$$\min_{q \geq 0} \left(f(x_q^{(3)})\right) = \frac{1}{2}q^2 + \frac{9}{4} - \frac{3}{4}q + \frac{1}{2}q - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{4}q - \frac{9}{4} \Rightarrow q^{(2)} = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^{(3)} = (-1/8, 3/2) \\ z^{(3)} = -73/32 \end{cases}$$

Il procedimento prosegue finchè $\nabla f_x \neq 0$.

Esempio:

$$\{\max z = X_1(X_2 - 1) + X_3(X_3^2 - 3)\}$$

Quindi: $f(x_1, x_2, x_3) = X_1(X_2 - 1) + X_3(X_3^2 - 3) \Rightarrow \nabla f = [X_2 - 1, X_1, 3X_3^2 - 3]^T$

Si nota che $\nabla f = 0$ solo per:

$$\bar{X}_1 = [0, 1, 1]^T \qquad f(\bar{X}_1) = -2 \Rightarrow \text{punti di sella}$$
$$\bar{X}_2 = [0, 1, -1]^T \qquad f(\bar{X}_2) = 2$$

Non ci sono massimi globali. Si nota che un problema del tipo: $\{\min_{x \in X_1} f(x)\}$ con $X_1 = \{x : g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ è un problema di programmazione convessa quando tutte le g_i sono concave. In un problema di questo tipo l'ottimo locale è uguale all'ottimo globale. Vediamo ora graficamente come funziona il metodo del gradiente.

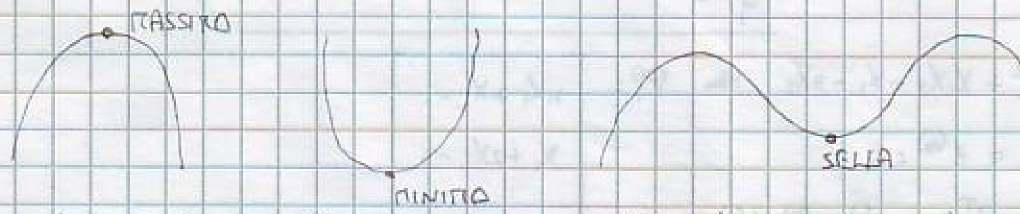
Sia:

$g(x) = \nabla f(x)$ e sia x^* un ottimo locale (MINIMO LOCALE). Allora: $g^T x^* = 0 \Rightarrow g = 0$

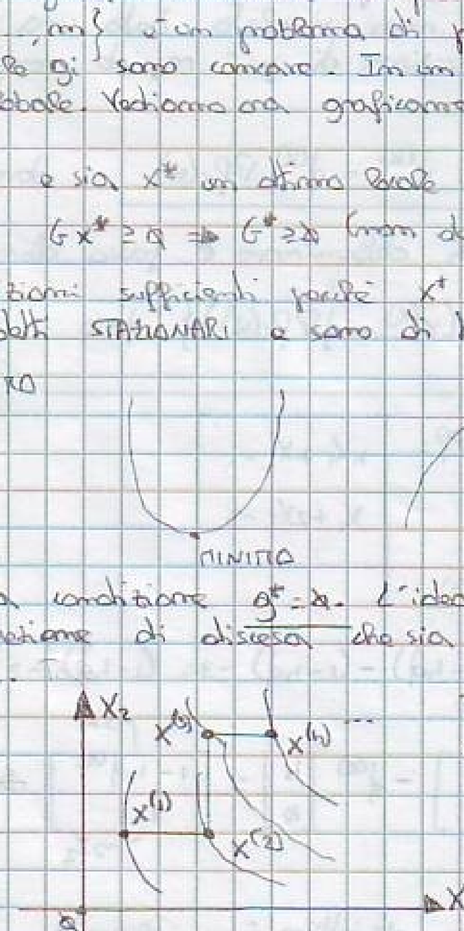
$G(x) = \nabla^2 f(x) \qquad G x^* \geq 0 \Rightarrow G^* \geq 0$ (non definita negativamente).

Queste sono le condizioni sufficienti perché x^* sia un ottimo locale isolato.

