

Ambedue gli ALGORITMI DI TAGLIO operano in modo analogo al BRANCH & BOUND con l'unica differenza che in ciascuna fase si aggiunge un unico nuovo vincolo. Analogamente in merito L'ALGORITMO DI GOMORY.

- 1) Nel tableau finale si sceglie una qualsiasi delle variabili non intere e si considera l'equazione di vincolo rappresentata dalla riga della variabile stessa.

Per esempio:

$25\frac{1}{2}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
	4	0	0	1	$3\frac{1}{4}$
X_3 $1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
X_2 1	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{4}$

Soluzione ottimale $X_3^* = \frac{1}{2}$
 $X_2^* = 1$
 $X_1^*, X_4^*, X_5^* = 0$

Il nuovo vincolo è:

$$-\frac{1}{2}X_1 + X_3 - \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{2}X_5 = \frac{1}{2}$$

- 2) Si riscrivono ogni coefficienti e costanti frazionarie presenti nelle equazioni, come la somma di un intero e di una frazione. Quindi:

$$(-1 + \frac{1}{2})X_1 + X_3 - (3 - \frac{2}{3})X_4 + (1 - \frac{1}{2})X_5 = 5 + \frac{1}{2}$$

Porto tutto a sinistra i termini con frazioni, e a destra i termini interi. Perciò:

$$-X_1 + \frac{1}{2}X_1 + X_3 - 3X_4 + \frac{2}{3}X_4 + X_5 - \frac{1}{2}X_5 = 5 + \frac{1}{2} \Rightarrow -X_1 - 5 + X_3 - 3X_4 + X_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X_1 - \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{2}X_5$$

Si noti però che il vincolo viene posto come una sommatoria. Quindi:

$$-X_1 + \frac{1}{2}X_1 + X_3 + (-3 + \frac{2}{3})X_4 + (1 + \frac{1}{2})X_5 = 5 + \frac{1}{2} \Rightarrow \dots$$

$\hookrightarrow$ semplifica tutto.

- 3) La parte di sinistra non deve essere negativa. Nell'esempio: $\frac{1}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{2}X_5 - \frac{1}{2}$

Quindi il nuovo vincolo è: $\frac{1}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{2}X_5 \geq \frac{1}{2}$

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 2X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 17 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ intere} \end{cases}$$

Trascuriamo il vincolo di interezza sulle variabili e otteniamo:

TABELEAU

	X_1	X_2	X_3	X_4
-2	0	-2	-1	0
X_2 17	2	5	1	0
X_1 10	③	②	0	1

$\underbrace{\hspace{10em}}_I$

NB: Nel simplesso si sceglie sempre il numero più negativo.

FORMA STANDARD:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 2X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 5X_2 + X_3 = 17 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 = 10 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

Quindi:

-2	$20\frac{1}{3}$	X_1	X_2	X_3	X_4
	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
X_3 $3\frac{1}{3}$	0	$1\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	
X_4 $10\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

TABELEAU OTTIMO

NB: $\begin{cases} \text{Min } z = -2X_1 - X_2 \\ 2X_1 + 5X_2 + X_3 = 17 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 = 10 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$

16)

La soluzione ottima z^* : $\begin{cases} X_1^* = 14/3 \\ X_2^* = 21/3 \end{cases}$ e $z^* = \frac{20}{3}$. Scegli arbitrariamente X_1^* e quindi:

Quindi: $X_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow X_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 - \frac{1}{3} = 3 - X_1$

NB: la parte tra parentesi nel vincolo deve essere esclusivamente una somma. Quindi:

NUOVO VINCOLO: $\frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 - \frac{1}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \geq \frac{1}{3}$ oppure: $2X_2 + X_3 \geq 1$

Concludendo: $\begin{cases} \text{Max } z = 2X_1 + X_2 : \frac{1}{3}X_2 + X_3 - \frac{2}{3}X_4 = \frac{31}{3} \\ X_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 = \frac{10}{3} \\ 2X_2 + X_3 \geq 1 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \text{ INTERE} \end{cases}$

