

⑧

$$[c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_m \bar{x}_m] = [u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots + u_m b_m] \Rightarrow \begin{cases} c_1 \bar{x}_1 = u_1 b_1 \\ c_2 \bar{x}_2 = u_2 b_2 \\ \vdots \\ c_m \bar{x}_m = u_m b_m \end{cases}$$

Si verifica poi che: $A\bar{x} = b \Rightarrow \bar{u}^T A\bar{x} = \bar{u}^T b \Rightarrow \bar{u}^T (A\bar{x} - b) = 0$

Analogamente: $\bar{u}^T A = c^T \Rightarrow \bar{x} \bar{u}^T A = c^T \bar{x} \Rightarrow \bar{x} (\bar{u}^T A - c^T) = 0$

L'algoritmo del semplice per il problema duale non è come l'algoritmo del semplice DUALE, funziona nel seguente modo:

	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
$-z$	$\bar{c}_1$						
x_1	$\bar{b}_1$						
$\vdots$	$\vdots$						
x_m	$\bar{b}_m$						

Cambiamo come si può vedere parte cose. Innanzitutto si guardano i segni di b_i e non dei c_i . Poi le rapporti da analizzare è:

$$\beta = \frac{c_i}{|a_{ij}|} \text{ e si sceglie qui a terra quella minimo.}$$

NB: Si guarda le b_i negativi più piccolo.

Si preli attenzione al fatto che per un $\bar{b}_i < 0$, se sulla stessa riga non esiste un $a_{ij} < 0$, allora il problema primale è impossibile e quindi il duale è illimitato. Altrimenti si può effettuare l'operazione di PIVOT. Per esempio:

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 : & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Passiamo al problema duale:

$$\begin{cases} \text{Max } w = 6u_1 + 5u_2 : & 2u_1 + u_2 \leq 3 \\ & 2u_1 + 2u_2 \leq 4 \\ & 3u_1 + 3u_2 \leq 5 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \geq 0 \end{cases}$$

NB: $\bar{u}^T A = [u_1, u_2] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_2 \\ 2u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 + 3u_2 \end{bmatrix}$

TABULAU:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$-w$	-6	-5	0	0	0
u_3	3	1	1	0	0
u_4	2	2	0	1	0
u_5	3	3	1	0	1

FORMA STANDARD:

$$\begin{cases} \text{Min } w = -6u_1 - 5u_2 : & 2u_1 + u_2 + u_3 = 3 \\ & 2u_1 + 2u_2 + u_4 = 4 \\ & 3u_1 + 3u_2 + u_5 = 5 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti però che questo procedimento è errato in quanto si sta usando il normale semplice sul problema duale. Si procede invece nel seguente modo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3	4	5	0	0
x_1	1	2	3	0	0
x_2	0	1	0	1	0
x_3	0	0	1	0	1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$-w$	-6	-5	0	0	0
u_1	1	2	3	0	0
u_2	0	1	0	1	0
u_3	0	0	1	0	1

Ha cambiato i segni delle variabili di vincolo. Quindi:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 -9	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-2 -11	0	0	1	1	1
X_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\rightarrow X_1$	1	0	-2	-1	1
X_5	0	(-1)	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	X_2	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

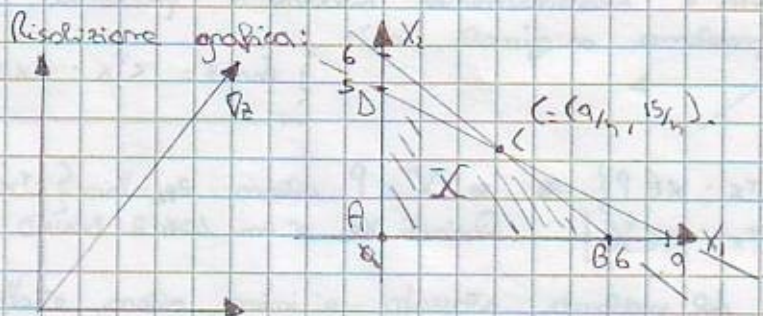
A questo punto analizziamo un esempio più completo. Consideriamo:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 5X_1 + 2X_2 : X_1 + X_2 \leq 6 \\ 5X_1 + 9X_2 \leq 45 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Graf $z = D_2 = 5 + 8$

