow$ Forma canonica:
(faccio il pivot su a_{21} e a_{12}).

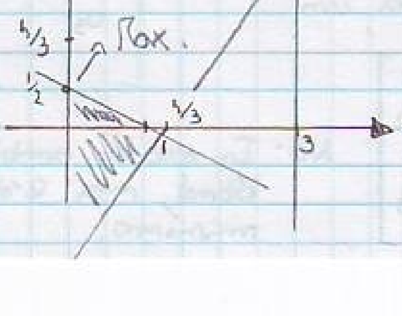
		x_1	x_2	x_3
$-z$	$-14/7$	0	0	$13/7$
x_2	$2/7$	0	1	$2/7$
x_1	$15/7$	1	0	$1/7$

$\Rightarrow$ il tableau è già ottimo.

b) Problema duale: $\{\max z = 3u_1 + 4u_2 : u_1 + 2u_2 \leq 1$
$3u_1 - u_2 \leq 4$
$u_1 \leq 3\}$

c) Graficamente:

$u^* = (0, \frac{1}{2})$



d) $x_1^*(u_1^* + 2u_2^* - 1) = 0$
$x_2^*(3u_1^* - u_2^* - 4) = 0$
$x_3^*(u_1^* - 3) = 0$
$u_1^*(x_1^* + 3x_2^* + x_3^* - 3) = 0$
$u_2^*(2x_1^* - x_2^* - 4) = 0$
$\Downarrow$

(54)

Siccome: $u^* = (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ $X_1^*(0+1-1)=0 \Rightarrow X_1^* \neq 0$

$X_3^* = 0$

$X_2^*(-\frac{1}{2}-4)=0$ $\Rightarrow$ I CONTI NON TORNANO!!!

$\frac{1}{2}(2X_1^* - X_2^* - 4) = 0$

5) Scrivere il problema duale associato al seguente problema:

$$\left\{ \min\ 2X_2 + X_3 - 3X_4 : \begin{array}{l} X_1 - X_2 + 2X_4 \geq 2 \\ 2X_2 + X_3 = 4 \\ 2X_1 - X_3 + X_4 \leq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \\ X_3, X_4 \text{ libere} \end{array} \right\}$$

5) $$\left\{ \max\ w = 2U_1 + 4U_2 + U_3 : \begin{array}{l} U_1 + 2U_3 \leq 0 \\ -U_1 + 2U_2 \leq 2 \\ U_2 - U_3 = 1 \\ 2U_1 + U_3 = -3 \\ U_1 \geq 0 \\ U_2 \text{ libera} \\ U_3 \leq 0 \end{array} \right\}$$

NB: $[U_1\ U_2\ U_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + 2U_3 \\ -U_1 + 2U_2 \\ U_2 + (U_3 -) \\ 2U_1 + U_3 \end{bmatrix}$

7) Scrivere il problema duale associato a:

$$\left\{ \min\ z = X_1 - X_2 + X_4 : \begin{array}{l} X_1 + X_2 - X_3 \geq 2 \\ X_2 + X_3 \leq 1 \\ X_1 + X_4 = 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \\ X_3, X_4 = \text{libere}. \end{array} \right\}$$

7) $$\left\{ \max\ w = 2U_1 + U_2 + 5U_3 : \begin{array}{l} U_1 + U_3 \leq 1 \\ U_1 + U_2 \leq -1 \\ -U_1 + U_2 = 1 \\ U_3 = 0 \\ U_1 \geq 0 \\ U_2 \leq 0 \\ U_3 \text{ libera} \end{array} \right\}$$

NB: $[U_1\ U_2\ U_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + U_3 \\ U_1 + U_2 \\ -U_1 + U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$

8) Risolvere con il simplesso duale il problema con i seguenti dati:

$c^T = [0\ 0\ 0\ 4\ 3\ 1\ 0]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

NB: In caso di ambiguità non si usi Bland, ma l'elemento di indice minimo.

