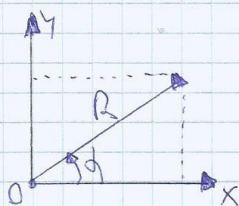


Formulario:



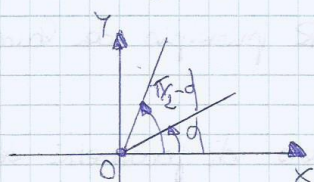
$$\begin{cases} x = R \cos \alpha \\ y = R \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

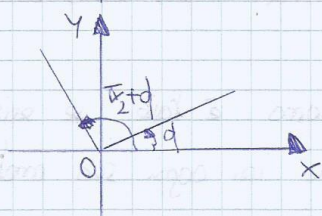
Formula fondamentale della trigonometria: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$



$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \end{cases}$$

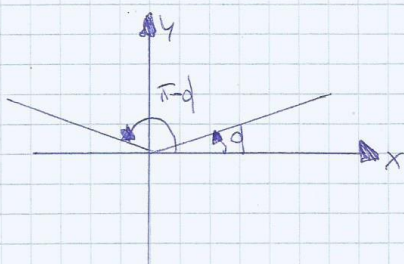
$$\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot(\alpha) \\ \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan(\alpha) \end{cases}$$

Complementi complementari.



$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot(\alpha) \\ \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan(\alpha) \end{cases}$$



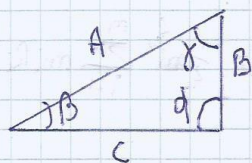
$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

Formule addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Teorema dei seni (Eulero)



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Teorema dei coseni (Lambr)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

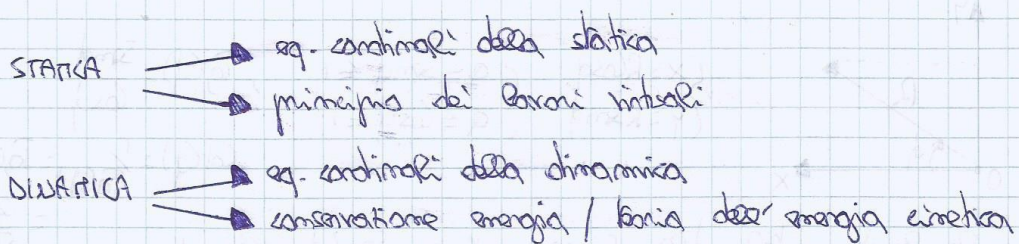
Teorema delle proiezioni:

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

In meccanica razionale si ha:



Anche nella dinamica esiste uno strumento come il principio dei lavori virtuali e sono le equazioni di Lagrange.

I gradi di libertà (g.d.l.) sono il minimo numero di parametri che caratterizzano il moto di un corpo rigido. Le coordinate libere sono tante quanti i gradi di libertà.

Un corpo rigido piano ha 3 g.d.l. Un sistema piano è tale se esiste un piano (fisso per tutti i tempi) che lo contiene in ogni suo moto. Nella fisica classica si sa che:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \text{per una particella}$$

Ma per un corpo esteso si ha:

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{traslat.}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{\text{rotaz.}}$$

Infatti:

$$E_{c, \text{tot}} = \sum_{i=1}^n E_{c_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (R_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

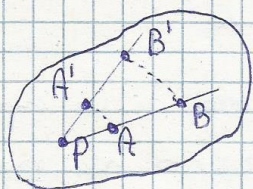
Quindi:

$$E_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ nel caso di moto di sola rotazione del corpo.}$$

Nello studio della cinematica e della dinamica di un generico corpo si fanno due modellazioni:

- 1) modello del **punto materiale**
- 2) modello del **corpo rigido**

Un punto materiale è un punto molto piccolo chiamato anche particella P cui moto è molto più semplificato rispetto a quello di un corpo rigido. Su un punto materiale agisce un solo moto contemporaneamente. Un corpo rigido è un corpo esteso indeformabile.



Su un corpo rigido si può parlare di

θ = angolo di rotazione

ω = velocità di rotazione (velocità angolare)

α = accelerazione angolare.