Immediatamente C è ottimo.
Usiamo il simplex:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 0	5	-8	0	0	
X_3 6	(1)	1	1	0	
X_4 45	5	9	0	1	



FORMA STANDARD:

$$\begin{cases} \text{Min } z = -5X_1 - 2X_2 : X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ 5X_1 + 9X_2 + X_4 = 45 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \end{cases}$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 3 0	0	-3	5	0	
X_1 6	1	1	1	0	
X_4 15	0	(1)	-5	1	

	X_1	X_2	X_3	X_4
$-2 \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{15}{5}$	0	1	$-\frac{5}{5}$	$\frac{1}{5}$

A questo punto aggiungiamo il seguente vincolo:

$-\frac{1}{5}X_3 - \frac{3}{5}X_4 \leq -\frac{1}{5}$ e quindi:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
$\frac{15}{5}$	0	1	$-\frac{5}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

$$\begin{cases} \text{Min } z = -5X_1 - 2X_2 : X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ 5X_1 + 9X_2 + X_4 = 45 \\ -\frac{1}{5}X_3 - \frac{3}{5}X_4 + X_5 = -\frac{1}{5} \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

Rappresentiamo ora sullo stesso tabella sia il problema primale che quello duale. Perciò:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 1	0	0	1	0	1
X_1 $\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
X_2 $\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
X_5 $\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	
$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
$\frac{15}{5}$	0	1	$-\frac{5}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1

Sceglia come elemento del pivot quello dell'ultima riga in modo che:

$\frac{C_i}{|a_{ij}|}$ minimo

Quindi:

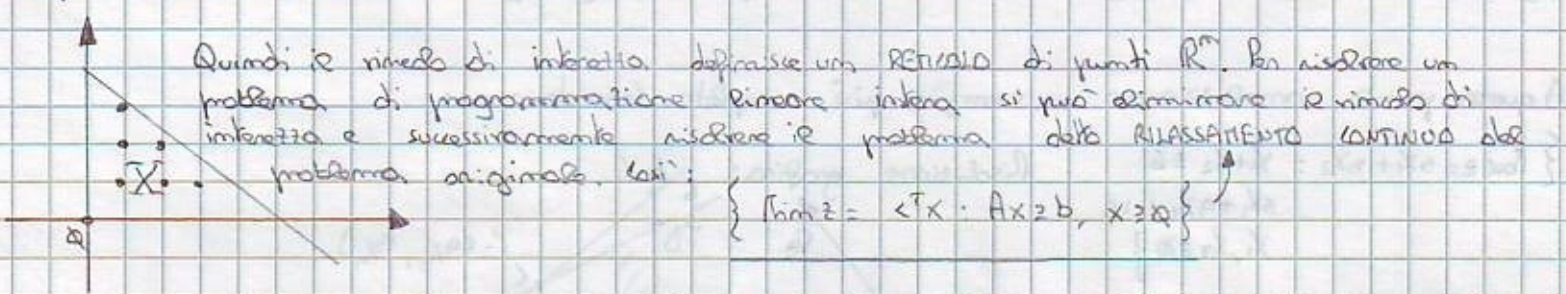
TABELLA OTTIMA!!

Sia che con e' aggiunta del ulteriore vincolo, il valore della funzione obiettivo e' peggiorato.

NB: Il metodo del simplex duale si può applicare solo quando i vari $C_i \geq 0$ tutti.

Vediamo ora la programmazione intera. Un problema di programmazione lineare intera (PLI) è un problema posto nella seguente forma:
$$\{ \text{Max } z = c^T x : Ax \geq b, x \geq 0 \text{ intero} \}$$

Si noti che quando il vincolo di interezza riguarda solo alcune variabili del problema si ha un PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA MISTA.
Graficamente si ha:



Sia: $z_{PL} = \text{Max} \{ c^T x : x \in P \}$ se $X \in P$ allora $z_{PL} = \text{Max} \{ c^T x : x \in P \} \leq \text{Max} \{ c^T x : x \in X \}$
 $z_{PLI} = \text{Max} \{ c^T x : x \in X \}$ Quindi X_{PL} è un LOWER BOUND per z_{PLI} .