Ritorno il problema e risolvo con il metodo del semplice

Quindi:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2	-2	-1	0	0	0
$\frac{31}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
$\frac{10}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	2	0	1	-1

FORMA STANDARD:

$\begin{cases} \text{Max } z = -(2X_1 + X_2) : \frac{1}{3}X_2 + X_3 - \frac{2}{3}X_4 = \frac{31}{3} \\ \text{Min} \\ X_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 = \frac{10}{3} \\ 2X_2 + X_3 - X_5 = 1 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$

NB: Non esiste una SBA ammissibile iniziale

Introduco quindi una variabile artificiale X_6 . Quindi:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$-z$	0	0	0	0	0	1
X_3	$\frac{31}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
X_1	$\frac{10}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
X_6	1	0	2	0	1	-1

FORMA CANONICA:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$-w$	$-\frac{11}{3}$	0	$-\frac{13}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1
X_3	$\frac{31}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
X_1	$\frac{10}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
X_6	1	0	2	0	1	-1

Quindi:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$-w$	$\frac{13}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{3}$
X_3	$\frac{17}{2}$	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{6}$
X_1	$\frac{9}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
X_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

NB: Per definizione $C_6 = 0$.

→ Problema originario impossibile.

Vediamo un altro esempio: $\begin{cases} \text{Max } z = 3X_1 + 2X_2 : 2X_1 + 3X_2 \leq 3 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 4 \end{cases}$

Ritorniamo il problema e trasformiamolo in un $\begin{cases} X_1, X_2 \geq 0 \text{ INTERE} \end{cases}$

minimo:

$\begin{cases} \text{Min } z = -3X_1 - 2X_2 : 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 3 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 = 4 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$

FORMA STANDARD.

Simplesso:

		X_1	X_2	X_3	X_4
-2	0	-3	-2	0	0
X_3	3	2	3	1	0
X_4	1	(3)	2	0	1

I

		X_1	X_2	X_3	X_4
-2	4	0	0	0	1
X_3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
X_1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

← RIGA GENERATRICE

Quindi:

$$0X_1 + 5/3 X_2 + X_3 - 2/3 X_4 = 1/3 \Rightarrow 0X_1 + (1 + 2/3) X_2 + X_3 + (-1 + 1/3) X_4 = 0 + 1/3$$

Punto:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2	1	0	0	0	1	0
X_3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
X_1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
X_5	$-\frac{1}{3}$	0	($-\frac{2}{3}$)	0	$-\frac{1}{3}$	1

Alternativa, perché qui siamo costretti a usare il SIMPLESSO DUALE. Quindi:

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2	1					
X_3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	($-\frac{3}{2}$)	$\frac{5}{2}$
X_1	1	1	0	0	0	1
X_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

(TABLEAU ORLATO)

↙ Pivot

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2	$\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$
	1	1	0	0	0	1
	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

Considera: $0X_1 + X_2 + \frac{1}{3}X_3 + 0X_4 - \frac{2}{3}X_5 = \frac{1}{3}$

$$(0 + \frac{1}{3}X_3) + (-1 + \frac{1}{3})X_5 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{3}X_5 - \frac{1}{3} = \dots$$

Quindi il nuovo tableau orlato:

In breve: $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}X_3 - \frac{1}{3}X_5 + X_6$

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-2	$\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0
X_4	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0
X_1	1	1	0	0	0	1	0
X_2	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
X_6	$-\frac{1}{3}$	0	0	($-\frac{1}{3}$)	0	$-\frac{2}{3}$	1

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-2	3	0	0	0	0	1	2
X_4	1	0	0	0	1	-1	-2
X_2	1	1	0	0	0	1	0
X_1	0	0	1	0	0	-1	1
X_3	1	0	0	1	0	1	-3

→ TABLEAU OTTIMO.

