RIASSUNTO: (PROGRAMMAZIONE LINEARE E NON LINEARE).

Un problema di ottimizzazione è un problema in cui si cerca di massimizzare o di minimizzare una funzione particolare detta FUNZIONE OBBIETTIVO. Per esempio:
$\{\max f(x)\}$ con $f(x) = x_1 + x_2$. Le variabili che compaiono nella funzione obbiettivo possono essere vincolate o meno. Le variabili vincolate sono vincolate per l'appunto da vincoli. Per esempio: $\left\{\max f(x) = x_1^2 + x_2^2 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 3 = g_1(x) \\ x_2 \geq 2 = g_2(x) \end{array}\right\}$ dove $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono i due vincoli in questione.

Un programma matematico è un problema di ottimizzazione in cui la funzione obbiettivo e i vincoli sono espressi come funzioni matematiche, e cioè del tipo:

$$\left\{\max \text{ o } \min \ f(x) = f(x_1 \dots x_n) : \begin{array}{l} g_1(x_1 \dots x_n) \gtreqless b_1 \\ g_2(x_1 \dots x_n) \gtreqless b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1 \dots x_n) \gtreqless b_m \end{array}\right\}$$

Un programma matematico è lineare quando è lineare sia $f(x)$ che le varie $g_i(x)$. Quindi:

$$f(x_1 \dots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$
$$g_i(x_1 \dots x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

Un programma matematico è non lineare quando nella funzione obbiettivo e/o nei vincoli ci sono termini elevati al quadrato o elevati alla n con $n > 1$. Nell'esempio precedente, e cioè:

$$\left\{\max f(x) = x_1^2 + x_2^2 : \begin{array}{l} g_1(x): \ x_1 - x_2 = 3 \\ g_2(x): \ x_2 \geq 2 \end{array}\right\}$$

si nota che la funzione obbiettivo è non lineare e quindi il problema matematico è non lineare.

Consideriamo per ora la programmazione matematica lineare. Un programma lineare si dice in FORMA CANONICA quando tutti i vincoli sono espressi con il segno di disuguaglianza. Per esempio:

$$\left\{\max z = x_1 + x_2 : \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Si noti in generale che un problema di programmazione matematica lineare si scrive nella seguente maniera:

$$\{\max \text{ o } \min : z = c^T x : Ax \geq b\}$$

dove A viene detta MATRICE DEI COEFFICIENTI, x è il vettore delle incognite, e b il vettore dei termini noti. Per l'esempio appena visto si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax \leq b \text{ cioè: } \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Sempre nel nostro caso si ha: $c^T = [c_1 \ c_2] = [1 \ 1] \Rightarrow c^T x = [c_1 \ c_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 + x_2$.

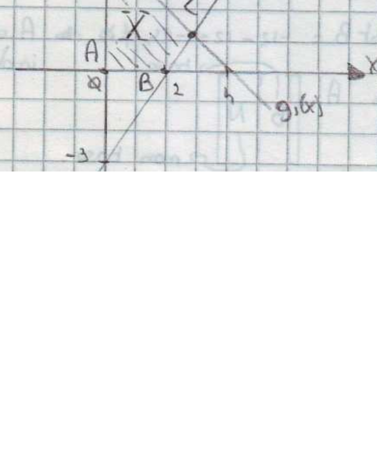
Un problema di programmazione matematica lineare è scritto in FORMA STANDARD quando i vincoli sono espressi tutti con il segno di uguaglianza. Quindi:

$$\{\min \text{ o } \max \ z = c^T x : Ax = b\}$$

Per esempio: $\left\{\max z = x_1 + 3x_2 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$

Si consideri ora il seguente problema: $\left\{\min z = -x_1 - x_2 : \begin{array}{ll} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (g_1(x)) \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 & (g_2(x)) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$ → FORMA CANONICA

Si può rappresentare graficamente un tale problema. Quindi:



$\bar{X}$ prende il nome di REGIONE DI AMMISSIBILITÀ o REGIONE DELLE SOLUZIONI AMMISSIBILI.
Si noti che i punti $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (3, 3/2)$, $D(0,6)$ sono punti possibili di soluzioni ammissibili.

