

Chiamiamo **onde cilindriche** quelle onde che passano per punti d'onda che sono superfici cilindriche. Se poniamo su un asse tante sorgenti che oscillano alla stessa fase si ottiene un'onda di questo tipo. Prendi una superficie cilindrica I con $Z = 2\pi R h$, la potenza media che la attraversa è:

$$P_m = I(R)I = \langle A^2(R) \rangle 2\pi R h$$

Questa quantità che è intensità sia inversamente proporzionale a R e è proporzionale a $\sqrt{R}$. Quindi la funzione è:

$$f(R,t) = \frac{f_0}{\sqrt{R}} \sin(kR - \omega t)$$

e

$$I = \frac{I_0}{R}$$

Poniamo ora delle **onde elettromagnetiche**. Esse sono delle onde che godono di alcune proprietà tra cui quella di propagarsi nel vuoto, e di essere prodotte da cariche in moto con accelerazione molto grande. Consideriamo ora un mezzo ^{non} infinito e omogeneo di costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ , nel quale ci sono cariche libere e correnti di conduzione. Quindi:

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$

In queste condizioni le equazioni di Maxwell sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Supponendo che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Analogamente:

70

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\(\vec{\nabla} \times \vec{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} & \text{derivata rispetto a } x & \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} & \text{derivata rispetto a } x & \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Anche per l'altra coppia di equazioni si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Ogni componente di $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ soddisfa la seguente equazione differenziale delle onde piane:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Quindi i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano lungo l'asse x sotto forma di onde piane con velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_e k_m}} = \frac{c}{\sqrt{k_e k_m}} \quad \text{con } k_e = k_m = 1$$

Casi: Possiamo ipotizzare che B_0 e E_0 ora sono un'onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico. Vediamo ora la propagazione lungo l'asse x dei componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Si ha:

$$E_y = E_y(x-rt), \quad E_z = E_z(x-rt), \quad B_y = B_y(x-rt), \quad B_z = B_z(x-rt)$$

In forma vettoriale si ha:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_y(x-rt) \vec{u}_y + E_z(x-rt) \vec{u}_z \\ \vec{B} &= B_y(x-rt) \vec{u}_y + B_z(x-rt) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Poiché $u = x - vt$ si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}$$



$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v} \int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + \text{cost}$$

In definitiva:

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt) \quad \text{e} \quad B_z(x-vt) = \frac{1}{v} E_y(x-vt)$$

Quindi le componenti del campo B risultano dipendenti da quelle del campo $\vec{E}$. Possiamo perciò scrivere:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_y(x-vt) \vec{u}_y + E_z(x-vt) \vec{u}_z \\ v\vec{B} = -E_z(x-vt) \vec{u}_y + E_y(x-vt) \vec{u}_z \end{cases}$$

Cioè:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2} (E_y^2 + E_z^2) = \frac{E^2}{v^2} \Rightarrow \underline{B = \frac{E}{v}}$$

Dal prodotto scalare si ha:

$$\underline{\vec{E} \cdot \vec{B} = 0}$$

e quindi i due vettori sono sempre perpendicolari tra loro. Dal prodotto vettoriale si ha:

$$\underline{\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v} \vec{u}_x = v B^2 \vec{u}_x = E B \vec{u}_x}$$

Quindi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano con la stessa velocità v , che nel vuoto vale:

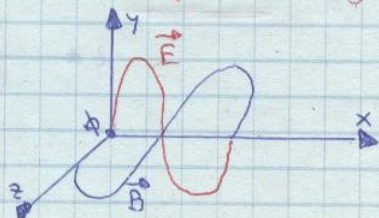
$$\underline{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

I moduli dei campi sono legati tra loro dalla relazione:

$$\underline{B = \frac{E}{c}}$$

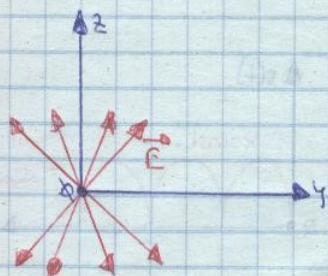
e nel vuoto: $B = E/c$. $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro e compaiono onde trasversali.