Se la soluzione X^* del problema rilassato è intera, allora è ottima anche per il problema intero. Si noti però che questo procedimento non generalizza la soluzione ottima per il problema PLI. Consideriamo:

$$\{ \text{Max } z_{PLI} = c^T x : Ax \geq b, x \geq 0 \text{ intero} \}$$
 Supponiamo che A e b siano interi. Consideriamo il caso che X^* abbia componenti frazionarie:

$$X^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$
 e X^* ha componenti frazionarie se e solo se $B^{-1}b$ non è intero. Poi:
$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$
 Se B è intera, B^{-1} lo è anche essa solo se $\det B = \pm 1$ e tale condizione è solo sufficiente ma non necessaria.

Si può però dimostrare che una matrice A contenente la base B con $\det B = \pm 1$ è tale che esiste sempre un problema PLI che tipo: $\{ \text{Max } z = c^T x, Ax = b, x \geq 0 \}$ la cui soluzione ottima coincide con un vertice frazionario. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$
 con $m \leq n \Rightarrow$ essa è UNIMODULARE quando se $\forall B$, sua sottomatrice k , di dimensioni $m \times m$ si ha:
$$\det(B) \in \{-1, 0, +1\}$$

Se la matrice A è unimodulare e b è intero allora il poliedro P ha solo vertici interi. Inoltre una matrice A di dimensioni $m \times n$ è TOTALMENTE UNIMODULARE se:

$\det(Q) \in \{-1, 0, +1\}$ per ogni sottomatrice quadrata Q .
Se A è totalmente unimodulare e b è intero allora $P = \{ x \geq 0, Ax \geq b \}$ ha solo vertici interi. Le condizioni per verificare se una matrice A è totalmente unimodulare sono:

- $a_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$
- $\exists$ partizione (I_1, I_2) tale che ogni colonna con 2 elementi non nulli ha quei 2 elementi su righe di partizione differente se sono concordi in segno.
- Ogni colonna di A non ha più di due elementi non nulli.

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eliminata

questa matrice è TOTALMENTE UNIMODULARE.
Infatti eliminando le colonne con un solo elemento non nullo, si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & I_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & I_5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & I_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & I_8 \end{bmatrix}$$

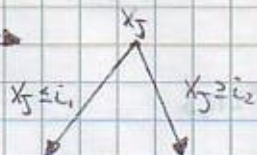
eliminando anche le righe con un solo elemento non nullo.

Però, in linea generale, la matrice dei vincoli A non è totalmente unimodulare. Perciò si usa il PIANO DI TAGLIO. Abbiamo detto che si può risolvere il problema ignorando il vincolo di interezza (l'approssimazione) e risolvendo il problema così ottenuto. Se la soluzione prima non è intera si può eseguire una 2° approssimazione sui valori ai primi interi ammissibili. Supponiamo che:

$$c_1 \leq x_5^* \leq c_2 \quad \text{con } c_2 \text{ e } c_3 \in \mathbb{Z}^+ \text{ (interi non negativi)}$$

Attraverso la fase di BRANCHING si ha l'effetto di restringere la regione delle soluzioni. Per esempio:

$$c_1 \leq x_5^* \leq c_2 \Rightarrow$$



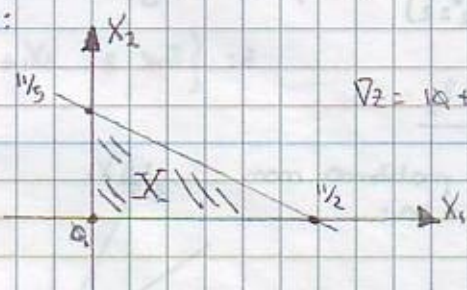
si generano quindi due sottoprogrammi.