Per passare dalla forma canonica alla forma standard di un problema dato si può ragionare in questa maniera:

$a_i x_i \le b_i \longrightarrow a_i x_i + x_{i+1} = b_i$ dove x_{i+1} = VARIABILE DI SLACK

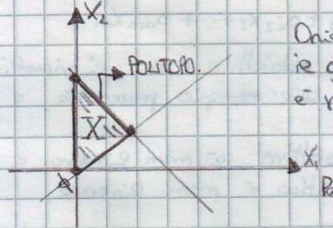
$a_i x_i \ge b_i \longrightarrow a_i x_i - x_{i+1} = b_i$ dove x_{i+1} = VARIABILE DI SURPLUS

$x_i \gtreqless 0 \longrightarrow x = x_i^+ - x_i^-$

Per esempio: $\left\{ \max\ z = x_1 + x_2 : \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \max\ z = x_1 + x_2 : \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array} \right\}$

FORMA CANONICA — FORMA STANDARD.

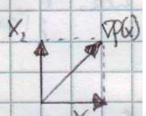
Un metodo per risolvere problemi di programmazione lineare è il METODO DEL SIMPLESSO. Tali problemi vengono posti prima di tutto in forma standard. L'obbiettivo è quello di trovare la soluzione ottima, che per il teorema fondamentale della programmazione lineare è un vertice del POLITOPO cioè del POLIEDRO limitato. Un poliedro è quella regione $\bar{X}$ limitata dai vincoli. Graficamente:



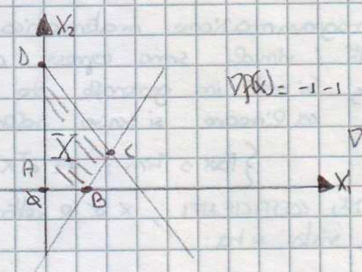
Orientativamente si può capire dove è la soluzione ottima guardando il gradiente della funzione obbiettivo. Il gradiente di una tale funzione è per definizione:

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}$$

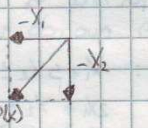
Per esempio: $f(x) = x_1 + x_2 \Rightarrow \nabla f(x) = 1 + 1$ e graficamente si ha:



Per l'esempio: $\left\{ \min\ z = -x_1 - x_2 : \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$



$\nabla f(x) = -1 - 1$



Si presume quindi che il punto D sia il minimo, per la $f(x)$.

Se l'insieme $\bar{X}$ delle soluzioni ammissibili del problema di programmazione:

$$\left\{ \min\ c^T x : x \in \bar{X} \right\}$$

è limitato allora esiste almeno un vertice di $\bar{X}$ che è ottimo. Riconsideriamo l'esempio: $\left\{ \min\ z = -x_1 - x_2 : \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$

Portiamolo in forma standard, e quindi:

$\left\{ \min\ z = -x_1 - x_2 : \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array} \right\}$ e quindi: $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quindi: $Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix}$ (con $\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}$) ‖ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix}$

NB: I è già una soluzione di base ammissibile iniziale.

Cerchiamo una collezione di m colonne di A linearmente indipendenti cioè cerchiamo una BASE di A. Per esempio:

$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = [A_1, A_2]$. Si noti infatti che: $\det B = -12 - 12 = -24 \ne 0 \Rightarrow A_1$ e A_2 linearmente indipendenti.

Quindi si ha una partizione di A in $A = [\overbrace{B}^{\text{base}} \mid \underbrace{N}_{\text{non base}}]$.

Analogamente:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix}$ e quindi $Ax = b$ si può scrivere come: $Bx_B + Nx_N = b$. Siccome $\det B \neq 0$ la matrice B è non singolare e quindi invertibile. Perciò:

$$Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \text{ e quindi:}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}(b - Nx_N) \\ \hline x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ \hline x_N \end{bmatrix}$$

. Poniamo $x_N = 0$ e otteniamo $x_B = B^{-1}b$ e viene detta SOLUZIONE BASE associata a B. Essa si dice AMMISSIBILE se $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

Per esempio: $B = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $N = [A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$x_B = B^{-1}b + B^{-1}Nx_N \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix} + B^{-1}Ix_N =$$

$$= B^{-1}\begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix} + B^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{con } B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}$$

NB: $\det B = -24$. Quindi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Concludendo si ha:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Praticamente le variabili in base dipendono dal valore delle variabili fuori base.

$$x = [3, 3/2, 0, 0]^T$$

In sostanza un punto $x \in X$ è un vertice del poliedro non vuoto se e solo se x è una soluzione di base ammissibile del sistema $Ax = b$. Per l'esempio precedente si ha:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [3, 3/2, 0, 0]^T \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3/2 \end{cases} \text{(punto C)}.$$