10)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	0	0	0	0	4	3	1	0
x_2	-1	0	1	0	-5	1	3	0
x_1	-5	1	0	0	-1	0	4	0
x_3	-3	0	0	1	0	-1	3	0
x_7	-5	0	0	0	0	2	-3	1

$\Rightarrow$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	$-4/5$	0	$4/5$	0	0	$19/5$	$17/5$	0
	$+1/5$	0	$-1/5$	0	1	$-1/5$	$-3/5$	0
	$-\frac{24}{5}$	1	$-1/5$	0	0	$-1/5$	$17/5$	0
	-3	0	0	1	0	-1	3	0
	-5	0	0	0	0	2	-3	1

Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	-20	4	0	0	0	3	17	0
x_4	5	-1	0	0	1	0	-4	0
x_2	24	-5	1	0	0	1	-17	0
x_3	-3	0	0	1	0	-1	3	0
x_7	-5	0	0	0	0	2	-3	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	-29	4	0	3	0	0	26	0
x_4	5	-1	0	0	1	0	-4	0
x_2	21	-5	1	1	0	0	-14	0
x_5	3	0	0	-1	0	1	-3	0
x_7	-11	0	0	2	0	0	3	1

Si nota che il problema è impossibile.

11) Risolvere il seguente problema mediante i tagli di Gomory (scegliere la riga generatrice diversa dalla riga 0 di indice minimo.

$$\left\{ \max\ z = 3x_1 + 2x_2 : \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ INTERI} \end{array} \right\}$$

11) Scriviamo il tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	-3	-2	0	0
x_3	3	2	3	1	0
x_4	4	3	2	0	1

visto che:

$$\left\{ \min\ z = -3x_1 - 2x_2 : \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

A questo punto risolviamo con il simplesso:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	4	0	0	0	1
x_3	$1/3$	0	$5/3$	1	$-2/3$
x_1	$4/3$	1	$2/3$	0	$1/3$

$x^* = (x_1^* = 4/3,\ x_3^* = 1/3)$

$z^* = 4$

A questo punto scelgo come riga generatrice la riga 1. Quindi:

$$\frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$0x_1 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)x_2 + x_3 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)x_4 = 0 + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

TABLEAU ORLATO:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	4	0	0	0	1	0
x_3	$1/3$	0	$5/3$	1	$-2/3$	0
x_1	$4/3$	1	$2/3$	0	$1/3$	0
x_5	$-1/3$	0	$-2/3$	0	$-1/3$	1

Si prosegue fino a quando non si ottengono tutti i valori interi.

12) Risolvere il seguente problema mediante i piani di Gomory:

$$\begin{cases} \max z = 4x_1 + 5x_2 : & 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1 + 3x_2 \le 7 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ INTERE} \end{cases}$$

Scegliere riga generatrice di indice minimo.

12)

$$\begin{cases} \min z = -4x_1 - 5x_2 : & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 7 \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	-4	-5	0	0	0
x_3	8	2	2	1	0	0
x_4	7	1	3	0	1	0
x_5	5	2	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	10	0	-3	0	0	2
x_3	3	0	1	1	0	-1
x_4	9/2	0	5/2	0	1	-1/2
x_1	5/2	1	1/2	0	0	1/2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	77/5	0	0	0	6/5	7/5
x_3	6/5	0	0	1	-2/5	-1/5
x_2	9/5	0	1	0	2/5	-1/5
x_1	8/5	1	0	0	-1/5	3/5

→ scelgo la riga 1.

Quindi:

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + \left(-1 + \tfrac{3}{5}\right)x_4 + \left(1 + \tfrac{2}{5}\right)x_5 = 1 + \tfrac{1}{5}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	77/5	0	0	0	6/5	7/5	0
x_3	6/5	0	0	1	-2/5	-1/5	0
x_2	9/5	0	1	0	2/5	-1/5	0
x_1	8/5	1	0	0	-1/5	3/5	0
x_6	-1/5	0	0	0	-3/5	-2/5	1

uso poi il simplesso duale.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	15	0	0	0	0	1	2
RIGA GENERATRICE → x_3	1/3	0	0	1	0	-2/3	-2/3
x_2	5/3	0	1	0	0	-1/3	2/3
x_1	5/3	1	0	0	0	2/3	-1/3
x_4	1/3	0	0	0	1	1/3	-5/3

Quindi:

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + \left(-1 + \tfrac{1}{3}\right)x_5 + \left(-1 + \tfrac{1}{3}\right)x_6 = -1 + \tfrac{1}{3}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	15	0	0	0	0	1	2	0
x_3	1/3	0	0	0	1	-1/3	-1/3	0
x_2	5/3	0	1	0	0	-1/3	2/3	0
x_1	5/3	1	0	0	0	2/3	-1/3	0
x_4	1/3	0	0	0	0	1/3	-5/3	0
x_7	-1/3	0	0	0	0	-1/3	-1/3	1

$-z$		0	0	0	0	0	1	3
x_3	2	0	0	1	0	0	0	-1
x_2	2	0	1	0	0	0	1	-1
x_1	1	1	0	0	0	0	-1	2
x_4	0	0	0	0	1	0	-2	1
x_5	1	0	0	0	0	1	1	-3

TABLEAU OTTIMO!!! ←

13) Risolvere il seguente problema con i tagli di Gomory.

