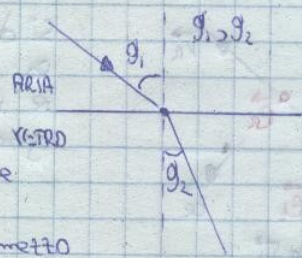


Chiamiamo $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ **indice di rifrazione relativo** del secondo mezzo rispetto al primo. La precedente relazione è nota come **legge di Snell**.

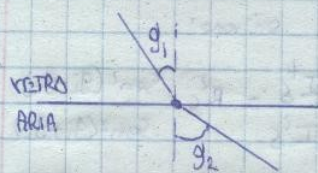
Quando incide un'onda luminosa piana si propaga da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un mezzo con indice di rifrazione $n_2 > n_1$ si ha:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 < \theta_1 \text{ se } n_2 > n_1$$

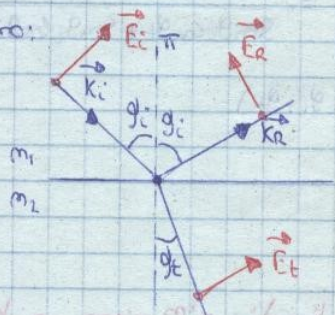


Nei casi opposti, quando la superficie di separazione ha direzione di propagazione dell'onda piana, l'angolo di rifrazione è maggiore dell'angolo di incidenza. Nel caso in cui l'onda passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un mezzo con indice $n_2 < n_1$ si ha:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 > \theta_1 \text{ se } n_2 < n_1$$



Consideriamo:



Π = PIANO DI INCIDENZA

Abbiamo visto che $\theta_i = \theta_r$. Possiamo anche scrivere:

$$R_{\Pi} = \frac{E_{r,\Pi}}{E_{i,\Pi}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\Pi} = \frac{E_{t,\Pi}}{E_{i,\Pi}} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

Le precedenti formule prendono il nome di **formule di Fresnel nel piano Π** . Quindi:

$$I_{\Pi}^i = \frac{n_1}{2Z_0} (E_{i,\Pi}^i)^2$$

$$I_{\Pi}^r = \frac{n_1}{2Z_0} (E_{r,\Pi}^r)^2 \Rightarrow W_{\Pi}^i = Z_i I_{\Pi}^i, W_{\Pi}^r = Z_r I_{\Pi}^r, W_{\Pi}^t = Z_t I_{\Pi}^t$$

$$I_{\Pi}^t = \frac{n_2}{2Z_0} (E_{t,\Pi}^t)^2$$

coefficiente di riflessione nel piano Π

$$R_{\Pi} = \frac{W_{\Pi}^r}{W_{\Pi}^i} = R_{\Pi}^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Analogamente:

$$\frac{W_{\Pi}^t}{W_{\Pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{E_{t,\Pi}^t}{E_{i,\Pi}^i} \right)^2 = \frac{Z_t I_{\Pi}^t}{Z_i I_{\Pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\Pi}^2$$

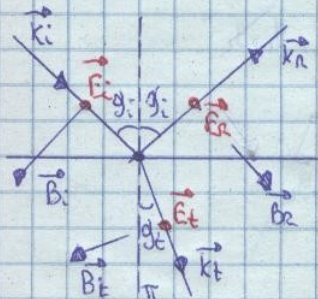
coefficiente di trasmissione nel piano Π

$$T_{\Pi} = \frac{W_{\Pi}^t}{W_{\Pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\Pi}^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)}$$

Si noti in particolare che: $R_{\Pi} + T_{\Pi} = 1 \rightarrow$ per la conservazione dell'energia.

(73)

Supponiamo ora che il campo elettrico incidente sia polarizzato rettilineamente e ortogonalmente al piano di incidenza π .