Quindi eseguendo queste operazioni per tutte le possibili colonne linearmente indipendenti di A, si ottengono tante soluzioni di base ammissibili quanti sono i vertici del poliedro. Si ricordi che la soluzione ottima coincide con una soluzione di base ammissibile. Ma come si verifica che la soluzione di base ammissibile appena trovata è ottima? Si usa il concetto di vettore dei costi ridotti. In particolare:

$$\{\min: c^Tx : Ax = b, x \geq 0\} \Rightarrow Ax = b \to Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Si ricordi inoltre che: $z = c^Tx = c^T\begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix} = [c_B^T \vdots c_N^T]\cdot\begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix} = [c_B^T \vdots c_N^T]\cdot\begin{bmatrix} B^{-1}(b - Nx_N) \\ \hline x_N \end{bmatrix} = [c_B^T \vdots c_N^T]\cdot\begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ \hline x_N \end{bmatrix}$

Quindi:

$$z = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^Tx_N = c_B^TB^{-1}b - c_B^TB^{-1}Nx_N + c_N^Tx_N = c_B^TB^{-1}b - x_N(c_B^TB^{-1}N + c_N^T) =$$

$$= \underline{cost + \bar{c}^Tx}$$

. Il vettore $\bar{c}^T$ prende il nome di VETTORE DEI COSTI RIDOTTI rispetto a B. Perciò $\bar{c}^T$ è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo quando è espressa dalle sole variabili fuori base. Quindi:

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^TB^{-1}A = [\underbrace{c_B^T - c_B^TB^{-1}B}_{= 0^T}, c_N^T - c_B^TB^{-1}N]$$

. Infatti: $\bar{c}_B^T = 0$ (costo ridotto delle variabili in base è nullo, per definizione).

Quindi sia B una base ammissibile. Se $\bar{c}^T \geq 0^T$ allora x_B è ottima.

Per l'esempio precedente: $\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases} \Rightarrow -x_1 - x_2 = -3 + \frac{1}{12}x_3 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{8}x_3 - \frac{1}{4}x_4 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{5}{24}x_3 - \frac{1}{12}x_4$

Quindi:

$c_B^T B^{-1} b = -\frac{9}{2}$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$

$\bar{c}_3 = \frac{5}{24}$, $\bar{c}_4 = -\frac{1}{12}$ e si nota che $\bar{c}_4 < 0$ e quindi la soluzione di base ammissibile non è ottima.

Per arrivare a tutti questi calcoli si usa il metodo del TABLEAU. Consideriamo:

$\{\min z = c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \Rightarrow$

$-z$	0	x^T c^T
	b	A

TABLEAU in forma iniziale.

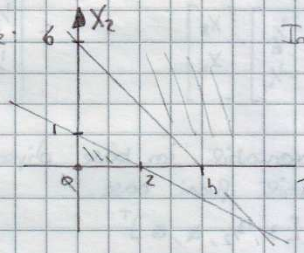
Vediamo un esempio:

$\{\max z = 2x_1 + 3x_2 : x_1 + 2x_2 \leq 2$
$6x_1 + 4x_2 \geq 24$
$x_1, x_2 \geq 0\}$

Innanzitutto ogni problema di programmazione matematica viene posto nella forma $\{\min f(x)$ con $x \in X\}$. In questo caso si può sfruttare la seguente trasformazione:

$\{\min f(x)$ con $x \in X\} \rightarrow \{\max -f(x)$ con $x \in X\}$ e quindi: $\{\min z = -2x_1 - 3x_2 : x_1 + 2x_2 \leq 2$
$6x_1 + 4x_2 \geq 24$
$x_1, x_2 \geq 0\}$

Graficamente:



In forma standard si ha:

$\{\min z = -2x_1 - 3x_2 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
$6x_1 + 4x_2 - x_4 = 24$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$

Tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	-2	-3	0	0
	2	1	2	1	0
	24	6	4	0	-1

Analizziamo ora come funziona il metodo del simplesso. Dobbiamo fare in modo che tutti i costi ridotti siano ≥ 0. Si analizzano gli elementi della colonna contenente il costo ridotto negativo, e si analizzano i relativi rapporti b_i / a_{ik} dove b_i è il h-esimo elemento del vettore dei termini noti, e a_{ik} è l'i-esimo elemento di A della colonna k-esima. Quindi:

	k
b_1	a_{1k}
b_2	a_{2k}
$\vdots$	$\vdots$
b_m	a_{mk}

Si sceglie come ELEMENTO DI PIVOT quell'elemento tale che $g = \frac{b_i}{a_{ik}}$ è minima. Fatto ciò dividiamo la riga contenente l'elemento di PIVOT per l'elemento stesso e otteniamo una nuova riga che chiamiamo per comodità β. Dopo di che si moltiplica ogni elemento della stessa colonna dell'elemento di PIVOT ma di righe differenti per β, ottenendo così nuove righe. Quindi si sottraggono dalle vecchie righe le nuove righe così ottenute. Perciò:

	$-z$	$-a$	b	c
α	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
β	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
γ	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Ipotesi: a_{11} sia l'elemento di Pivot.

