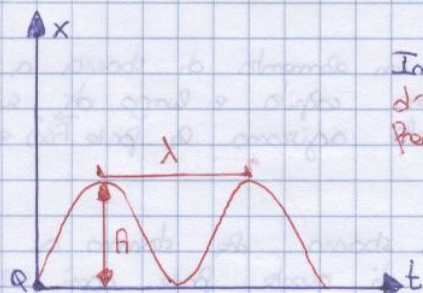


Parliamo ora delle **onde**. Un'onda è un concetto primitivo. Essa può essere così rappresentata:



Indichiamo con A l'**ampiezza** dell'onda, con λ la **lunghezza d'onda** e con T il **periodo**. Si noti che per definizione la **frequenza** f è data da:

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

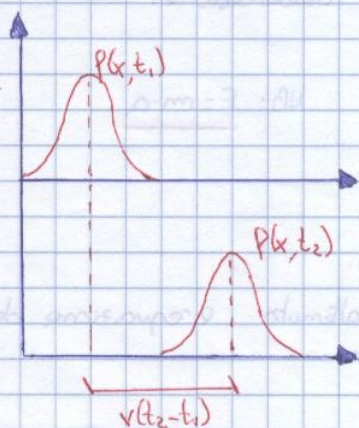
L'unità di misura della frequenza è **e-herz (Hz)**. I fenomeni ondulatori sono molto importanti in Fisica, e fenomeni ondulatori di tipo locale sono presenti nei fluidi, nei corpi solidi, e onde nei corpi elastici. Questi corpi prendono onde le nome di **mezzi**. Per esempio quando una sbarra metallica viene colpita con un martello, si ottiene un fenomeno oscillatorio all'interno della sbarra, che in questo esempio è anche il mezzo in questione. Si presti attenzione alla seguente osservazione: non si hanno oscillazioni a livello macroscopico, nel senso che il mezzo rimane in quiete. Le oscillazioni avvengono all'interno del mezzo e quindi sono di natura microscopica. Chiameremo i vari elementi del mezzo **oscilleranno** attorno alla posizione di equilibrio con un ritardo rispetto alla sorgente che dipende dalla distanza dalla sorgente stessa e dalla velocità di propagazione. Quindi possiamo definire un'onda come quell'oscillazione che si propaga nel mezzo. Abbiamo appena detto che la sorgente. Una **sorgente** è un'entità generatrice di onde. Consideriamo ora il caso unidimensionale, in cui cioè la propagazione avviene lungo una determinata direzione, per esempio lungo l'asse x . L'oscillazione può essere una qualsiasi funzione $p(x,t)$ della posizione e del tempo. In particolare nella sorgente si ha:

$$p(0,t)$$

la quale ci fornisce l'oscillazione iniziale. Riprendiamo in esame l'esempio della sbarra. Supponiamo che la funzione p sia lo spostamento y dalla posizione di equilibrio. Quindi:

$$p(x,t) = y(x,t)$$

Se la perturbazione si propaga senza che avvenga nessuna perturbazione della forma, cioè senza nessuna deformazione, si può avere un andamento temporale del seguente tipo:



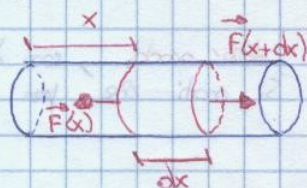
In generale la propagazione soddisfa la seguente equazione differenziale detta **equazione delle onde**:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Questa equazione non è una condizione sulla prima della funzione, bensì è una condizione sull'argomento della funzione.

6)

Supponiamo ora di voler deformare le travi iniziali di una sbarra solida applicando una forza impulsiva.



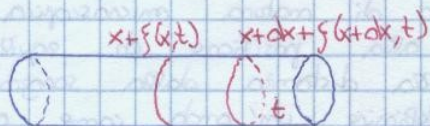
Quindi se consideriamo un elemento di sbarra a distanza x dall'estremo colpito e lungo dx , sulle basi di questo cilindretto agiscono le forze $F(x)$ e $F(x+dx)$.

Tali forze vengono rispettivamente esercitate dagli elementi di sbarra da sbarra a sinistra e a destra del cilindretto. Quindi sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia la propria posizione. Indichiamo con $f(x,t)$ la funzione che descrive lo spostamento dalla posizione iniziale. Quindi per l'esempio del cilindretto abbiamo:



$$x+dx+f(x+dx,t) - x - f(x,t) = dx + df$$

Si noti infatti che $f(x+dx,t) = f(x,t) + df$.



Se indichiamo con $\frac{\partial f}{\partial x}$ l'allungamento relativo del cilindretto, la formula che ci dà la deformazione df di un elemento di sbarra lungo dx quando è applicata la forza F è:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

Quindi si ottiene: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \Rightarrow F(x) = ES \frac{\partial f}{\partial x}$

Usando quest'ultima relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come:

$$F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx$$

Poi il moto del cilindretto di massa $dm = \rho S dx$ avviene con accelerazione:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow ES \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dx$$

NB: $F = m \cdot a$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Indicando con $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Quindi abbiamo ristabilito l'equazione delle onde piane.