Si dimostra che i campi elettrici riflessi e rifratti mantengono la polarizzazione del campo elettrico incidente. Indicando con δ il fatto che il campo elettrico è parallelo od un piano δ ortogonale al piano di incidenza π , si ha:

$$R_{\delta} = \frac{E_{r,\delta}}{E_{i,\delta}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = - \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t - \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$R_{\delta} = \frac{V_{r,\delta}}{V_{i,\delta}} = \frac{I_{r,\delta}}{I_{i,\delta}} = R_{\delta}^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \quad t_{\delta} = \frac{E_{t,\delta}}{E_{i,\delta}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\bar{T}_{\delta} = \frac{V_{t,\delta}}{V_{i,\delta}} = \frac{Z_t I_{t,\delta}}{Z_i I_{i,\delta}} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\delta}^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

I precedenti coefficienti inseriti prendono il nome di **coefficienti di riflessione e trasmissione nel piano δ** . Si noti che:

$$\bar{R}_{\delta} + \bar{T}_{\delta} = 1 \Rightarrow R_{\delta}^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\delta}^2 = 1$$

Quando l'angolo di incidenza è nullo, la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde di significato. Quindi i campi elettrici dell'onda incidente, riflessa e trasmessa sono paralleli tra loro. Quindi:

$$E_i = E_i + E_r = E_t = E_t$$

Inoltre:

$$I_i = I_r + I_t \Rightarrow n_1 E_i^2 = n_1 E_r^2 + n_2 E_t^2$$

$$\downarrow$$

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i, \quad E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i$$

Quindi le formule di Fresnel diventano:

$$R = E_r/E_i = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = E_t/E_i = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Quindi:

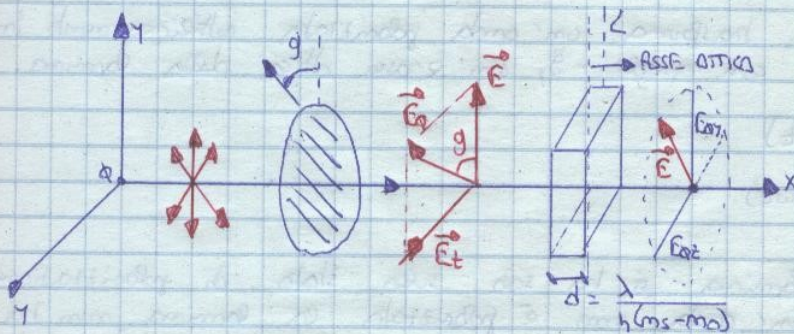
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = V_r/V_i = I_r/I_i = R^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ \bar{T} = V_t/V_i = I_t/I_i = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{array} \right.$$

In generale possiamo scrivere:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = R_{\pi} \frac{I_{\pi}^i}{I_i} + R_{\sigma} \frac{I_{\sigma}^i}{I_i}$$

$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{\cos \theta_t I_t}{\cos \theta_i I_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(t_{\pi}^2 \frac{I_{\pi}^i}{I_i} + t_{\sigma}^2 \frac{I_{\sigma}^i}{I_i} \right) = \tau_{\pi} \frac{I_{\pi}^i}{I_i} + \tau_{\sigma} \frac{I_{\sigma}^i}{I_i}$$

Consideriamo ora una lamina L di cristallo anisotropizzato dagli indici di rifrazione n_{σ} e n_{π} , tagliata con la superficie parallela all'asse ottico.



Un'onda piana elettromagnetica polarizzata rettilineamente, si propaga lungo l'asse x e incide normale sulla lamina. Abbiamo:

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx - \omega t)$$

$$E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx - \omega t)$$

$\begin{cases} \text{str} = \text{straordinaria} \\ \text{ord} = \text{ordinaria} \end{cases}$

$$E_{\text{str}} = E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + k_{\sigma}d - \omega t)$$

$$E_{\text{ord}} = E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx + k_{\sigma}d - \omega t)$$

Siccome: $\begin{cases} k_{\sigma} = m k \\ k_o = m k \end{cases}$ la componente straordinaria e ordinaria dell'onda uscente sono sfasate. Quindi:

$$\Delta \phi = \phi_{\sigma} - \phi_o = (k_{\sigma} - k_o)d = k(n_{\sigma} - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{\sigma} - n_o)d$$

Si noti che l'onda straordinaria è in anticipo su quella ordinaria nei cristalli positivi, in ritardo in quelli negativi. Quindi:

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + k_{\sigma}d - \omega t)$$

$$E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx + k_{\sigma}d - \omega t - \Delta \phi)$$