Tali punti vengono detti STAZIONARI e sono di tre tipi:

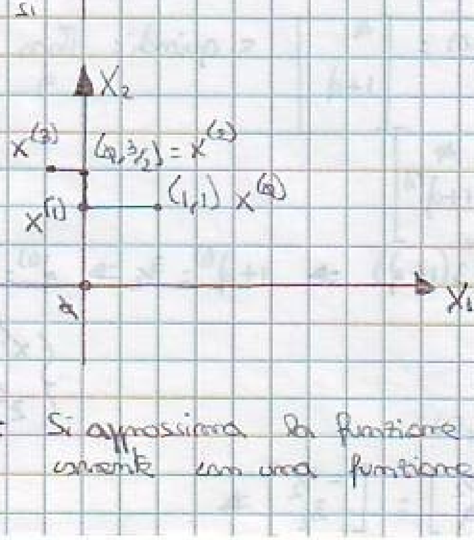


Per questi punti vale la condizione $g^* = 0$. L'idea del metodo del gradiente è quella di scegliere una direzione di discesa che sia massima, ovvero $s = -g$ con s che è la direzione di discesa.



Tale metodo converge però troppo lentamente a causa del suo andamento a zig-zag.

Per l'esempio visto si ha:



2) METODO DI NEWTON: Si approssima la funzione obiettivo nell'intorno della soluzione corrente con una funzione quadratica del tipo:

$$x^{(K+1)} = x^{(K)} - (\nabla^2 f_{x^{(K)}})^{-1} \nabla f_{x^{(K)}}$$

Tale metodo è più rapido di quello del gradiente, ma non sempre converge.
Esempio:

$$f = 2X_1^2 + X_2^2 + X_1X_2 - X_1 - 3X_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 4X_1 + X_2 - 1 \\ X_1 + 2X_2 - 3 \end{bmatrix}$$

Il suo Hessiano è: $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\nabla^2 f)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - (\nabla^2 f_{x^{(0)}})^{-1} \nabla f_{x^{(0)}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 \\ 11/7 \end{bmatrix}$$ ma $\nabla f_{x^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (X_1 = -1/7,\ X_2 = 11/7)$ è ottimo locale.

Si noti però che $\nabla^2 f_{x^{(1)}} \geq 0$ e quindi la funzione è convessa e l'ottimo globale è anche locale.

3) METODO DI FLETCHER-REEVES: È un metodo di gradiente coniugato. In breve si considera una direzione che combina quella opposta al gradiente con la direzione seguita al passo precedente.

$$x^{(K+1)} = x^{(K)} + \alpha^{(K)} d^{(K)} \quad \text{con} \quad d^{(K)} = \nabla f^{(K)} + \beta^{(K)} d^{(K-1)}$$

$$\text{con } d^{(0)} = \nabla f^{(0)} \quad \text{e} \quad \beta^{(K)} = \frac{(\nabla f^{(K)})^T \nabla f^{(K)}}{(\nabla f^{(K-1)})^T \nabla f^{(K-1)}}$$

Questo metodo garantisce una convergenza globale più rapida. Esempio:

$$f = 2X_1^2 + X_2^2 + X_1X_2 - X_1 - 3X_2 \Rightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} 4X_1 + X_2 - 1 \\ X_1 + 2X_2 - 3 \end{bmatrix}$$

NB: $x^{(0)} = (1,1)$.

1° PASSO: $x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f_{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha^{(0)}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4\alpha^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$\min_{\alpha} f(x_\alpha^{(0)}) = (1-4\alpha)^2 + 1 + (1-4\alpha) - (1-4\alpha) - 3 = (1-4\alpha)^2 - 2, \quad \alpha \geq 0$$

Perciò: $\alpha^{(0)} = 1/4$ e $x^{(1)} = (0,1)$ con $z^{(1)} = -2$.

2° PASSO: $d^{(1)} = \nabla f^{(1)} + \beta^{(1)} d^{(0)} = \nabla f^{(1)} + \beta^{(1)} \nabla f^{(0)} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta^{(1)}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \beta^{(1)} = \frac{(\nabla f^{(1)})^T \nabla f^{(1)}}{(\nabla f^{(0)})^T \nabla f^{(0)}} = \frac{[0\ 1]\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}{[4\ 0]\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}} = 1/16$$

Perciò:

$$d^{(1)} = \nabla f^{(1)} + \beta^{(1)} d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha d^{(1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} 1/4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/4 \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Sottoproblema:

$$\min_{\alpha} (f_{x_\alpha^{(2)}}) = 2\alpha^2/16 + (1+\alpha)^2 - \alpha/4(1+\alpha) + \alpha/4 - 3(1+\alpha), \quad \alpha \geq 0$$

Quindi: $d = 1/7$ e $x^{(2)} = (1/7, 11/7)$ e il metodo si blocca perché dopo il gradiente è nullo.