A questo punto facciamo un breve riassunto di quanto appena visto. Noi abbiamo visto problemi di programmazione lineare del tipo:

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in X \end{cases}$$

e abbiamo studiato vari modi per risolvere un problema di questo tipo, usando in pratica il metodo del semplice sia per il problema primale che per quello duale. Abbiamo poi visto come generare una soluzione di base ammissibile di partenza se non c'è l'avere. Poi abbiamo studiato i problemi di programmazione con le variabili intere e abbiamo studiato due metodi di risoluzione: ie BRANCH & BOUND e i tagli di Gomory. Vediamo ora un aspetto riguardante la coppia di problemi PRIMALE-DUALE. Consideriamo:

$\{ \text{Thm } \exists x: Ax \equiv b, x \in Q \}$ PROSTRAVE

$$\{ \max u^T b : C^T \geq u^T A, u \geq \alpha \} \text{ DUAL}$$

$Ax = b$, $x = \alpha$ AMMISSIBILITÀ PORTALE

$C^T \geq \bar{U}^T A$ $\bar{U} \geq 0$ ARTIFICIALITÀ DUALE

Indipendentemente: $C^T X = U^T b$ Da queste considerazioni
si ha:

$$\bar{u} = \bar{q} \text{ e } A\bar{x} = b \Rightarrow A\bar{x} - b = \bar{q} \Rightarrow \bar{u}^T (A\bar{x} - b) = \bar{q} \text{ e analogamente: } \bar{z}^T = \bar{u}^T A \text{ e } \bar{x} = \bar{q}$$

Riassumendo si ottiene: $\begin{cases} \bar{u}^T(A\bar{x}-b)=0 \\ -\bar{u}^T(A\bar{x}-b)=0 \end{cases}$ condizioni di ORTOGONALITÀ

6 condizioni di ortogonalità $\{ \bar{x}(C^T - U^T A) = 0 \}$ CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ. $C^T - U^T A = 0 \Rightarrow \bar{x}(C^T - U^T A) = 0$
matrice vengano utilizzate per le variabili METODO DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI.

Esempio:

1) Un'azienda tessile produce due tipi di tende: RITINI e BAHARIAS. Il primo tipo richiede 1 mm di manodopera, il secondo 1,5 mm al m². Settimanalmente sono disponibili 10 ore di manodopera. Inoltre vengono prodotte 4000 m² di RITINI e 3000 m² di BAHARIAS alla settimana. Il profitto è 2500 €/m² di RITINI e 3500 €/m² di BAHARIAS. Massimizzare il profitto.

$$d) \begin{cases} \text{Max } 2500X_1 + 3500X_2 : X_1 + 1,5X_2 \leq 100 - 60 \\ X_1 \leq 1,000 \\ X_2 \leq 3000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{dove } \begin{cases} X_1 = \text{RUMAH} \\ X_2 = \text{BAHANAS} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{min } 2500X_1 + 3500X_2 : 2X_1 + 3X_2 \leq 12000 \\ & X_1 \leq 4000 \\ & X_2 \leq 3000 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformando in un problema di minimo:

$$\begin{cases} \text{Thm: } -2500X_1 - 3500X_2 : 2X_1 + 3X_2 \leq 12000 \\ X_1 \leq 4000 \\ X_2 \leq 3000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

FORMA STANDARD: $\begin{cases} \text{Min: } -2500X_1 - 3500X_2: \\ \\ g_1(x): 2X_1 + 3X_2 \leq 12000 \\ g_2(x): X_1 \leq 4000 \\ g_3(x): X_2 \leq 3000 \end{cases}$

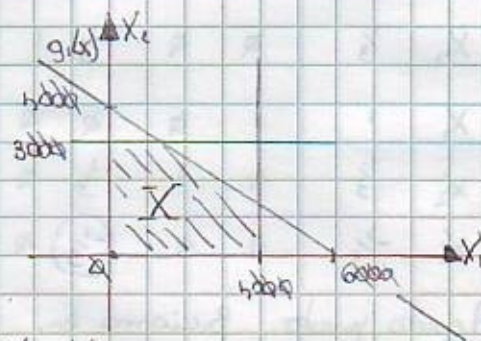
Simplesso:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2	-25	-35	0	0	0
X_3	2	3	1	0	0
X_4	(1)	0	0	1	0
X_5	0	1	0	0	1