Per queste onde è significativo il concetto di polarizzazione. Nella teoria di Maxwell si ha quindi il concetto di **campo elettromagnetico**. Graficamente si ha:



Hanno gli stessi massimi e minimi.

Se ora la differenza di fase δ varia in maniera casuale, non si può stabilire una precisa legge di variazione per la direzione di $\vec{E}$. Quindi l'onda risulta non polarizzata. Una luce emessa dal sole o da una lampadina è un'onda elettromagnetica non polarizzata.



La presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ in una regione di spazio comporta una distribuzione di energia con densità u . In un mezzo omogeneo abbiamo:

$$\begin{cases} u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \\ u_m = \frac{B^2}{2\mu} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$$

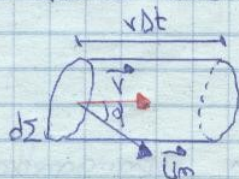
Per un'onda elettromagnetica piana si ha:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_e$$

$$\Downarrow$$

$$u = 2u_e = \epsilon E^2$$

Quindi l'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà al campo magnetico. Quanto detto vale anche per onde non piane. Consideriamo ora:



$$dU = u dV = u dS \cos \theta v dt = \epsilon E^2 v \cos \theta dS dt$$

$$\Downarrow$$

$$dP = \epsilon E^2 v \cos \theta dS$$

Definiamo il vettore $\vec{S}$ così: $\vec{S} = \epsilon E^2 \vec{v}$

Questo vettore ha la proprietà che il suo flusso attraverso la superficie dS , fornisce la potenza istantanea attraverso dS :

$$dP = \vec{S} \cdot \vec{u}_m dS = \epsilon E^2 v \cos \theta dS = \epsilon E^2 v dS_{\parallel} = S dS_{\parallel} \quad \text{con } dS_{\parallel} = dS \cos \theta$$

Quindi si può anche scrivere: $\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow dP = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_m dS$

$$\Downarrow$$

$$P = \int_V \vec{S} \cdot \vec{u}_m dS = \int_V \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_m dS$$

Il vettore $\vec{S}$ prende anche il nome di **vettore di Poynting**. Si noti che esso ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie antiparallela alla direzione di propagazione. Appliciamo quanto visto ad un'onda piana polarizzata rettilineamente. Quindi:

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow S = \epsilon E^2 v = \epsilon v E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Per è importante più calcolare il flusso medio di questo istantaneo in quanto la pulsazione delle onde elettromagnetiche è elevata. Quindi:

$$S_m = \epsilon v (E^2)_m = \epsilon v \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2$$

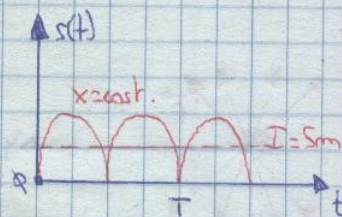
7h)

Quindi in conclusione l'intensità trasportata da un'onda elettromagnetica piana, armonica, polarizzata rettilineamente vale:

$$I = S_m = \epsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \epsilon v E_{eff}^2$$

Posiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} I_y = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0y}^2 \\ I_z = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0z}^2 \end{cases} \Rightarrow I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \epsilon v (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$$



Tale intensità totale è indipendente dallo spostamento e dallo stato di polarizzazione. Ricordando che:

$$\epsilon v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \epsilon = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{z} = \frac{m}{2\pi} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{m}{2\pi} E_0^2 = \frac{m}{2\pi} E_{eff}^2$$

Consideriamo ora:



Chiamiamo **pressione di radiazione** quella pressione media che viene esercitata dall'onda sulla superficie Z :

$$Prod = \frac{I}{Z}$$

Sì mai che, come vedremo, esistono due casi limite:

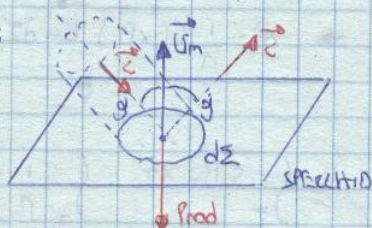
- 1) **assorbimento** → quando la superficie assorbe tutta l'energia elettromagnetica incidente.
- 2) **perfetta riflessione** → quando la superficie non assorbe energia.

In quest'ultimo caso si ha:

$$Prod = \frac{2I}{Z}$$

NB: $< z$ la velocità della luce.

Vediamo ora il seguente caso:



ASSORBIMENTO COMPLETO $Prod = \frac{I}{Z} \cos^2 \theta$

RIFLESSIONE COMPLETA $Prod = \frac{2I}{Z} \cos^2 \theta$

Riprendiamo ora in considerazione l'onda piana armonica che si propaga in qualunque direzione:

FRONTE D'ONDA PIANO

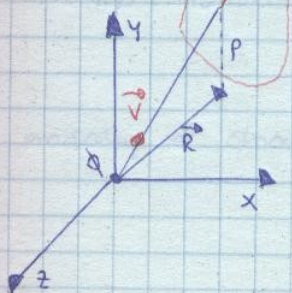
$$E = E_0 \sin(\vec{k}R - \omega t)$$

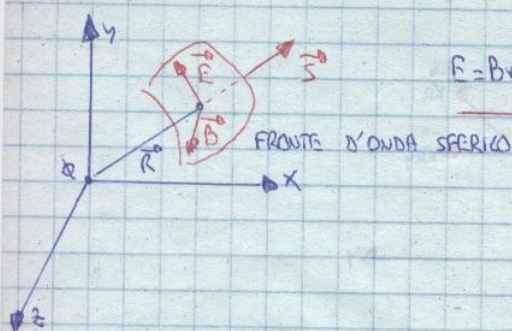
COORDINATE CARTESIANE.

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad \text{con } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

In un mezzo indefinito omogeneo e isotropo si ha:

$$E = \frac{E_0}{R} \sin(kR - \omega t) \quad (\text{ONDE SFERICHE})$$





$$E = Br, \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v} \vec{S}$$

Il vettore di Poynting si può scrivere:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

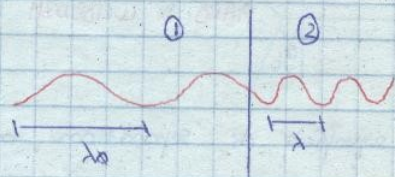
Intensità e intensità di un'onda sferica si può scrivere così:

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 v \frac{E_0^2}{R^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{E_0^2}{R^2}$$

Per un'onda cilindrica si ha:

$$E = \frac{E_0}{R} \sin(kR - \omega t), \quad I = \frac{1}{2} \epsilon_0 v \frac{E_0^2}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{E_0^2}{R}$$

Parliamo ora della riflessione e della rifrazione delle onde. Quando un'onda attraversa una superficie di separazione tra due mezzi la sua velocità di propagazione cambia. Supponiamo di avere:



Si noti che nell'attraversamento della superficie non variano né la frequenza né la frequenza, ma variano λ e k .