Vediamo su un esempio:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 10x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ intero} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } z = 10x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Graficamente:



$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (5, 5, 0)$$

Si noti però che $5 \leq x_1^* \leq 6 \Rightarrow$ si può applicare il branching.



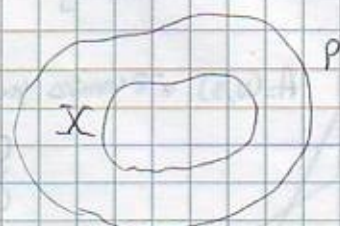
$$\begin{cases} \text{Max } z = 10x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } z = 10x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 6 \end{cases}$$

Analogamente si risolvono i due sottoprogrammi eliminando il vincolo di interezza e risolvendo i relativi problemi rilassati. Supponiamo di voler massimizzare la funzione obiettivo. Simili a con il branching il valore ottimo intero trovato diventa un limite inferiore del problema. Si ricordi infatti che:

$$z_{PI} = \begin{cases} \text{Max } z: Ax=b, x \in P \end{cases} \Rightarrow \underline{z_{PI}} \leq z_{PI} \text{ se } X \subset P$$

$$z_{PI} = \begin{cases} \text{Max } z: Ax=b, x \in X \end{cases}$$



Supponiamo che durante il processo di branching si sia trovata una soluzione intera che ha un valore della funzione obiettivo maggiore della precedente (si ricordi che stiamo massimizzando), allora questo valore è il nuovo LOWER BOUND. Il programma che aveva generato il precedente Bound viene

12

eliminata e il processo di branching continua. Se si vuole minimizzare la funzione obiettivo si applica lo stesso procedimento, ma la soluzione da considerare è il limite superiore del problema. Questa fase si chiama **BOUNDING**. Per esempio:

$$\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere} \end{cases}$$

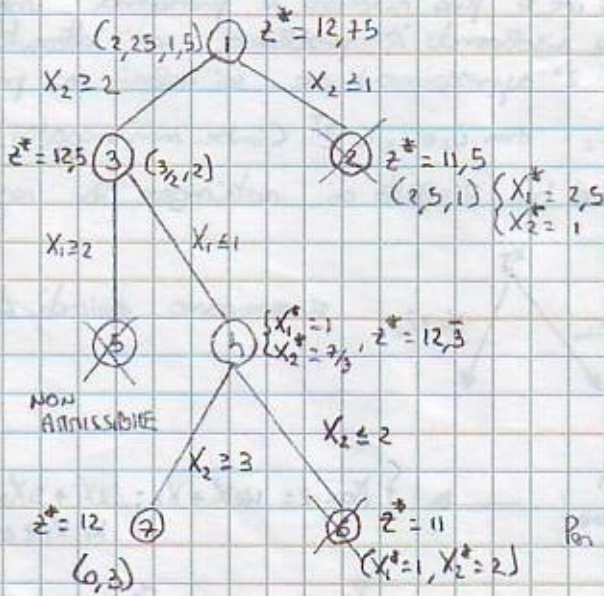
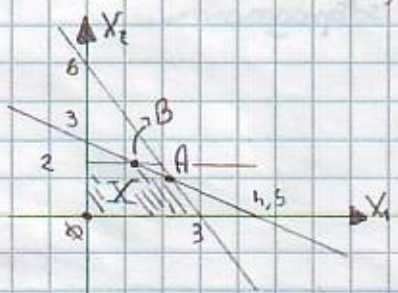
Quindi:

$$\begin{cases} x_1^* = 2,25 \\ x_2^* = 1,5 \end{cases}$$

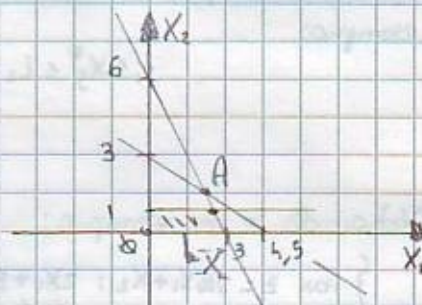
Siccome x_1^* è più vicina ad un valore intero x_1 usiamo per il branching:

$x_2 \geq 2$ e $x_2 \leq 1$

3: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

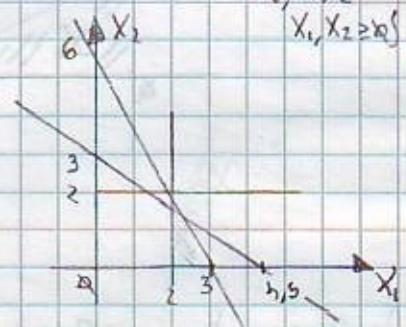


2: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ int.} \end{cases}$



Per quanto riguarda:

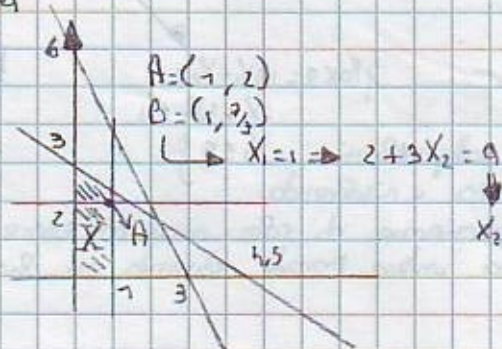
5: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_2, x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



Simboli da: $B = (3/2, 2)$. Infatti: $x_2 = 2, 2x_1 + 3 \cdot 2 = 9 \Rightarrow 2x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 3/2$

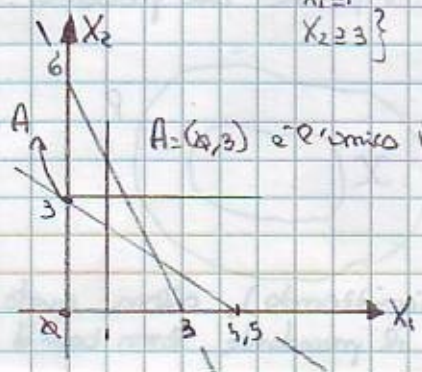
Per quanto riguarda il problema 3 si ha: $x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$ e quindi $x \in \mathbb{Z}$ e il problema non ammette soluzioni. Per quanto riguarda il problema 4 si ha:

4: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$



Per il problema 7:

7: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq 3 \end{cases}$

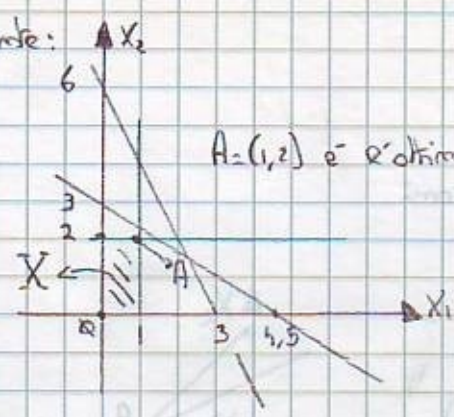


$A = (0, 3)$ è l'unico punto che soddisfa entrambi i vincoli.

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 3 \end{cases}$$

8: $\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 : 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$

Graficamente:



$A = (1, 2)$ è l'ottimo $\Rightarrow \begin{cases} X_1^* = 1 \\ X_2^* = 2 \end{cases}$

A questo punto la soluzione, come le condizioni, sono tutte intiere e quindi il procedimento è concluso. Si noti che $z^* = 12$ diventa il nuovo **COSTO** **PRODOTTO**. Quest'ultimo ora fornisce la soluzione ottimale.

Vediamo un altro esempio di PROBLEMA DELLO ZAINO BINARIO.