-2×10^6	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
	$\varnothing$	-35000	$\varnothing$	25000	$\varnothing$
X_3	$\varnothing$	(3)	1	-2	$\varnothing$
X_1	1	$\varnothing$	$\varnothing$	1	$\varnothing$
X_5	$\varnothing$	1	$\varnothing$	$\varnothing$	1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$-2, 11, 6, 10^6$	$\varnothing$	$\varnothing$	$1166, \bar{6}$	$2333, \bar{3}$	$\varnothing$
$\Rightarrow X_1, 1333, \bar{3}$	$\varnothing$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\varnothing$
$X_1, 1000$	1	$\varnothing$	$\varnothing$	1	$\varnothing$
$X_5, 1666, \bar{7}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

TABLEAU OTTEND.



Problema dual: $\begin{cases} \text{Min: } 12000U_1 + 14000U_2 + 3000U_3 : \\ 2U_1 + U_2 \geq 2500 \\ 3U_1 + U_2 \geq 2000 \end{cases}$

NB-

$$v^T A = [v_1, v_2, v_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 3v_1 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} U_1 \cong \mathbb{Q} \\ U_2 \cong \mathbb{Q} \\ U_3 \cong \mathbb{Q} \end{matrix} \}$$

Soluzioni ottimali del duale: (variabili complementari). $x_1^*(2u_1^* + u_2^* - 2500) = 0$

Quindi:

$$X_1^* = 1, \quad Q \cdot U_2^* = 0$$

$$X_3^* = 1333, \bar{3} \quad +1666, \bar{7} \quad U_3^* = 80$$

$$h_{add}(2b_1^* + U_2^* - 2500) = 0$$

$$1333,8(3U_1 + U_3 - 3500) = 0$$

$$U_1^+(8000 + 4000 - 12000) = 0 \Rightarrow U_1^+(x) = 0 \Rightarrow (U_1^+ \neq 0)$$

$$X_1^*(2U_1^* + U_2^* - 25) = 0$$

$$X_1^0(36.4 + 0.2 - 35.0) = 0$$

$$U_1^T(2X_1^T + 3X_2^T - 12X_3^T) = 0$$

$$U_2^* (-X_1^* - \frac{1}{2} \Delta \Delta \Delta) = 0$$

$$U_3^T (-X_3^T - 2500) = 0$$

$$U^+ = (U_1^+, U_2^+) = (1166, \bar{6}, 166, 7).$$

$$133\bar{3} (30^+ - 3520) = 0 \Rightarrow 30^+ = 3520 \Rightarrow U^+ = 1166\bar{6}$$

Analizziamo ora la programmazione non lineare

Um programador tem acesso com uma sala reservada e com internet e pasta mesa própria.

$$U_2^* \approx 166,7 \quad (\text{Impfakt: } 2 \cdot 1166,6 - 2333,3 = -U_2^*)$$

$$U_2^* = 250 \text{ V} - 2.1166 \text{ V}$$

$$\{ \text{Thm } z = p(x) \}$$

dove $f(x)$ è una funzione non lineare in x e la ricerca dell'ottimo (massimo o minimo) si fa nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Poi se vogliamo ricevere la chiamata

In un intervallo $[a, b]$ allora bisogna aggiungere il rimando:

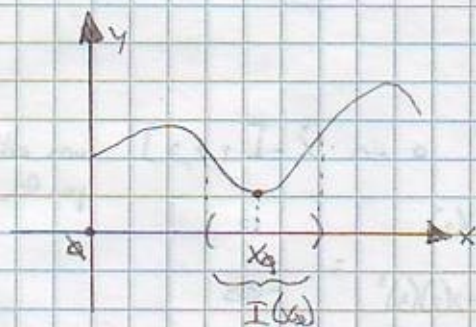
$$\{ \pi(x) = p(x) : a \leq x \leq b \}$$

Un punto x_0 viene detto di MINIMO LOCALE quando per un intorno $I(x_0)$ si ha che $f(x) \geq f(x_0)$.

