Chiaramente i punti in cui nessuno dei due vincoli è attivo è per definizione regolare. I punti in cui è attivo solo $g_1(x)$ (II e IV quadrante) escluso l'origine sono regolari. Si noti che in $(x_1=0, x_2=0)$ si ha:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ non è regolare.}$$

In nessun punto g_2 da solo è attivo. I punti in cui entrambi i vincoli sono attivi (I, III quadrante) non sono regolari. Infatti:

$$g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 - x_2 \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x_1 = x_2} \Rightarrow \underline{x_1^2 = x_2^2} \text{ e quindi: } \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{Ra: } A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1+1 = 0 \ (\det) \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\det A(x) = 0 \Rightarrow$ NON CI SONO PUNTI REGOLARI.

Condizioni analitiche del 1° ordine:

$$L = f + \mu g \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1+1) + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 = 0$$

visto che: $L = (x_1+1)^2 + (x_2+\frac{1}{2})^2 + \mu_1(x_1^2 - x_2^2) + \mu_2(x_1 - x_2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2+\tfrac{1}{2}) - 2\mu_1 x_2 - \mu_2 = 0$$
$$\mu_1 g_1(x) = \mu_1(x_1^2 - x_2^2) = 0$$
$$\mu_2 g_2(x) = \mu_2(x_1 - x_2) = 0$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0 \quad e \quad g_1(x), g_2(x) \leq 0.$$

NB: I punti non regolari sono automaticamente candidati per diventare ottimi.

Escludiamo i punti del I, III quadrante $(x_1 - x_2 \leq 0)$ perché regolari per definizione. Quindi:

$$\underline{\mu_2 = 0} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(x_1+1) + 2\mu_1 x_2 = 0 \\ 2(x_2+\frac{1}{2}) - 2\mu_1 x_2 = 0 \\ \mu_1(x_1+x_2) = 0 \\ 0 = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 = 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{array}$$

Nel caso $\mu_1 = 0 \Rightarrow \cancel{x_1 = -1}$, $\cancel{x_2 = -\frac{1}{2}}$

$\Downarrow$

non ammissibile per $g_1(x)$.

Nel caso $\mu_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2(x_1+1) + 2\mu_1 x_1 = 0 \\ 2(-x_1+\frac{1}{2}) + 2\mu_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

Quindi: $x_1 = -\frac{1}{4}$ e $x_2 = \frac{1}{4}$ e $\mu_1 = 3$. $\Rightarrow$ è l'unico candidato per KKT.

Decidiamo ora se $P = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ o i punti di $x_2 = x_1 = q$ sono l'ottimo.

30

Quindi: $\min f(d) = (d+1)^2 + (d+\frac{1}{2})^2 \Rightarrow f'(d) = 2(d+1) + 2(d+\frac{1}{2}) = 0$

$$\Downarrow$$

$$d = -3/4.$$

Perciò:

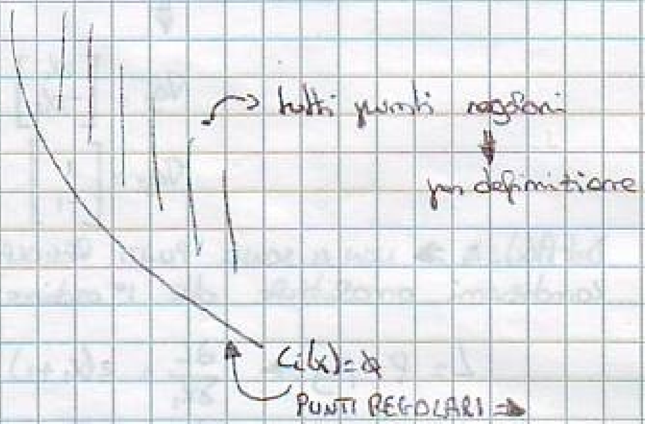
$$P' = (-3/4, -3/4) \quad e \quad f(P') = 1/8.$$

Invece per quanto riguarda P, si ha:

$$f(P) = 9/8.$$

Quindi l'ottimo globale sta nel punto non regolare $P' = (-3/4, -3/4)$.
Quindi riassumendo si trovano i punti regolari e non regolari, e successivamente si costruiscono i rami dei vari sottoproblemi considerando ordinatamente i punti regolari che sono quelli che devono essere "testati".
Quindi:

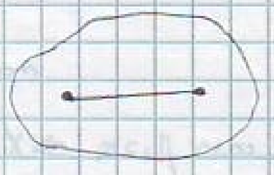
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0 \\ \mu_i g_i(x) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \\ g_i \leq 0 \end{cases}$$



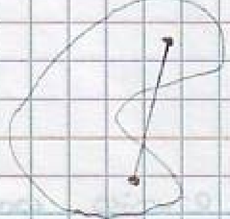
Dunque ricapitolando noi analizziamo i problemi di ottimizzazione non lineare. Consideriamo:

$$\{\min \varphi(x): g_i(x) \leq 0, \; h_j(x) = 0\} \quad \text{con } \varphi(x) \text{ convessa}, \; g_i(x) \text{ concave}, \; h_j(x) \text{ lineari}.$$

Si ha quindi un problema di programmazione lineare convessa, con l'ottimo locale che è anche ottimo globale. Si noti che nella programmazione lineare, il numero di soluzioni candidati all'ottimo è finito, e quindi il problema è COORDINATONO.
Graficamente un insieme convesso viene così rappresentato:



Mentre un insieme non-convesso:



Quando $\{\min f(x)\}$ con $f(x)$ convessa, quando faccio $\{\max(f(x))\}$ $f(x)$ è concava.
Quindi:

$$f \text{ concava} \Rightarrow -f \text{ è convessa e viceversa.}$$

Simili che una funzione lineare è sia concava che convessa. Abbiamo visto un problema in generale può essere privo di vincoli o può avere vincoli. Nel caso di problema con vincoli, abbiamo visto che:

LAGRANGIANO: $L(\bar{x},\bar{u}) = f(\bar{x}) + \bar{u}\cdot g(\bar{x})$ con $\bar{u}$ = vettore dei moltiplicatori di Lagrange, $\bar{x}$ = vettore delle x.

Quindi un vettore $(\bar{x},\bar{u})$ soddisfa le CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ GLOBALE quando:

- $L(\bar{x},\bar{u}) = \min_{\bar{x}\in X}\{f(\bar{x}) + \bar{u}g(\bar{x})\}$
- $\bar{u}g(\bar{x}) = 0$
- $g(\bar{x}) \leq 0$

e queste sono condizioni sufficienti ma non necessarie.

Indichiamo con: $d = \overset{\max}{\sup}\{L(\bar{u}) : \bar{u} \geq 0\}$ il problema duale. Sia v una soluzione del problema primale, se:

$\underline{d < v}$ ⇒ si ha un GAP DI DUALITÀ.

Chiaramente se $(\bar{x},\bar{u})$ soddisfa le condizioni di ottimalità globali, allora $\bar{u}$ è un ottimo per il problema duale, e per il primale. Quindi: $\underline{d = v}$. Si ricordi inoltre che L è una funzione Lagrangiana finita e concava. Per esempio:

$$v = \{\min\ 4X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 : 3X_1 + X_2 \geq 6,\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0\}$$

Scriviamo la Lagrangiana del problema: $L(u) = 6u + \min_{\bar{x}\geq \bar{0}}\{4X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 3uX_1 - uX_2\}$

⇓

$L(u) = 4X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + u(6 - 3X_1 - X_2) =$
$= 4X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + 6u - 3X_1u - X_2u$

$$\nabla_x L = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$\underline{\nabla_x L(\bar{x},u) = 0}$

⇓

$$\begin{cases} 8X_1 + 2X_2 = 3u \\ 2X_1 + 2X_2 = u \end{cases}$$

Da cui $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u/12 \\ 2u/12 \end{bmatrix}$

NB: $\nabla_x L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial X_1} & \frac{\partial L}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial L}{\partial X_2} \end{bmatrix}$

Infatti: $2X_1 = u - 2X_2 \Rightarrow X_1 = \frac{u - 2X_2}{2} \Rightarrow 8\left(\frac{u - 2X_2}{2}\right) + 2X_2 = 3u$

⇓

$\frac{8u - 16X_2}{2} + 2X_2 = 3u \Rightarrow 8u - 16X_2 + 4X_2 = 6u$

⇓

$2u = 12X_2$

Quindi: $\underline{X_2 = u/6}$ e analogamente:

$2X_1 = u - \frac{u}{3} \Rightarrow 2X_1 = \frac{3u - u}{3}$

⇓

$\underline{X_1 = u/3}$.