α' =	$\frac{b_1}{a_{11}}$	$\frac{a_{11}}{a_{11}} = 1$	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{a_{11}}$
β'	..	..	..	..
γ'	..	..	..	..

con $\begin{cases} \beta' = \beta - a_{21}\alpha' \\ \gamma' = \gamma - a_{31}\alpha' \end{cases}$ Vediamo un esempio pratico:

$$\left\{ \min z = -X_1 - X_2 : \begin{array}{l} 6X_1 + 4X_2 + X_3 = 24 \\ 3X_1 - 2X_2 + X_4 = 6 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Tableau:

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	0	-1	-1	0	0
X_3	24	6	4	1	0
X_4	6	3	-2	0	1

PIVOT

Infatti:

$\vartheta_1 = \frac{24}{6} = 4$

$\vartheta_2 = 6/3 = 2 < \vartheta_1$

I → è già una soluzione di base ammissibile iniziale.

Si noti che X_3 e X_4 sono variabili in base.

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	2	0	$-\frac{5}{3}$	0	1
X_3	12	0	8	1	-2
X_1	2	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

→

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$
X_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$
X_1	3	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

→

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	6	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0
X_2	6	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0
X_4	18	6	0	$\frac{1}{2}$	1

TABLEAU OTTIMO.

Si noti però che partiamo con un tableau iniziale avente una soluzione di base ammissibile iniziale. Se siamo di fronte ad una situazione del seguente tipo:

$$\left\{ \min z = X_1 + X_3 : \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leq 5 \\ X_2 + 2X_3 = 6 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \min z = X_1 + X_3 : \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 + X_4 = 5 \\ X_2 + 2X_3 = 6 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

TABLEAU:

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	0	1	0	1	0
	5	1	2	0	1
	6	0	1	2	0

Non esiste una soluzione di base ammissibile iniziale. Quindi bisogna utilizzare VARIABILI ARTIFICIALI. Partendo da:

$\{\min c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ si definisce il problema artificiale

$$\left\{ \min w = \sum_{i=1}^{m} y_i : Ax + Iy = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

dove $y_1, \dots, y_m$ sono le variabili artificiali.
Quindi:

$$A: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

→ FORMA MATRICIALE.

Per l'esempio precedente si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 + 2X_2 + X_4 \\ X_2 + 2X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

, sommandogli però le variabili artificiali si ottiene:

$$\begin{bmatrix} X_1 + 2X_2 + X_4 \\ X_2 + 2X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Concludendo:

$$\begin{bmatrix} X_1 + 2X_2 + X_4 \\ X_2 + 2X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 + 2X_2 + X_4 + y_1 \\ X_2 + 2X_3 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

NB: ci servono tante variabili artificiali quante ne occorrono. In questo caso si poteva mettere una sola variabile artificiale.

Quindi:

			X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
(γ)	$-\omega$	0	0	0	0	0	1	1
(α)		5	1	2	0	1	1	0
(β)		6	0	1	2	0	0	1

→ Poniamo la funzione obbiettivo in forma canonica:

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
$-\omega$	-11	-1	-3	-2	-1	0	0
Y_1	5	1	2	0	1	1	0
Y_2	6	0	1	2	0	0	1

→ Pivot

In breve ho sommato le righe α e β e poi ho sottratto $\alpha+\beta$ da (γ). A questo punto applico il simplesso:

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
$-\omega$	-6	0	-1	-2	0	1	0
X_1	5	1	2	0	1	1	0
Y_2	6	0	1	2	0	0	1

NB: In generale scelgo il costo ridotto minimo (nel mio caso (-1) di X_1).