Immaginiamo un tale problema consiste nel massimizzare il valore di una generica unità. Spesso si ha a che fare con dei progetti. Siamo:

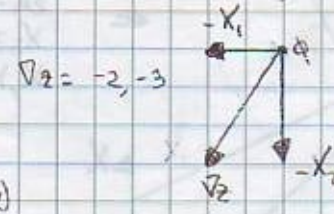
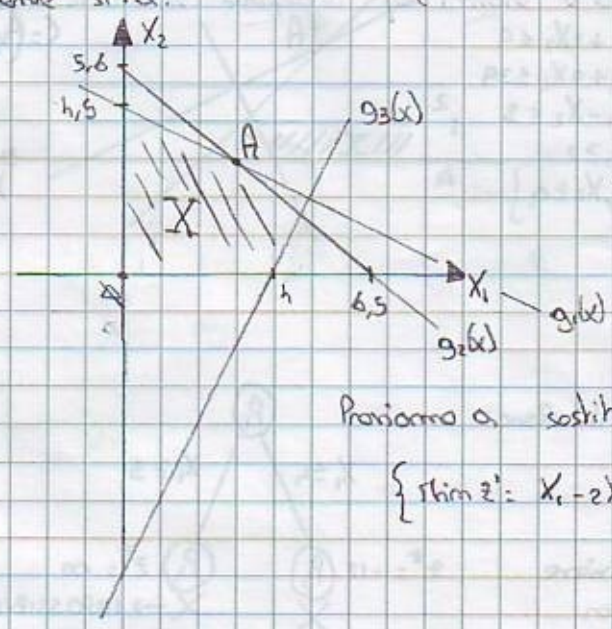
a_j = costo j -esimo progetto
 c_j = valore j -esimo progetto
 b = budget disponibile

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Max } z = \sum_{j=1}^m c_j X_j : \sum_{j=1}^m a_j X_j \leq b \\ X_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$

NB: X_j è una variabile binaria.

Consideriamo il seguente problema: $\begin{cases} \text{Max } z = -2X_1 - 3X_2 : X_1 + 2X_2 \leq 9 & g_1(x) \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 39 & g_2(x) \\ 2X_1 - X_2 \leq 8 & g_3(x) \\ X_1, X_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

Graficamente si ha:

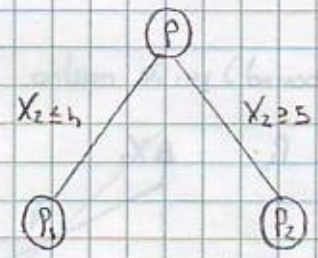


L'ottimo è $A = (3, 3)$ con $z = -15$.
 $\hookrightarrow$ il P.I. è già risolto.

Proviamo a sostituire z con $z' = X_1 - 2X_2$. Si ha:

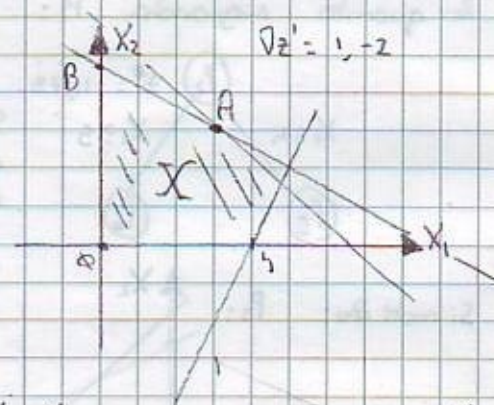
$\begin{cases} \text{Max } z' = X_1 - 2X_2 : X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$

L'ottimo è $B = (4, 9/2)$. Quindi:

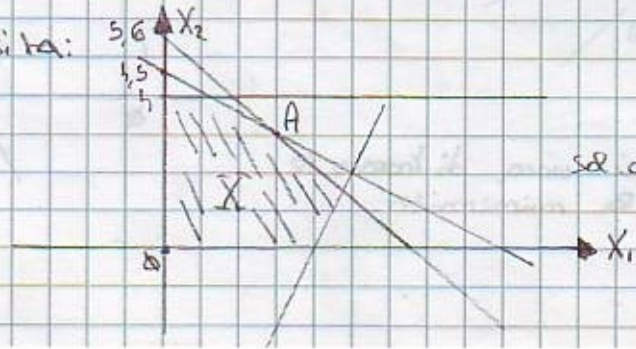


$4 \leq X_2 \leq 5$

$P_1: \begin{cases} \text{Max } z' = X_1 - 2X_2 : X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$



Graficamente, per P_1 si ha:



se ottimo $x^{*(1)} = (4, 4.5)$
 $z' = -8 \rightarrow$ il problema si divide.