L'onda emergente dalla lamina in genere è polarizzata ellitticamente, se l'onda entrante è polarizzata rettilineamente. Supponiamo ora che lo sfasamento $\Delta \phi$ introdotto dalla lamina sia un multiplo intero dispari di $\pi/2$. Abbiamo:

$$\Delta \phi = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{2(n_{\sigma} - n_o)} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

Si ha:

(20)

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + ksd - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin \theta \sin(kx + ksd - \omega t)$$

L'onda è polarizzata elettricamente con gli assi delle onde paralleli a y e z . Queste componenti vengono dette **quanta d'onda** e trasformano un'onda piana polarizzata rettilineamente in una polarizzata elettricamente in generale e in una polarizzata circolarmente quando l'angolo tra $\vec{E}$ e l'asse ottico è $\theta = \pi/4$. Consideriamo adesso uno spostamento multiplo di π :

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$

$$d = \frac{\lambda}{2(m_s - m_n)} (2m+1) \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

La lamina si chiama **mezz'onda**. Essa trasforma un'onda polarizzata rettilineamente in un'onda polarizzata rettilineamente con angolo $-\theta$, con l'asse ottico della lamina. Quindi:

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + ksd - \omega t)$$

$$E_z = -E_0 \sin \theta \sin(kx + ksd - \omega t)$$

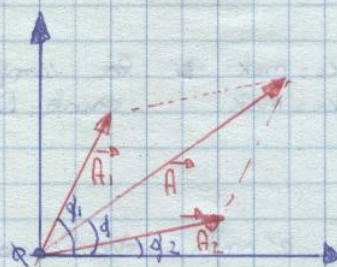
Si ricordi infine che l'effetto della lamina si ha solo sulla stato di polarizzazione di un'onda piana polarizzata. Se un'onda non è polarizzata la lamina non ha nessun effetto. Quando la differenza di fase tra due onde in un qualsiasi punto è costante nel tempo le sorgenti delle due onde si dicono **coerenti**. Quando invece questa condizione non si verifica le sorgenti sono **incoerenti**. Chiamiamo **interferenza** quel fenomeno che si ha quando si sovrappongono due onde emesse da due o più sorgenti coerenti. Supponiamo di avere delle onde che si propagano entrambe lungo l'asse x , che vibrino lungo la stessa direzione e che le punti P disti x_1 dalla sorgente delle onde e x_2 dalla seconda sorgente delle onde. Abbiamo:

$$f_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + q_1)$$

$$f_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + q_2)$$

$$f = f_1 + f_2 = A \cos(\omega t + q)$$

$$\text{con: } \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta} \\ \delta = q_1 - q_2 = \phi_1 - \phi_2 + k(x_2 - x_1) \end{cases}$$



L'intensità d'onda misurata nel punto P è:

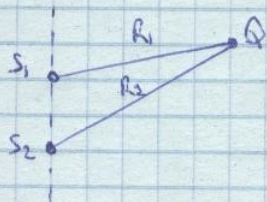
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

$$\text{Nel caso in cui } A_1 = A_2 = A_0 \Rightarrow I = 2I_0 (1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \delta/2$$

L'ampiezza della somma dipende dalla differenza di fase. Il valore massimo della somma si ha quando le onde sono in fase e il minimo si ha quando le onde sono in opposizione di fase. Si ricordi inoltre che l'interferenza è un fenomeno

stazionario nel senso che è funzione della posizione del punto ma non del tempo. Consideriamo ora due sorgenti coerenti S_1 e S_2 di onde armoniche sferiche:

(81)

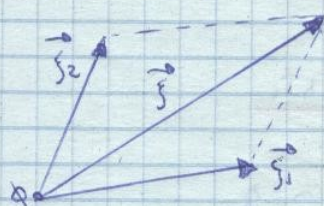


Queste hanno la stessa pulsazione ω e si propagano in un mezzo indefinito isotropo con velocità v . Quindi:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega} \\ k = \omega/v = 2\pi/\lambda \end{cases}$$

Si ha:
$$\begin{cases} f_1 = f_{01} \cos(kR_1 - \omega t) = \frac{f_0}{R_1} \cos(kR_1 - \omega t) \\ f_2 = f_{02} \cos(kR_2 - \omega t) = \frac{f_0}{R_2} \cos(kR_2 - \omega t) \end{cases}$$