Concludendo:

$\underline{L(u) = 6u - \frac{7u^2}{12}}$ e $\frac{dL}{du} = 6 - \frac{14}{12}u = 0 \Rightarrow \bar{u} = 36/7$ → soluzione ottima del problema duale.

(32)

Siccome $X_1 = 12/7$, $X_2 = 6/7$ $\Rightarrow$ SOLUZIONI PRIMALI, esse soddisfano le condizioni di ottimalità globali.

Per quanto riguarda le KKT si ha che condizione necessaria perché $\bar{x}$ minimizzi $f(\bar{x}) + \bar{u}g(\bar{x})$ è che fissato $\bar{u}$ si ha:

$$\underline{\nabla_x L = \nabla f(\bar{x}) + \bar{u}\,\nabla g(\bar{x}) = \underline{0}}$$

e rimpiazzando questa condizione nella prima delle ottimalità globali si ottengono le condizioni di KKT.

Quindi:

- $\nabla f(\bar{x}) + \bar{u}\nabla g(\bar{x}) = 0$
- $\bar{u}g(\bar{x}) = 0$
- $g(\bar{x}) \le 0$

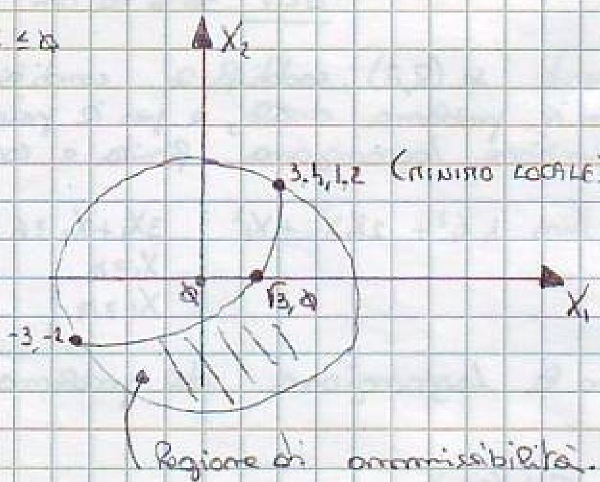
In particolare per una funzione f e vincoli g convessi, allora $(\bar{x}, \bar{u})$ soddisfano le KKT, e $\bar{x}$ è ottimo. Chiaramente per una funzione non convessa le cose si complicano. Per esempio:

$$\left\{ \min f(x_1, x_2) = x_1 \;:\; \begin{array}{l} g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 - 16 \le 0 \\ g_2(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 13 \le 0 \end{array} \right.$$

$$L = x_1 + u_1\left[(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 - 16\right] + u_2\left[-x_1^2 - x_2^2 - 13\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2u_1(x_1 - 1) - 2u_2 x_1 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2u_1(x_2 + 2) - 2u_2 x_2 = 0 \end{cases}$$



Ip: $u_1 = u_2 = 0 \Rightarrow$ NO perché $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 \neq 0$.

$u_1 \ge 0,\ u_2 = 0 \Rightarrow$ $1 + 2u_1(x_1 - 1) = 0$

$2u_1(x_2 + 2) = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 = 16$ $\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x_1 = 5} \\ x_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 1/8$ (minimo locale).

Quando si calcolano le soluzioni (punti ammissibili) si deve calcolare la Jacobiana dei vincoli attivi in quei punti. Se le colonne della Jacobiana sono linearmente indipendenti, allora il punto è regolare. Se il punto è regolare, la soluzione è ammissibile.

Vediamo ora la PROGRAMMAZIONE QUADRATICA. Quando la funzione $f(x)$ è quadratica e i vincoli sono lineari si è in presenza di un problema di programmazione quadratica (PQ). Consideriamo per ora solo vincoli di uguaglianza. Si ottiene:

$$\min\left\{ d^T x + \tfrac{1}{2} x^T G x : Ax = b \right\} \rightarrow \text{PROBLEMA CONVESSO.}$$

Si ha: $g = d + Gx$ e $\nabla^2 f = G$. Per una soluzione x^* del problema deve esistere un vettore λ^* tale che:

$$\underline{d + Gx^* = A^T\lambda^*}$$

Però in generale i problemi di PQ sono scritti nella forma:

$$\min\left\{ d^T x + \tfrac{1}{2} x^T G x : a_i^T x = b_i,\ i \in U_i;\ a_i^T x \ge b_i,\ i \in D \right\}$$