SUPERFICIE DI SEPARAZIONE

In particolare si ha:

$$\omega = 2\pi f, \quad \lambda_1 f = v_1 \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{e} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

Si ricordi che: $f = \frac{1}{T}$

Si noti che se $v_1 > v_2$ si ha che $\lambda_1 > \lambda_2$, e per un'onda elettromagnetica passa da aria al vuoto od un mezzo trasparente si ha:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n$$

$$\text{con } v_1 = c = c \\ v_2 = \frac{c}{n}$$

Chiamiamo n **indice di rifrazione del mezzo**. Se mai si ha che la lunghezza d'onda in un mezzo è sempre minore di quella nel vuoto. Consideriamo ora:

$$f_i = f_0 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{R} - \omega t) \rightarrow \text{onda incidente}$$

$$f_r = f_0 \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{R} - \omega t) \rightarrow \text{onda riflessa}$$

$$f_t = f_0 \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{R} - \omega t) \rightarrow \text{onda rifratta}$$

Sulla superficie di separazione e per tutte le onde devono essere uguali e quindi:

76

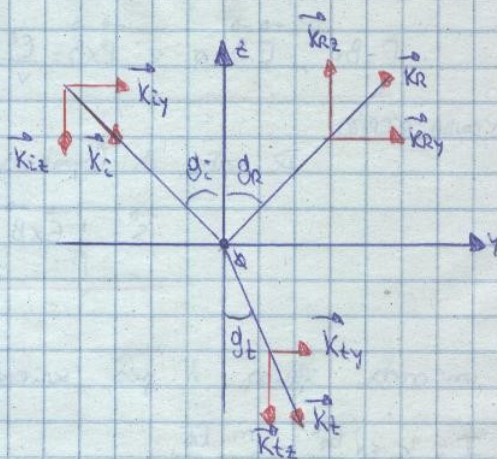
$$\vec{k}_i \cdot \vec{R} = \vec{k}_r \cdot \vec{R} = \vec{k}_t \cdot \vec{R}$$

Chiamiamo:

θ_i = angolo di incidenza

θ_r = angolo di riflessione

θ_t = angolo di rifrazione



Possiamo scrivere:

$$\vec{R} = x\vec{U}_x + y\vec{U}_y$$

$$\vec{k}_i = k_{iy}\vec{U}_y + k_{iz}\vec{U}_z$$

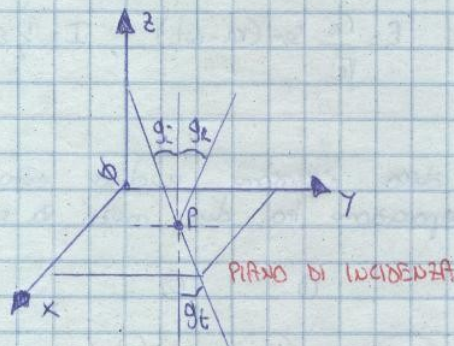
$$\vec{k}_r = k_{rx}\vec{U}_x + k_{ry}\vec{U}_y + k_{rz}\vec{U}_z, \vec{k}_t = k_{tx}\vec{U}_x + k_{ty}\vec{U}_y + k_{tz}\vec{U}_z \Rightarrow k_{iy} = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y$$

Quindi per qualsiasi punto P del piano si ha:

$$\begin{cases} k_{rx} = k_{tx} = 0 \\ k_{ry} = k_{ty} = k_{iy} \end{cases}$$

Enunciamo la prima legge della riflessione e rifrazione:

- Le direzioni di propagazione delle onde incidente, delle onde riflesse e delle onde rifratte giacciono nel piano di incidenza individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza. Osserviamo che:



$$k_{iy} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_i, k_{ry} = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_r, k_{ty} = \frac{\omega}{v_2} \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r, \frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_t$$

In definitiva si ha:

$$\theta_i = \theta_r \rightarrow \text{RIFLESSIONE}$$

Quindi:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Quindi: • SECONDA LEGGE DELLA RIFLESSIONE E RIFRAZIONE: L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza

- TERZA LEGGE DELLA RIFLESSIONE E RIFRAZIONE: Il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è uguale al rapporto tra le velocità di propagazione.

Per un'onda piana luminosa che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi trasparenti aventi indici di rifrazione m_1 e m_2 si può scrivere:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{m_1 c} \cdot \frac{m_2 c}{c} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_1 \sin \theta_i = m_2 \sin \theta_t$$