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 : & 2x_1 + x_2 \le 7 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ INTERE} \end{cases}$$

13) $\{ \min z = -3x_1 - 2x_2 : \ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7;\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8;\ x_1 + x_2 + x_5 = 6;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	-3	-2	0	0	0
→ x_3	7	2	1	1	0	0
x_4	8	3	2	0	1	0
x_5	6	1	1	0	0	1

$\underbrace{\qquad}_{I}$

Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	8	0	0	0	1	0
→ x_3	5/3	0	-1/3	1	-2/3	0
x_1	8/3	1	2/3	0	1/3	0
x_5	10/3	0	1/3	0	-1/3	1

$\Rightarrow 0x_1 + (-1 + \frac{2}{3})x_2 + x_3 + (-1 + \frac{1}{3})x_4 + 0x_5 = 1 + \frac{2}{3}$

$\Downarrow$

$-\frac{2}{3} = 0x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 0x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 0x_5$

Allora:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	8	0	0	0	1	0	0
x_3	5/3	0	-1/3	1	-2/3	0	0
x_1	8/3	1	2/3	0	1/3	0	0
x_5	10/3	0	1/3	0	-1/3	1	0
x_6	-2/3	0	-2/3	0	-1/3	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z$	8	0	0	0	1	0	0
→ x_3	2	0	0	1	-1/2	0	-1/2
x_1	2	1	0	0	0	0	1
x_5	3	0	0	0	-1/2	1	1/2
x_2	1	0	1	0	1/2	0	-3/2

↳ TABLEAU OTTIMO!!

11) Risolvere il seguente problema con i tagli di Gomory.

$$\begin{cases} \max\ z = 2x_1 + x_2 : & 3x_1 - 2x_2 \le 0 \\ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ INTERI} \end{cases}$$

11) $\{ \min z = -2x_1 - x_2 : \ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6;\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	-2	-1	0	0
x_3	0	3	-2	1	0
x_4	6	1	2	0	1

$\underbrace{\qquad}_{I}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	0	-1/3	2/3	0
x_1	0	1	-2/3	1/3	0
x_4	6	0	8/3	-1/3	1

⇒

(18)

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	$21/4$	0	0	$3/8$	$7/8$
	$3/2$	1	0	$1/4$	$1/4$
	$9/4$	0	1	$-1/8$	$3/8$

Dopo di che si ordina il tableau nella solita maniera.

. . . .

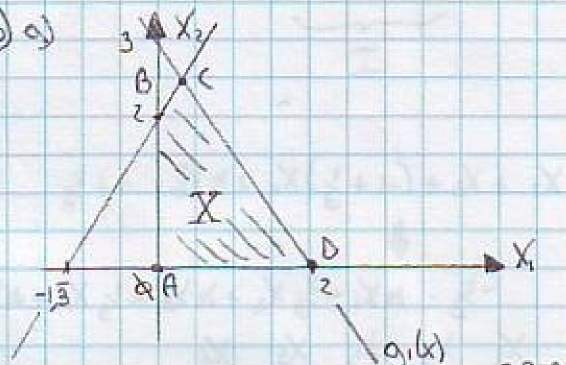
15) Si consideri: $\left\{ \min z = -x_2 : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{ INTERE} \end{array} \right\}$

a) Risolvere graficamente il problema rilassato.

b) Risolvere mediante tagli di Gomory.

c) Scrivere forma intera e frazionaria dei tagli di Gomory.

15) a)



$g_1(x) = 3x_1 + 2x_2 \le 6$

$g_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \le 4$

$\nabla z = \text{Grad}\, z = -1$

$-x_2$

$B = (0,2)$ è evidentemente l'ottimo. Verifichiamolo.

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	0	-1	0	0
x_3	6	3	2	1	0
x_4	4	-3	2	0	1

$\underbrace{x_3 \quad x_4}_{I}$

FORMA STANDARD:

$\left\{ \min z = -x_2 : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array} \right.$

Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	2	$-3/2$	0	0	$1/2$
x_3	2	6	0	1	-1
x_2	2	$-3/2$	1	0	$1/2$

$\Rightarrow$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	$5/2$	0	0	$3/2$	$1/4$
x_1	$1/3$	1	0	$1/6$	$-1/6$
x_2	$5/2$	0	1	$1/4$	$-1/4$

considero frazione più vicina a 0,5 e quindi la riga 2 è la riga generatrice.