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
$-\omega$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
X_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Y_2	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

		X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
$-\omega$	0	0	0	0	0	1	1
X_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
X_3	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

In questo caso abbiamo ottenuto $\omega^*=0$. Quindi è possibile eliminare y_1 e y_2 tornando al tableau originale. Quindi:

		X_1	X_2	X_3	X_4
z	0	1	0	1	0
X_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
X_3	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$

La z ora non è in forma canonica in quanto dipende da X_3 che è una variabile di base. Quindi:

		X_1	X_2	X_3	X_4
$-z$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
X_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
X_3	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$

che è già il tableau ottimo. Quindi: $(0, \frac{7}{4}) \rightarrow$ ottimo!!

NB: Usando questo procedimento si può anche giungere a $\omega^*>0$ il che ci dice che il problema originario è impossibile.

Passiamo ora al problema duale. Consideriamo: $\{\min c^T x : Ax=b,\ x\geq 0\}$ → PROBLEMA PRIMALE. Il PROBLEMA DUALE è il seguente:

$\{\max u^T b : c^T \geq u^T A\}$ e più precisamente: $u^T = [u_1, u_2, \dots, u_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ per la funzione obbiettivo.

Per i vincoli: $c^T \geq u^T A \Rightarrow c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n] \geq [u_1, u_2, \dots, u_m] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Per la trasformazione primale-duale si ricordi che:

PRIMALE (P) ⟶ DUALE (D)

PRIMALE (P)	DUALE (D)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} \min z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 : & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ \text{PRIMALE (P)} & x_1 - x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \text{ libera} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max w = u_1 + 2u_2 + 3u_3 : & 2u_1 + u_3 \leq 10 \\ & -u_1 + u_2 \geq 20 \\ & u_2 - u_3 = 30 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \leq 0 \\ & u_3 \text{ libera} \end{cases}$$

NB: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u^T A = [u_1, u_2, u_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_3 \\ -u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$

Ma anche:

$$A^T u = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_3 \\ -u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

Quindi $\underline{u^T A = A^T u}$

A questo punto vediamo le proprietà fondamentali del problema duale. Innanzitutto il duale del problema duale coincide con il problema primale. Inoltre sia:

$\bar{X} = \{x \geq 0 : Ax \geq b\} \neq \Phi$ e $\min\{c^T x : x \in \bar{X}\}$ finito, si ha: $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\} = \{\max u^T b, c^T \geq u^T A, u^T \geq 0\}$

In breve la soluzione ottima del problema primale è uguale alla soluzione ottima del problema duale. Questo teorema va sotto il nome di TEOREMA DELLA DUALITÀ FORTE. Si noti però che un tale teorema non si può applicare quando il problema primale è illimitato o impossibile. Inoltre se:

$\bar{X} = \{x \geq 0 : Ax \geq b\} \neq \Phi$ e $D = \{u \geq 0, c^T \geq u^T A\} \neq \Phi$, $\forall \bar{x} \in \bar{X}$ e $\bar{u} \in D \Rightarrow \underline{\bar{u}^T b \leq c^T \bar{x}}$

Questo teorema va sotto il nome di TEOREMA DELLA DUALITÀ DEBOLE. Infatti:

$\forall \bar{x} \in \bar{X}, \forall \bar{u} \in D \Rightarrow A\bar{x} \geq b$ e $\bar{u}^T A \leq c^T$ e quindi: $\underline{\bar{u}^T b \leq \bar{u}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x}} \Rightarrow \bar{u}^T b \leq c^T \bar{x}$

Si ricordi però che può succedere che entrambi i problemi hanno un ottimo finito, oppure il problema primale è illimitato e quindi il duale è impossibile, oppure ancora il problema primale è impossibile perché il duale è illimitato. Ma può accadere che entrambi i problemi sono impossibili. Ricompattiamo quanto visto nelle così dette CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ:

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq b, \ \bar{x} \geq 0 & \text{AMMISSIBILITÀ PRIMALE} \\ c^T \geq \bar{u}^T A, \ \bar{u}^T \geq 0 & \text{AMMISSIBILITÀ DUALE} \\ c^T \bar{x} = \bar{u}^T b & (\min = \max) \end{cases}$$

Matricialmente: $c^T = [c_1\ c_2 \dots c_m]$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{bmatrix}$ $\quad \bar{u} = [u_1\ u_2 \dots u_m]$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Quindi: $c^T \bar{x} = [c_1\ c_2 \dots c_m] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{bmatrix}$

$\bar{u}^T b = [u_1\ u_2 \dots u_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $\Rightarrow c^T \bar{x} = \bar{u}^T b \Rightarrow [c_1\ c_2 \dots c_m] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{bmatrix} = [u_1\ u_2 \dots u_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$