3) METODO DI DAVIDON – FLETCHER – POWELL: È un metodo a metrica variabile nel senso che in pratica la direzione di aggiornamento della soluzione corrente non è solo opposta al gradiente ma viene filtrata attraverso una matrice $H^{(k)}$. Quindi:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)} H^{(k)} \nabla f^{(k)}$$

dove:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \frac{\delta^{(k)} \delta^{(k)T}}{\delta^{(k)T} \gamma^{(k)}} - \frac{H \gamma^{(k)} \gamma^{(k)T} H}{\gamma^{(k)T} H \gamma^{(k)}}$$

con $H^{(0)} = I \rightarrow$ matrice identità.

$\delta^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$

$\gamma^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) - \nabla f(x^{(k-1)})$

Per esempio:

$$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 3x_2 \quad \text{e} \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

1° PASSO: $x^{(0)} = (1,1)$ e $z^{(0)} = 0$

$\nabla f_{x^{(0)}} = [4 \;\; 0]^T \Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)} \nabla f_{x^{(0)}} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 4d^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \min_d (f x_d^{(1)}) = (1-4d)^2 + 1 + (1-4d) - (1-4d) - 3 = (1-4d)^2 - 2.$$
$d \geq 0$

Perciò $d^{(0)} = 1/4$ e $x^{(1)} = (0,1)$.

2° PASSO: $\delta^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\gamma^{(1)} = \nabla f(x^{(1)}) - \nabla f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^{(1)} = H^{(0)} + \frac{\delta^{(1)} \delta^{(1)T}}{\delta^{(1)T} \gamma} - \frac{H \gamma^{(1)} \gamma^{(1)T} H}{\gamma^{(1)T} H \gamma^{(1)}}$

$$= I + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \;\; 0]}{[-1 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}} - \frac{I \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} [-4 \;\; -1] I}{[-4 \;\; -1] I \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16/17 & 4/17 \\ 4/17 & 1/17 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 + 1/17 & 4/17 \\ 4/17 & 16/17 \end{bmatrix}$$

$$d^{(1)} = H^{(1)} \nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1/4 + 1/17 & 4/17 \\ 4/17 & 16/17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{bmatrix}$$

e perciò:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + d\, d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d/17 \\ 1 + 16d/17 \end{bmatrix}$$

e $\min_d (f(x_d^{(2)})) = 216 d^2/289 + (1 + 16d/17)^2 - 4d/17 (1 + \frac{16d}{17}) + 4d/17 - 3(1 + 16d/17)$
$d \geq 0$

Quindi: $d = 17/28$ e $x^{(2)} = (1/7, 11/7)$.

Analizziamo ora programmi non lineari con vincoli. Consideriamo:

$$\left\{ \max z = f(x_1, \dots, x_n) : \; g_1(x_1 \dots x_n) \leq 0 \;\; \vdots \;\; g_m(x_1 \dots x_n) \leq 0 \right\}$$

Per risolvere un tale problema si scrive prima la FUNZIONE DI LAGRANGE:

$$L(x_1 \dots x_m, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\bar{x}) \qquad \text{con } \bar{x} = [x_1 \dots x_m]$$

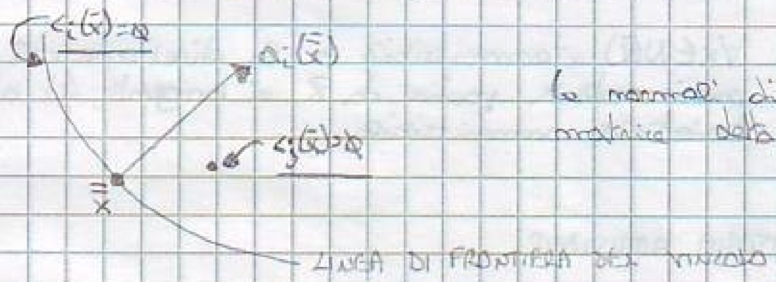
ed m = numero di vincoli.