L'ampiezza delle onde risultante nel punto Q è:



$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2 \cos \delta}$$

e la differenza costante di fase è:

$$\delta = k(R_2 - R_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (R_2 - R_1)$$

L'intensità nel punto Q è:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} (R_2 - R_1)\right)$$

con:
$$\begin{cases} I_1 = P / 4\pi R_1^2 \\ I_2 = P / 4\pi R_2^2 \end{cases}$$

L'interferenza è **costruttiva** nei punti in cui le onde sono in fase. Ciò si verifica quando:

$$\delta = 2m\pi, \quad \Delta R = R_2 - R_1 = m \quad \text{e} \quad \lambda m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In questo caso l'intensità assume il valore massimo:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

L'interferenza si dice **distrostruttiva** nei punti in cui le onde sono in opposizione di fase e ciò comporta che:

$$\delta = (2m' + 1)\pi, \quad \Delta R = R_2 - R_1 = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{e} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Il valore minimo dell'intensità è:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Si noti che le superfici di massima intensità $R_2 - R_1 = m\lambda$ si dicono **ventrali**, mentre quelle di

32)

minima intensità $R_2 - R_1 = (2m' + 1) \lambda / 2$ raggio delle **macchie**. Supponiamo ora che la distanza tra le due sorgenti sia d e il punto Q si trovi a distanza R dal punto medio tra S_1 e S_2 , molto maggiore di d . Abbiamo:

$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow R_2 - R_1 = d \sin \theta, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Quindi:

$$I_Q = \sqrt{2 I_0^2 (1 + \cos \delta)} = 2 I_0 \cos \frac{\delta}{2} = 2 I_0 \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

↓

$$I(R, \theta) = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}, \quad I_0 = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Le condizioni di massima e minima intensità diventano:

$$\text{MAX: } \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \underline{I_{\max} = I_0}$$

$$\text{MIN: } \sin \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2d} \quad \text{con } m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \underline{I_{\min} = 0}$$

Si noti che nel caso di sorgenti incoerenti, cioè se la differenza di fase intrinseca varia casualmente nel tempo, il fenomeno studiato è molto diverso. Nel caso di sorgenti incoerenti non c'è più interferenza. La coerenza inoltre opera una ridistribuzione della potenza complessiva:

$$\underline{P_R = 2P}$$

che viene chiaramente concentrata in certe direzioni e non è nulla in altre. I risultati visti si estendono naturalmente a un numero qualsiasi di sorgenti o due a due incoerenti per cui:

$$\underline{I_e = \sum_{i=1}^n I_i} \quad \text{e} \quad \underline{I_R = N I_1}$$

Vediamo allora le onde luminose. Qui l'onda emessa da una sorgente ordinaria è la risultante dei pacchetti d'onda emessi dai singoli atomi. Le rispettive fasi sono distribuite in maniera casuale. L'onda quindi non è polarizzata. Quindi sia le onde provenienti da due punti di una sorgente estesa che le onde provenienti da due sorgenti diverse risulteranno essere incoerenti e non danno luogo a fenomeni di interferenza. La differenza di fase dovuta ad una differenza di cammino geometrico è:

$$\delta = k_2 R_2 - k_1 R_1$$

$$\text{Rispetto al vato si ha: } \underline{\delta = k_0 (m_2 R_2 - m_1 R_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (m_2 R_2 - m_1 R_1)}$$

Il prodotto nel primo è nome di **cammino ottico**. Nel vato si ha $m_1 = m_2 = 1$.

Consideriamo ora N sorgenti di onde sferiche e coerenti disposte su una retta, e equispaziate di una distanza d .



Tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Consideriamo l'ampiezza risultante f_R , ricordando che:

$$f_1 = 2P \sin \frac{\delta}{2} \quad \text{dove } P = \text{raggio.}$$

$$\text{Quindi: } f_R = 2P \sin \frac{N\delta}{2} \Rightarrow f_R = f_1 \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

Perciò l'intensità d'onda risultante nel punto Q è proporzionale al quadrato di f_R .

$$I_R(\theta) = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N \cdot 2\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

Si può facilmente notare che l'intensità I_R presenta max. intensità $\theta \leq \theta \leq \pi/2$ un certo numero di massimi principali con:

$$\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d \sin \theta = m\lambda \Rightarrow \sin \theta = m\lambda/d \quad \text{con } m=0,1,2,\dots$$

$$I_{\max} = N^2 I_1 \quad \text{e} \quad f_{\max} = N f_1$$

Per quanto riguarda i minimi si ha:

$$\frac{N \cdot 2\pi d \sin \theta}{\lambda} = m'\pi \Rightarrow d \sin \theta = m' \frac{\lambda}{N}, \quad \sin \theta = \frac{m' \lambda}{Nd}$$

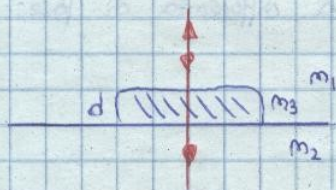
Si noti che la posizione dei massimi principali in cui si concentra la maggior parte della potenza emessa è determinata dal rapporto λ/d e non dipende dal numero di sorgenti. L'intensità dei massimi principali dipende dal numero delle sorgenti. Quindi l'interferenza ha due onde prodotta da sorgenti coerenti opera una ridistribuzione dell'energia che viene sommato concentrata nelle regioni corrispondenti ai massimi principali. Inoltre che le sorgenti siano o meno coerenti la potenza è sempre $N \cdot P$. Consideriamo ora il caso di lamina sottile trasparente con un indice di rifrazione n_2 immersa in un mezzo con indice di rifrazione n_1 . Si ha:

(8b)

$$\delta = 2m\pi, \quad d = (2m-1) \frac{\lambda_0}{2m_2} \quad \text{con } m=1, 2, \dots \rightarrow \text{INTERFERENZA COSTRUTTIVA}$$

$$\delta = (2m+1)\pi, \quad d = m' \frac{\lambda_0}{2m_2} \quad \text{con } m' = 0, \pm 1, \dots \rightarrow \text{INTERFERENZA DISTRUTTIVA}$$

Supponiamo invece che la superficie superiore di una lastra di vetro (m_2) sia immersa nell'aria (m_1) e ricoperta da una sottile pellicola trasparente spesso d , il cui indice di rifrazione è m_3 .



$$\text{Sia: } m_1 < m_3 < m_2$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} \\ R_2 = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} \end{cases}$$

Quindi:

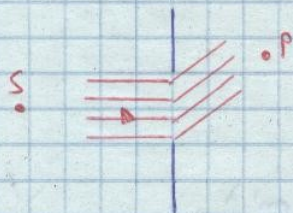
$$\begin{aligned} R^2 &= R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos \frac{4\pi m_3 d}{\lambda_0} = \\ &= \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + 2\sqrt{\bar{R}_1\bar{R}_2} \cos \frac{4\pi m_3 d}{\lambda_0} \end{aligned}$$

L'interferenza è costruttiva se: $\frac{4\pi m_3 d}{\lambda_0} = 2m\pi$, $d = m \frac{\lambda_0}{2m_3}$ e $m=1, 2, \dots$

Viceversa l'interferenza è distruttiva se:

$$\frac{4\pi m_3 d}{\lambda_0} = (2m'+1)\pi, \quad d = (2m'+1) \frac{\lambda_0}{4m_3}, \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Passiamo ora alla **diffrazione**. La diffrazione è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo. Gli effetti della diffrazione sono tanto più vistosi quanto grande è l'ostacolo rispetto alla lunghezza d'onda. Consideriamo la seguente diffrazione:



DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER

Sia $a = AB$ la larghezza del foro rettangolare, e sia $L \gg a$ la sua lunghezza.

Supponiamo che sulla fenditura incida un'onda piana di lunghezza λ . Sottobis, diciamo la stessa in N strisce parallele di larghezza Δy . Ciascuna striscia produce da sorgente di onde secondarie e contribuisce con l'ampiezza ΔE al campo elettrico risultante E . I contributi ΔE relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto P la differenza di fase:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

Per il calcolo di E si procede come nel caso di N sorgenti e otteniamo così:

$$d = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$