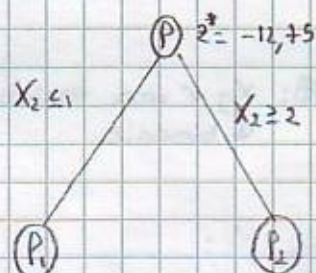
(11)

$$P_2: \begin{cases} \text{Min } z' = X_1 - 2X_2: & X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ & 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ & 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ & X_2 \geq 5 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Nessuna soluzione}$$

Supponiamo di avere: $\begin{cases} z'' = -3X_1 + X_2: & X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ & 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ & 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ & X_2 \leq 1 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$ (Lim).

De-è ottimo: $(19/11, 3/2) \Rightarrow 1 \leq X_2 \leq 2$

Quindi:

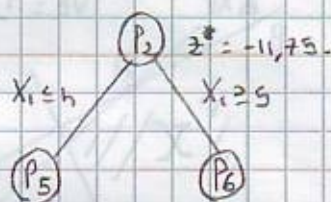


$$P_1: \begin{cases} \text{Min } z' = -3X_1 + X_2: & X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ & 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ & 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ & X_2 \leq 1 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_2: \begin{cases} \text{Min } z'' = -3X_1 + X_2: & X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ & 6X_1 + 7X_2 \leq 39 \\ & 2X_1 - X_2 \leq 8 \\ & X_2 \geq 2 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

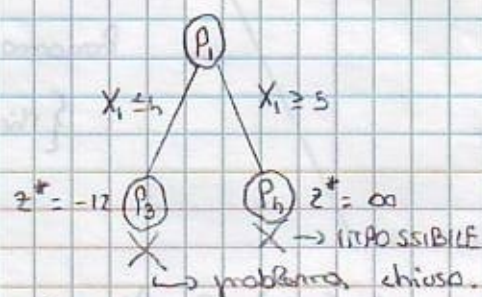
$$x^{*(2)} = (17/11, 2) = G$$

A questo punto bisogna analizzare i vari sottoproblemi. In particolare: per quanto riguarda P_2 :

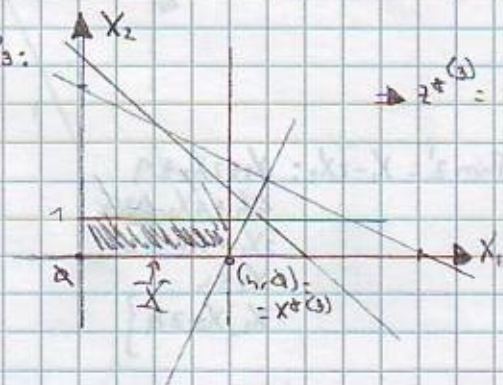


Si noti però che le linee chiuse in anticipo per dominanza. Infatti:

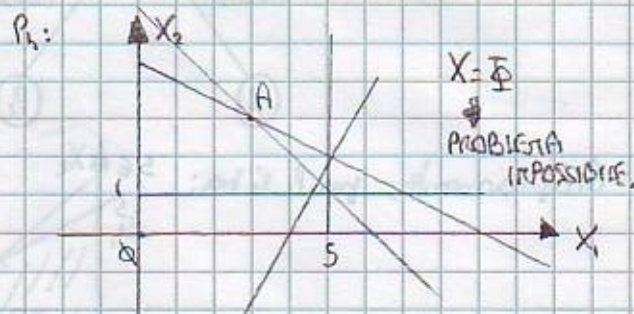
z^* frazionaria -12 .



Si noti che: P_3 :



$\Rightarrow z^{*(3)} = -12$. (Lower bound) per il nostro problema.



Si noti che nel branch-and-bound si cerca di trovare il minimo valore intero di z che si minimizza.