λ_i sono delle costanti dette MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE, e quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 & (j = 1 \dots m) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 & (i = 1 \dots m) \end{cases}$$

Per essere più precisi consideriamo: $\left\{ \min f(\bar{x}) : \begin{array}{ll} c_i(\bar{x}) = 0 & i \in U \\ c_i(\bar{x}) \geq 0 & i \in D, \ \bar{x} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}$

Indichiamo con a_i il gradiente ∇c_i del i-esimo vincolo. Graficamente:



Le normali di tutti i vincoli sono raccolti in una matrice detta JACOBIANO.

Si noti che i vincoli possono essere lineari o meno. Un punto $\hat{x}$ è AMMISSIBILE rispetto ad un vincolo $c_i(\hat{x})$ se:

$$c_i(\hat{x}) = 0 \qquad o \qquad c(\hat{x}) \geq 0$$

Se $c_i(\hat{x}) = 0$ tale vincolo viene detto attivo, altrimenti viene detto INATTIVO. Se $c_i(\hat{x}) < 0$, allora $\hat{x}$ è un PUNTO INAMMISSIBILE, e $c_i(x) \geq 0$ viene violato in $\hat{x}$. Ipotizziamo per ora che i vincoli siano solo di uguaglianza. Quindi:

$$\{ \min f(x) : c(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^m \} \quad (a)$$

x^* è un ottimo locale del problema sopra scritto se x^* è ammissibile rispetto a tutti i vincoli, ed esiste un intorno $N(x^*)$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in N(x^*)$. Se:

- $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in N(x^*) \Rightarrow x^*$ è ottimo locale FORTE.
- $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in N(x^*) \Rightarrow x^*$ è un ottimo locale DEBOLE.

Nei vincoli $c_i(x) = 0$ l'ammissibilità può essere mantenuta solo muovendosi sulla TRAIETTORIA AMMISSIBILE. Se una soluzione del problema (a) esiste, essa è contenuta tra le soluzioni del sistema relativo alla lagrangiana purché $f(x)$ e $c(x)$ abbiano derivate prime parziali continue e:

$$J = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right] = \left[\frac{\partial c_i}{\partial x_i} \right] = \text{JACOBIANO} \quad \text{abbia rango } m \text{ per } x = x^*.$$

Per esempio: $\max \{ z = 2x_1 + x_1 x_2 + 3x_2 : x_1^2 + x_2 = 3 \} \Rightarrow$ non esiste alcun massimo globale.

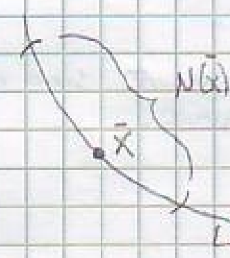
Per esempio:

$$\left\{ \min f(x) = x_2 : \begin{array}{l} g_1(x) = (x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2) \leq 0 \\ g_2(x) = (x_1 - 1)^3 - (x_2 - 2) \leq 0 \\ g_3(x) = x_1 \leq 0 \end{array} \right\}$$

Si ricordi che un vincolo attivo è un vincolo del tipo: $c_i(\bar{x}) = 0$. Un punto REGOLARE è un punto nel quale il o i gradienti dei vincoli attivi sono tra loro linearmente indipendenti. Consideriamo i gradienti dei tre vincoli:

$$\nabla g_1(x) = [3(x_1-1)^2, 1]^T$$
$$\nabla g_2(x) = [3(x_1-1)^2, -1]^T$$
$$\nabla g_3(x) = [-1, 0]^T$$

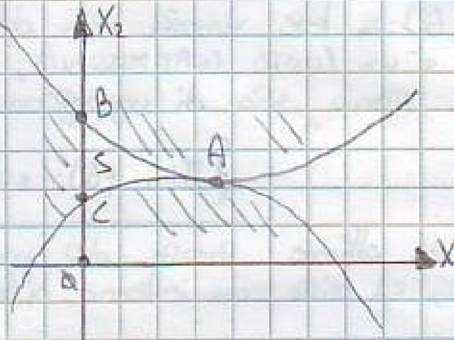
Poniamo $c_i(x) = a_i^T x - b_i \Rightarrow A = [a_{ij}^T] = A(x)$. Abbiamo detto che nel caso di vincoli non lineari del tipo $c_i(x) = 0$, cioè: $a_i^T x - b_i = 0$ l'ammissibilità può essere mantenuta solo sulla TRAIETTORIA AMMISSIBILE. Si dimostra però che:



$\forall x \in N(\bar{x})$ è ammissibile se la direzione del movimento a partire da $\bar{x}$ è tangente (s) alla traiettoria ammissibile.