Chiamiamo **onde longitudinali** quelle onde che si propagano lungo un solo asse (asse x) e dove lo spostamento e la forza sono paralleli a questo asse. Un tipo particolare di onda piana molto importante e' **onda armonica**. Essa si può scrivere nella seguente maniera:

$$f(x,t) = f_0 \sin k(x-vt) \quad \text{oppure} \quad f(x,t) = f_0 \cos k(x-vt)$$

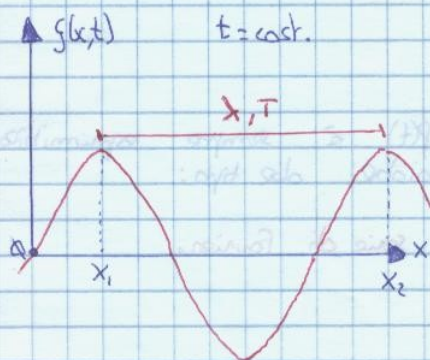
f_0 prende il nome di **ampiezza** dell'onda, e la costante k viene detta **numero d'onda**. Di norma si scrive:

$$f(x,t) = f_0 \sin(kx - \omega t) \quad ; \quad f(x,t) = f_0 \cos(kx - \omega t)$$

Chiamiamo **periodo** la seguente espressione:

$$\omega = kV$$

Si noti che $f(x-vt)$ rappresenta un fenomeno che si propaga lungo il verso positivo dell'asse x con velocità V , senza subire deformazioni. Graficamente un'onda armonica si rappresenta così:



Abbiamo già visto che λ è la lunghezza d'onda. In particolare:

$$\lambda = x_2 - x_1 \Rightarrow \text{se } (x_2 - x_1)k = \pi \cdot 2$$

$$\lambda k = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Quindi la costante k mi rappresenta il numero di lunghezze d'onda che stanno su una distanza di 2π . Se all'istante $t = t_2$ siamo nella posizione x_2 e all'istante $t = t_1$, nella posizione x_1 , abbiamo che la differenza tra questi due istanti temporali è il **periodo** (T):

$$T = t_2 - t_1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kV}$$

Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{kV} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} V} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{V} \Rightarrow \lambda = V \cdot T$$

Però: $P = \frac{1}{T} \Rightarrow P = \frac{V}{\lambda}$

Nel seguito considereremo spesso onde armoniche di questo tipo:

$$f(x,t) = f_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

NB: ϕ = valore dell'argomento per $x=t=0$.

Chiamiamo **fase** dell'onda armonica l'argomento della precedente funzione:

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \phi$$

(66)

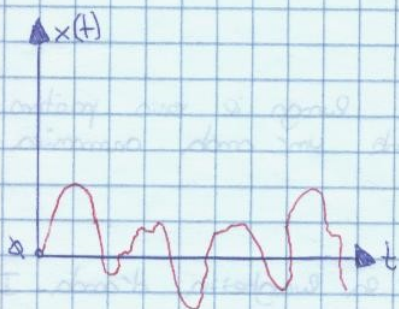
In definitiva possiamo scrivere:

$$f(x,t) = f_0 \sin(kx - \omega t + \delta) = f_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right) = f_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \delta\right)$$

Esistono due tipi di onde:

- 1) onde periodiche
- 2) onde non periodiche (aperiodiche)

Un'onda periodica è un'onda che si ripete nella stessa maniera nel tempo. Un'onda armonica è un esempio di onda periodica avente periodo pari a 2π , visto che la sinusoidale è periodica con periodo 2π . Un'onda aperiodica non si ripete nella medesima maniera ogni T secondi. Un esempio di onda aperiodica è il seguente:



Ritorniamo ora che una qualsiasi funzione periodica $f(t)$ è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali e cosinusoidali del tipo:

$$f(t) = a_0 + \sum (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) \rightarrow \text{serie di Fourier.}$$

I coefficienti di questa serie sono così definiti:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

mentre il valore medio di $f(t)$ è:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Siccome infatti che il valore medio di una funzione periodica è quel valore che molti piace per il periodo mi fornisce e integrale della funzione stessa lungo quel periodo. Chiamiamo onda trasversale un'onda la cui propagazione avviene su un piano ortogonale all'asse x . Un esempio di onda di questo tipo è l'onda elettromagnetica. In un'onda di questo tipo, la funzione d'onda $f(x,t)$ è esprimibile con un vettore $\vec{f}(x,t)$ le cui componenti sono $f_x(x,t)$, $f_y(x,t)$. Quindi:

$$\vec{f}(x,t) = f_x(x,t)\vec{u}_x + f_y(x,t)\vec{u}_y$$

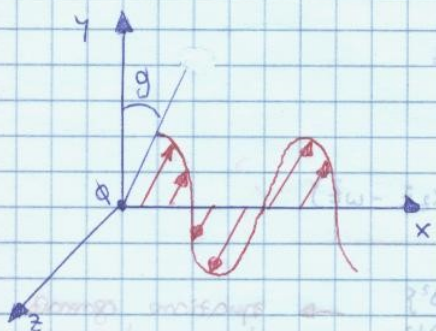
Tale vettore può assumere qualsiasi direzione ortogonale a x . In questo caso la dipendenza della direzione di $\vec{f}$ da x e t è completamente casuale, e in questo caso siamo in presenza di un'onda non polarizzata. Viceversa se tale dipendenza segue una precisa legge siamo in presenza di un'onda polarizzata. Quindi consideriamo la seguente situazione:

$$f_y = f_{0y} \sin(kx - \omega t)$$

$$f_z = f_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta)$$

dove δ qui rappresenta la differenza di fase tra le due onde. Se $\delta = 0$ la direzione di $\vec{f}$ è fissa, e quindi forma un angolo θ con l'asse y .

$$\tan \theta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{f_{0z}}{f_{0y}} = \text{costante} \rightarrow \text{POLARIZZAZIONE RETTILINEA.}$$



Si noti che $\delta = 0$ vuol dire che le componenti delle due onde sono in fase. Viceversa se $\delta = \pi$ le componenti sono in opposizione di fase.

Si ricordi infatti che: $\vec{f}(x,t) = f_y(x,t)\vec{u}_y + f_z(x,t)\vec{u}_z = (f_y(x,t) + f_z(x,t))\vec{u}_x$.

Per $\delta = \pi$ la situazione è la medesima soltanto che $\vec{f}$ forma con l'asse y un angolo $-\theta$. Quindi quando il vettore $\vec{f}$ ha direzione fissa, si dice che l'onda, pur essendo polarizzata circolarmente o rettilinearmente, la direzione fissa di $\vec{f}$ è chiamata direzione di polarizzazione e il piano fisso in cui giace $\vec{f}$ viene chiamato piano di polarizzazione. Se $\delta = \pi/2$ si ha:

$$f_y = f_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad f_z = f_{0z} \cos(kx - \omega t)$$

In una data posizione P di coordinate x_0 le componenti delle onde soddisfanno in qualsiasi istante la seguente relazione:

$$\frac{f_y^2}{f_{0y}^2} + \frac{f_z^2}{f_{0z}^2} = 1$$

Con il passare del tempo nel punto P , la punta del vettore $\vec{f}$ descrive un'ellisse. Con $\delta = 3\pi/2$ si ha lo stesso fenomeno ma con verso di rotazione opposto. In entrambi i casi comunque si parla di onda polarizzata ellitticamente. Un caso particolare si ha quando $\delta = \pi/2$ o $\delta = 3\pi/2$ e $f_{0y} = f_{0z} = f_0$. Si ottiene:

$$f_y^2 + f_z^2 = f_0^2$$

e l'onda viene detta polarizzata circolarmente. Definiamo fronte d'onda una superficie su cui in un certo istante la fase è costante. Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda piana, che dipende dalla struttura della sorgente, si introduce il vettore di propagazione $\vec{k}$ che ha modulo:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(58)

Detto $\vec{R}$ il raggio vettore che individua un punto P su un fronte d'onda piano, si ha:

$$\vec{k} \cdot \vec{R} = kR \cos \theta = kx$$

e quindi la funzione d'onda si può scrivere:

$$f = f_0 \sin(kx - \omega t)$$

In un generico sistema di coordinate cartesiane si ha:

$$\vec{k} = k_x \vec{U}_x + k_y \vec{U}_y + k_z \vec{U}_z, \quad \vec{R} = x \vec{U}_x + y \vec{U}_y + z \vec{U}_z$$



$$f = f_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

con: $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \rightarrow$ equazione generale delle onde piane.

Queste ultime equazioni descrivono le onde in più dimensioni. Un'onda prodotta da una sorgente puntiforme posta nel punto O si propaga in tutte le direzioni e il fronte d'onda ha natura sferica con centro in O e la sua velocità di propagazione è la stessa in tutte le direzioni.



Questa è un'onda sferica armonica, la cui funzione è:

$$f(R, t) = A(R) \sin(kR - \omega t)$$

dove R è la distanza da O.

Siccome l'intensità d'onda rappresenta il valore medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di area, e cioè:

$$I = \frac{1}{S} \left(\frac{dU_{mezz}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{S} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

si ha che la potenza media trasmessa attraverso una superficie sferica è:

$$P_m = I S = (A^2(R)) 4\pi R^2$$

Si dimostra che l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente.

$$I = \frac{I_0}{R^2}$$