Infatti:

$0x_1 + 1x_2 + (0+\frac{1}{4})x_3 + (-1+\frac{3}{4})x_4 = 0 + 5/2$

Quindi:

$0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 5/2 \rightsquigarrow$ NUOVO VINCOLO.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	$5/2$	0	0	$3/2$	$1/4$	0
x_1	$1/3$	1	0	$1/6$	$-1/6$	0
x_2	$5/2$	0	1	$1/4$	$-1/4$	0
x_5	$-5/2$	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1

$\Rightarrow$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	$5/3$	0	0	$17/12$	0	$1/3$
x_1	$+8/9$	1	0	$2/9$	0	$-2/9$
x_2	$10/3$	0	1	$1/3$	0	$-1/3$
x_5	$10/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$

La nuova riga generatrice è la 1:

$$x_1 + 0x_2 + (0+\tfrac{2}{9})x_3 + 0x_4 + (-1+\tfrac{7}{9})x_5 = 8/9 \Rightarrow -8/9 = 0x_1 + 0x_2 - 2/9\, x_3 + 0x_4 - 7/9\, x_5$$

A questo punto si ha:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$-z$	$5/3$	0	0	$3/2$	$1/4$	0	0
X_1	$8/9$	1	0	$5/9$	0	$-2/9$	0
X_2	$10/3$	0	1	$1/3$	0	$-1/3$	0
X_5	$10/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0
X_6	$-8/9$	0	0	$-2/9$	0	$-7/9$	1

$\Rightarrow$ e si prosegue in questa maniera fino ad ottenere tutti valori interi.

16) Si consideri: $\begin{cases} \min z = X_1 + 2X_2 - X_3 : & 2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 6 \\ & 4X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 8 \\ & X_2 - X_3 = 0 \\ & -2X_1 \geq -9 \\ & X_2 \geq 0 \end{cases}$

a) Si semplifichino vincoli ridondanti

b) Risolvere problema geometricamente.

c) Tableau ottimo.

d) Determinare tagli di Gomory

e) Risoluzione grafica dopo Gomory.

16 a) Semplificazione: $X_2 = X_3 \Rightarrow \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_2 \geq 6 \\ 4X_1 + X_2 - 2X_2 \geq 8 \end{cases}$

Quindi:

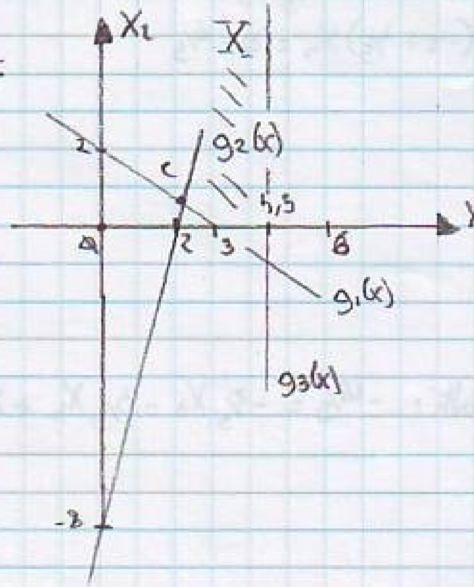
$\Downarrow$

$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ 4X_1 - X_2 \geq 8 \end{cases}$

$\begin{cases} \min z = X_1 + X_2 : & 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ & 4X_1 - X_2 \geq 8 \\ & -2X_1 \geq -9 \\ & X_2 \geq 0 \end{cases}$

f.o.: $X_1 + 2X_2 - X_2 = X_1 + X_2$

b) Graficamente:



$g_1(x) = 2X_1 + 3X_2 \geq 6$

$g_2(x) = 4X_1 - X_2 \geq 8$

$g_3(x) = -2X_1 \geq -9$

ottimo: $c = (15/7, 4/7)$.

$z^* = 2$.

c) TABLEAU:

?

Si noti che: X_1, X_2, X_5 è la base. Inoltre:

$\alpha_{00} = -2$

$b = [15/7, 4/7, 33/7]^T$ corrisponde alla soluzione ottima.

Ma: $N = B^{-1}N$

$c_N = c_N - c_B B^{-1} N$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3	0	0	1	1
$7/4$	1	0	$1/4$	$1/2$
$9/4$	0	1	$3/4$	$1/2$