s è tangente a tale traiettoria solo se $A(x)s = 0$. In questo contesto i vincoli $c_i(x) = 0$ soddisfano la RICHIESTA DI QUALIFICAZIONE.
Quindi se x è ammissibile, e $A(x)$ ha rango pieno, x viene detto PUNTO REGOLARE.
Questo ci porta a:

$$\begin{cases} g_1(A) = 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 = -(x_2-2) \\ g_2(A) = 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 = (x_2-2) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$A = (1,2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



I punti ammissibili sono chiaramente i punti A, B, C. Ci chiediamo se sono regolari.
Analogamente:

$$\begin{cases} g_1(B) = 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 = -(x_2-2) \\ g_3(B) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$B = (0,3)$$

NB: Se si considera un solo vincolo, $A(x)$ deve essere tale che:

$$\det A(x) \neq 0$$

ovvero il gradiente deve essere non nullo.

$$\begin{cases} g_2(C) = 0 \Rightarrow -(x_1-1)^3 = (x_2-2) \\ g_3(C) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0,1)$$

Quindi:

$$A: \begin{array}{l} \nabla g_1(A) = [0,1]^T \\ \nabla g_2(A) = [0,-1]^T \end{array} \Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A \text{ non è regolare.}$$

$$B: \nabla g_1(B) = [3,1]^T, \nabla g_3(B) = [-1,0]^T \Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$$
$$\Downarrow$$

Quindi B è regolare. Infine: C: $\nabla g_2(x) = [3, -1]^T$ $\Rightarrow$ $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \det A = -1 \neq 0$

$\nabla g_3(x) = [-1, 0]^T$

$\Downarrow$

C è regolare.

Giunti a questo punto è necessario introdurre le condizioni di KARUSH - KUHN - TUCKER (KKT). Se vale la richiesta di qualificazione dei vincoli nel punto x^*, una condizione necessaria perché x^* sia un ottimo locale per il problema:

$\{\min f(x) : c(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ è che $g(x^*) = A(x^*)^T \lambda^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_i(x^*)$

In breve le KKT impongono che:

- $\partial L / \partial x_i = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = h_j = 0$
- $\mu_i g_i(x) = 0$ con $g_i(x)$ = vincoli di disuguaglianza
- $g_i(x) \leq 0$
- $\mu_i \geq 0$

LAGRANGIANA DEL PROBLEMA.

Per l'esempio si ha: $L(x) = f(x) + \mu g(x) = x_2 + \mu_1(x_1-1)^3 + \mu_1(x_2-2) + \mu_3(x_1-1)^3 - \mu_2(x_2-2) - \mu_3 x_1$

Quindi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3\mu_1(x_1-1)^2 + 3\mu_2(x_1-1)^2 - \mu_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 g_1 = \mu_1 [(x_1-1)^3 + (x_2-2)] = 0$$

$$\mu_2 g_2 = \mu_2 [(x_1-1)^3 - (x_2-2)] = 0$$

$$\mu_3 g_3 = \mu_3 x_1 = 0$$

$$g_1 \leq 0 = (x_1-1)^3 + (x_2-2) \leq 0$$

$$g_2 \leq 0 = (x_1-1)^3 + (x_2-2) \leq 0$$

$$g_3 \leq 0 = x_1 \leq 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$

Per risolvere un tale sistema, bisogna impostare un albero delle decisioni. Ci basiamo su $\mu_k g_k = 0$, e possiamo avere:

1) $\mu_k = 0$, $g_k < 0$
2) $\mu_k = 0$, $g_k = 0$ $\Rightarrow$ 1) $\mu_k = 0$, $g_k \leq 0$ $\Rightarrow$ Spezza il problema originario P_0 in P_1 e P_2.
3) $\mu_k > 0$, $g_k = 0$ $\quad$ 2) $\mu_k > 0$, $g_k = 0$ $\quad$ Quindi:

P_1: $(\mu_3 = 0$ e $g_3 \leq 0)$

P_2: $(\mu_3 > 0$, $g_3 = 0)$

$P_1(\mu_3 = 0, g_3 \leq 0)$ abbiamo: $3\mu_1(x_1-1)^2 + 3\mu_2(x_1-1)^2 = 0$

$1 + \mu_1 - \mu_2 = 0$

$\mu_1[(x_1-1)^3 + (x_2-2)] = 0$

$\mu_2[(x_1-1)^3 - (x_2-2)] = 0$

$(x_1-1)^3 + (x_2-2) \leq 0$

$(x_1-1)^3 - (x_2-2) \leq 0$

$x_1 \leq 0$ $\quad$ e $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

Ma: $3\mu_1(x_1-1)^2 + 3\mu_2(x_1-1)^2 = 0$ diventa:

$3(\mu_1 + \mu_2)(x_1-1)^2 = 0$

Siccome $(\mu_1+\mu_2)\ge 0$ si ha che $(x_1-1)^2 \ge 0$ e quindi $3(\mu_1+\mu_2)(x_1-1)^2=0$ quando $(\mu_1+\mu_2)=0$ o $(x_1-1)^2=0$

Quindi:

$P_3: \mu_1+\mu_2=0 \ , \ (x_1-1)^2\ge 0$

$P_4: \mu_1+\mu_2\ge 0 \ , \ (x_1-1)^2=0$

Ma dato che μ_1 e $\mu_2\ge 0$ si ha che P_3 si semplifica visto che $\mu_1+\mu_2=0$ solo se $\mu_1=\mu_2=0$

Quindi:

$P_3: (\mu_1+\mu_2=0$ cioè $\mu_1=0$ e $\mu_2=0)$.

$$\begin{cases} 1=0 \\ x_1\ge 0\end{cases} \Rightarrow$$ il sottoproblema non ha soluzioni ammissibili.

$$P_4: (\mu_1+\mu_2\ge 0 \ , \ x_1=1) \Rightarrow \begin{cases} 1+\mu_1-\mu_2=0 \\ \mu_1(x_2-2)=0 \\ \mu_2(x_2-2)=0 \\ (x_2-2)\le 0 \\ (x_2-2)\le 0 \\ x_1\ge 0 \\ \mu_1\ge 0 \\ \mu_2\ge 0 \end{cases}$$

per cui: $\mu_2=\mu_1+1\ge 1\ge 0$

$\Downarrow$

$\mu_2(x_2-2)=0 \Rightarrow x_2=2$

Quindi il punto A soddisfa le KKT. Siccome tale punto non è regolare va escluso perché candidato dalla partenza.

$$P_2: (\mu_3\ge 0, \ g_3=0 \text{ cioè } x_1=0) \Rightarrow \begin{cases} 3\mu_1+3\mu_2-\mu_3=0 \\ 1+\mu_1-\mu_2=0 \\ \mu_1[1+(x_2-2)]=0 \\ \mu_2[1-(x_2-2)]=0 \\ 1+(x_2-2)\le 0 \\ 1+(x_2-2)\le 0 \\ \mu_1,\mu_2,\mu_3\ge 0 \end{cases}$$

Ma: $\mu_2=1+\mu_1\ge 1>0$ e $\mu_2(1-x_2)=0$

$\Downarrow$

$x_2=1$

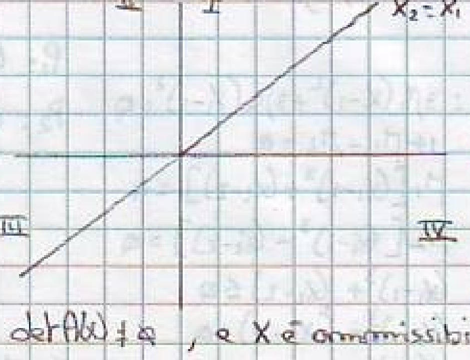
da cui: $\mu_1[1+(x_2-1)]= 2\mu_1=0$ e $\mu_1=0$

Questo implica che $\mu_2=1$ e $\mu_3=3$. La soluzione $B(0,1)$ soddisfa le KKT. Quindi è un punto candidato. Consideriamo ora il seguente problema:

$$\left\{ \min z=(x_1+1)^2+(x_2+1/2)^2 : \begin{array}{ll} x_1^2-x_2^2\le 0 & (g_1(x)) \\ x_1-x_2\le 0 & (g_2(x)) \end{array} \right\}$$

Determinare i punti non regolari, e i punti che soddisfano le KKT. Innanzitutto:

$$\nabla g_1=\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla g_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Si noti che $c_i(x)=a_i^T x-b_i$
e quindi:

$A=[a_{ij}] \Rightarrow A(x)s=0 \Rightarrow \det A(x)\ne 0$, e x è ammissibile, allora il punto x è regolare.