Se si ha $P(x) \geq P(x_0)$ per tutti i valori dove la funzione è definita, allora x_0 è un MINIMO GLOBALE. Il programma:

$\{ \text{fim } z = p(x) \}$ tem um mínimo global, enquanto $\{ \text{fim } z = p(x) : a \leq x \leq b \}$ tem um mínimo local. Se a função $p(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ então esta tem ótimo global. Inoltre se $p(x)$ tem um ótimo local em x_0 e se $p(x)$ é derivável em $I(x_0)$, então $p'(x_0) = 0$. Graficamente:

Graficamente:



$I(x_0)$ = intorno di x_0 .

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ cioè che x_0 è un punto di STAZIONARITÀ.

Im particolare se in $I(k)$ la $P(k)$ è derivabile due volte o si ha:

$$p'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ \u00e9 MINIMO LOCALE} \\ p''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ \u00e9 MAXIMO LOCALE} \end{cases}$$

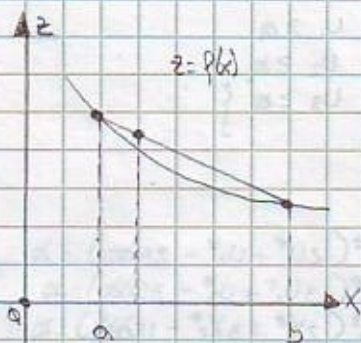
Una funzione $f(x)$ viene detta convessa in un dato intervallo quando $\forall (x_1, x_2) \in I$ e per $\forall \theta \in [0, 1]$ si ha:

$$P(qX_1 + (1-q)X_2) = qP(X_1) + (1-q)P(X_2).$$

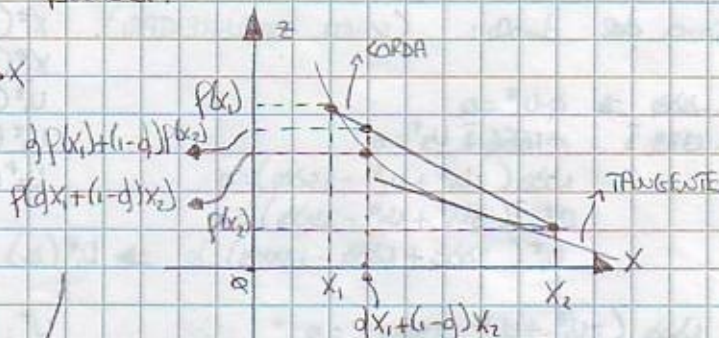
28) Se:

$$P(qx_1 + (1-q)x_2) \geq qP(x_1) + (1-q)P(x_2), \quad P(x) \text{ è CONCAVA.}$$

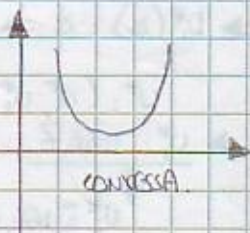
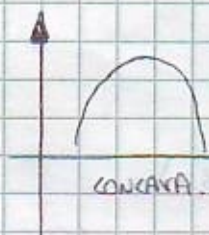
Consideriamo:



se in $[a, b]$ $P(x)$ è derivabile due volte e $P''(x) \geq 0 \quad \forall x$ di tale intervallo allora $P(x)$ è CONCAVA, mentre è CONCAVA quando $P''(x) \leq 0$.
Vediamo la rappresentazione grafica della precedente formula:



Quindi:



Quando la funzione in questione è non lineare in più variabili si ha:

$\{ \text{Min } z = P(x) \}$ con $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Vediamo ora più nel dettaglio la programmazione non lineare.