Assumiamo per semplicità che G sia definita positiva. Il metodo che ora viene illustrato fa parte di quei metodi che cercano di individuare per passi successivi l'insieme di vincoli attivi nel punto x^*. Supponiamo che $a_i^T x^k > b_i$ e $i \in D - \hat{D}$. Con $\hat{D}$ indichiamo l'insieme dei vincoli attivi di disuguaglianza nel punto x^k. Supponiamo inoltre che x^k non sia degenere. Supponiamo di spostare l'origine degli assi in x^k. Quindi:

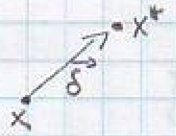
$$\circledast \quad \min\left\{ \delta^T d^k + \frac{1}{2}\delta^T G \delta : a_i^T \delta = 0 \,,\; i \in U \cup \hat{D} \right\}$$

dove $d^k = d + Gx^k$. Un tale problema è nella forma $\min\{d^T x + \frac{1}{2}x^T G x : Ax = b\}$ e quindi può essere risolto nel seguente modo; In generale un programma di massimizzazione quadratico ha la forma:

$$\max\{ z = x^T C x + D^T x : Ax = b,\; x \geq 0 \} \qquad \text{dove } \underline{C \equiv G}.$$

C è una matrice simmetrica e semidefinita negativamente. Questo fa sì che z sia una funzione concava. Tornando al problema di minimo però si osserva che essendo un problema convesso, x^* è anche un ottimo globale. Dato un punto x, e sia δ un vettore tale che:

$$x + \delta = x^*$$



deve essere soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} d + G(x+\delta) = A^T\lambda \\ A(x+\delta) = b \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} -G\delta + A^T\lambda &= d + Gx = g \\ -A\delta &= Ax - b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad K\begin{pmatrix} -\delta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ Ax - b \end{pmatrix} \quad \text{dove: } K = \begin{pmatrix} G & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

Se la matrice A ha rango pieno, si ha:

$$\delta = Y_y + Z_z = (Y\; Z)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad , \; Y \text{ e } Z \text{ componenti ortogonali.}$$

Y è una base per lo spazio coperto da A, e Z è una base per lo spazio nullo. Quindi:

$$A\delta = A(Y_y + Z_z) = AY_y = b - Ax \qquad \text{e } AY \text{ non deve essere singolare.}$$

Se nel problema $\circledast$ δ^k risulta essere ammissibile, anche per gli indici $\in D - \hat{D}$, si pone:

$$\underline{x^{k+1} = x^k + \delta^k}$$

altrimenti si effettua una ricerca monodimensionale in direzione di $\delta^{(k)}$. In generale si ha:

$$\alpha_k = \min\left(1,\; \min_{\substack{i \in D - \hat{D} \\ a_i^T \delta^k < 0}} \frac{b_i - a_i^T x^k}{a_i^T \delta^k} \right) \qquad \text{ponendo } \underline{x^{k+1} = x^k + \delta^k \alpha_k}$$

Se $\alpha_k < 1$, un vincolo precedentemente inattivo è diventato attivo, e il suo indice viene aggiunto a $\hat{D}$. L'algoritmo funziona così:

1) dati x^1 e $\hat{D}(x^1)$ e $k = 1$

2) se $\delta = 0$ non è soluzione di (*), e vai al passo 4.

3) Calcolare λ^k e $\lambda_p^k = \min_{i \in \hat{D}} \lambda_i^k$. Se $\lambda_p^k \geq 0$ allora $x^k = x^*$ altrimenti $\hat{D} = \hat{D} - \{p\}$

4) Risolvere (*) con $\hat{D} \cup D$ trovando δ^k.

5) Calcolare α_k risolvendo $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \delta^k$

6) Se $\alpha^k < 1$ allora $\hat{D} = \hat{D} \cup \{p\}$

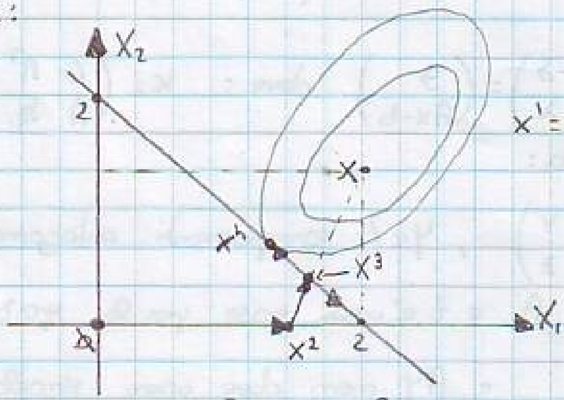
7) $k = k+1$ e torna al passo 2.

Questo è l'algoritmo generale per la risoluzione di problemi quadratici.

Vediamo un esempio:

$$\min \left\{ x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Graficamente si ha:



$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^3 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $x^4 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ OTTIMO.

Si noti che $d^T = (-3, 0)$ e $G = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e poi: $a_1^T = [1 \ 0]$

$a_2^T = [0, 1]$

$a_3^T = [-1, -1]$

$b^T = [0, 0, -2]$

Poniamo $x^1 = 0$ e $\hat{D} = \{1, 2\}$. $\delta = 0$, e calcoliamo i moltiplicatori di Lagrange, trovando $\lambda_1 = -3$, e il primo vincolo va tolto dall'insieme dei vincoli attivi. Risolvo (*) con $\hat{D} = \{2\}$ e ottengo:

$x_1 = 3/2$, $x_2 = 0$. $\Rightarrow \hat{D} = \emptyset$. $\rightarrow$ viene fornito un ottimo x non ammissibile. $(x_1 = 2, x_2 = 1)$

Si cerca quindi nella direzione $\delta = x - x^2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e risolvendo $\alpha_k = (\ldots)$ si ottiene $\alpha_k = 1/3$ e $x^3 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Il terzo vincolo diventa attivo e quindi $\hat{D} = \{3\}$. A questo punto x^3 non risolve il problema dato. Risolvendo tale problema si ha:

$x^4 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e siccome tutti i moltiplicatori sono positivi, il punto è ottimo e l'algoritmo termina.

TEMI D'ESAME:

1) Risolvere con il metodo del simplesso: $\left\{ \min z = x_1 - 2x_2 : \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$

1) TABLEAU:

		x_1	x_2	x_3
$-z$	0	1	-2	0
b_1	1	2	0	3
b_2	5	3	2	-1

NB: $\{ \min c^T x = z : Ax = b,\ x_i \geq 0 \}$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ → matrice dei coefficienti

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ → vettore delle incognite, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ → vettore dei termini noti

Non esiste una base iniziale ammissibile.
Quindi:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	1	-2	0	1	1
b_1	1	2	0	3	1	0
b_2	5	3	2	-1	0	1

x_4, x_5 → var. artificiali; $\underbrace{x_4\ x_5}_{I}$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ → sol. di base iniziale ammissibile.

Inoltre: $c^T = [c_1, c_2]^T = [1, -2]^T$

$z = [1, -2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 - 2x_2$ → funzione obiettivo.

Poniamola in forma standard:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	-5	0	0	0	1	1
x_4	1	2	0	3	1	0
x_5	5	3	2	-1	0	1

⇒

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	-6	-5	-2	-2	0	0
x_4	1	2	0	3	1	0
x_5	5	3	2	-1	0	1

Scegliamo il PIVOT sul costo ridotto negativo più basso, cioè -5:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	$-7/2$	0	-2	$11/2$	$5/2$	0
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$	$1/2$	0
x_5	$7/2$	0	2	$-11/2$	$-3/2$	1

A questo punto:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	0	0	0	$3/2$	1
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$	$1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$-11/4$	$-3/4$	$1/2$

→ li eliminiamo perché $w = 0$

⇓

		x_1	x_2	x_3
$-w$	0	0	0	0
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$
x_2	$7/4$	0	1	$-11/4$

Torniamo però ora al problema originario:
Quindi:

		x_1	x_2	x_3
$-z$	0	1	-2	0
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$
x_2	$7/4$	0	1	$-11/4$

⇒ che posto in forma canonica dà:

		x_1	x_2	x_3
$-z + 7/2$		1	0	$-11/2$
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$
x_2	$7/4$	0	1	$-11/4$

$\underbrace{x_1\ x_2}_{I}$

Ancora:

		x_1	x_2	x_3
$-z$	3	0	0	-7
x_1	$1/2$	1	0	$3/2$
x_2	$7/4$	0	1	$-11/4$

NB: Do priorità ai costi c_B.

Perciò:

		x_1	x_2	x_3
$-z$	$16/3$	$14/3$	0	0
x_3	$1/3$	$2/3$	0	1
x_2	$8/3$	$11/6$	1	0

→ questo è il tableau ottimo. Graficamente si ha un piano tridimensionale (SPAZIO).