Un problema di programmazione non lineare può essere scritto nella forma:

$$\text{Min } \{ P(x) : b(x) = 0, \quad c(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \}$$

Consideriamo per ora solo problemi più semplici del tipo: $\{ \text{Min } P(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$.
Noi vogliamo individuare un valore x^* tale da:

$$P(x^*) \leq P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Purtroppo a volte si giunge a trovare un x^* che minimizza solo localmente $P(x)$ e non anche globalmente. Quando $P(x)$ è convessa questa difficoltà scompare. Indichiamo con $\nabla P(x)$ il vettore GRADIENTE associato alla funzione $P(x)$. Esso è definito in questo modo:

$$\nabla P(x) = \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right]^T$$

Consideriamo per esempio:

$$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 - x_2^2 x_3^3 \quad \text{e sia } \hat{x} = [1, 2, 3]^T \text{ un ottimo locale per la funzione.}$$

Si ha:

$$\nabla P = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2 x_3^3 \\ -3x_2^2 x_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla P|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 6(1)(2) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3)^3 \\ -3(2)^2(3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -45 \\ -108 \end{bmatrix}$$

La MATRICE HESSIANA associata alla funzione $P(x_1, \dots, x_n)$ è:

$$H_P = \nabla^2 P = \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

Si chiama una matrice A simmetrica di dimensioni $n \times n$ tale che $A = A^T$ e definita negativamente quando: $X^T A X < 0, \forall X \neq 0$. Quindi se A è simmetrica di ordine $n \times n$, definiamo:

$$A_1 = (a_{11}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \dots \quad A_m = (-1)^{m-1} \det A$$

allora A è negativa solo se $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono tutti negativi.

Quindi se $f(x)$ ha derivate parziali seconde in un certo intorno di x^* e $\nabla f(x^*) = 0$ e $H_f(x^*) < 0$, x^* è un massimo locale per f in tale intorno. Dei metodi numerici per approssimare massimi locali sono:

1) METODO DEL GRADIENTE: È un metodo iterativo per determinare un ottimo locale di una funzione obiettivo non vincolata. Data una soluzione iniziale, muoversi nella direzione di più rapido miglioramento (opposto al gradiente).

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \quad \text{dove } d^{(k)} = \text{PASSO.}$$

Il sottoproblema di determinare il passo ottimo diventa:

$$\min_d \{ f(x^{(k)} - d \nabla f(x^{(k)})) \} \quad d \geq 0$$

Esempio:

$$p = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 3x_2 \Rightarrow \nabla p = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$x^{(0)} = (1, 1) \text{ e } z^{(0)} = 0$$

$$\nabla p(x^{(0)}) = [4, 4]^T \Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} - d^{(0)} \nabla p(x^{(0)})$$

Perciò:

$$\min_d p(x_d^{(1)}) = 2(1-d)^2 + 1 + (1-d) - (1-d) - 3 = (1-d)^2 - 2 \Rightarrow d \geq 0$$

Infatti:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - d^{(0)} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - d^{(0)} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4d^{(0)} \\ 1-4d^{(0)} \end{bmatrix} \Rightarrow 2(1-4d)^2 + 1 + (1-4d) - (1-4d) - 3 = 2(1-4d)^2 + 1 + (1-4d) - (1-4d) - 3$$

$$d^{(0)} = \frac{1}{4} \text{ e quindi } x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$z^{(1)} = -2$ e la funzione obiettivo è migliorata.

$\nabla p(x^{(1)}) = [0, -1]^T \Rightarrow$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - d^{(1)} \nabla p(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d^{(1)} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+d^{(1)} \end{bmatrix} \text{ e quindi: } \min_d p(x_d^{(2)}) \quad d \geq 0$$

Imponiamo:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - d^{(1)} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+d^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\min_d p(x_d^{(2)}) = (1+d)^2 - 3(1+d) = (1+d)^2 - 3(1+d) \Rightarrow 1+d^{(1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow d^{(1)} = \frac{1}{2} \text{ e perciò:}$$

$$\begin{cases} x^{(2)} = (0, \frac{3}{2}) \\ z^{(2)} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Al terzo passo si ha:

$$x^{(3)} = x^{(2)} - d^{(2)} \nabla p(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} - d^{(2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d^{(2)}}{2} \\ \frac{3}{2} - 2d^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$