Sia il punto P un punto fisso attorno al cui si possa effettuare una rotazione. Quando si ragiona, in termini di angoli di rotazione, quindi si passa dal moto traslatorio al moto rotazionale bisogna tenere conto di alcune relazioni:

$$\Delta s = R \Delta \theta, \quad v = R \omega, \quad a = \alpha R$$

Inoltre:

ROTO RETTILINEO

$$x = x_0 + vt$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

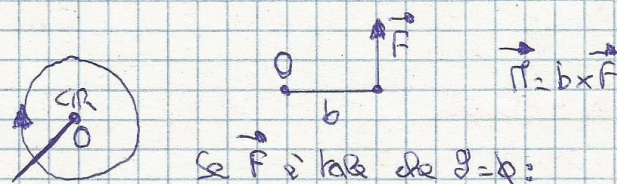
ROTO CIRCOLARE

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

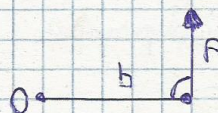
Si consideri ora, come esempio, una ruota di una bicicletta:



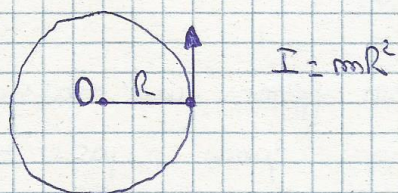
$\Rightarrow \tau = \varphi$ in quanto in modulo vale: $\tau = Fb \sin \theta$

Si ha il massimo momento di una forza quando:

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau = F \cdot b \sin = Fb \sin \frac{\pi}{2}$



Mentre la massa rappresenta la resistenza alla traslazione di un corpo, il momento di inerzia rappresenta la resistenza alla rotazione del corpo.



I momenti di inerzia principali sono:

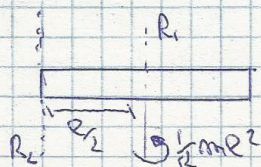
• $I = \frac{1}{12} mL^2$ per una lamina rettangolare

• $I = \frac{1}{2} mR^2$ per un disco pieno

• $I = \frac{1}{12} mR^2$ per un'asta sottile

• $I = \frac{2}{5} mR^2$ per una sfera piena

Si noti che:

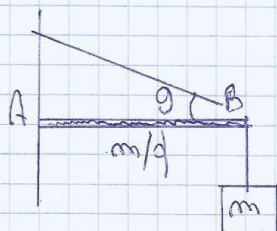


Se consideriamo R si ha:

$I = \frac{1}{12} mL^2 + mR^2$

ESERCIZI:

1) Si consideri la seguente situazione:



• DATI:

$$m = 900 \text{ kg}$$

$$R = 8 \text{ m} \rightarrow \text{lunghezza trave}$$

$$\text{massa trave: } m/2$$

$$\theta = 45^\circ$$

Determinare:

- 1) Tensione fune tra asta e muro.
- 2) La reazione normale esercitata dalla trave sulla parete.
- 3) Il coefficiente di attrito statico minimo tra parete e trave.

1) Ricordiamoci che il momento di una forza vale:

$$M = F \times b$$

Nel nostro problema,
l'asta deve rimanere

ferma. Quindi:

$$M_{TOT} = 0 \Rightarrow M_P + M_B - M_T = 0$$

dove:

M_P = momento della forza peso

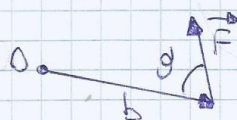
M_B = momento del baricentro

M_T = momento della tensione del filo

Quindi:

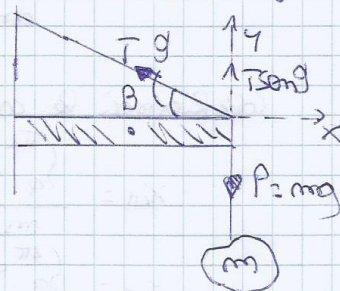
$$M_{TOT} = mgR + \frac{m}{2} g \frac{R}{2} - T \sin \theta = 0$$

Il momento di una forza detto anche momento torcente è una grandezza che si riferisce alla dinamica rotazionale.



In modulo:

$$M = Fb \sin \theta$$



da cui si ricava:

$$T = \frac{mg}{\sin \theta} \left(1 + \frac{1}{h}\right) = \dots$$

2) la reazione vincolare vale:

$$N = T \cos \theta$$

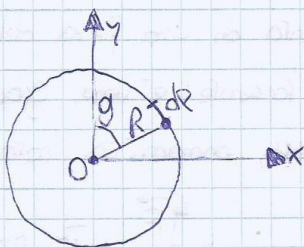
3) Calcoliamo le forze agenti lungo l'asse y:

$$F_y = -mg - \frac{mg}{2} + T \sin \theta = -mg/h$$

$$F_y = \sqrt{3} N = \varphi \quad \text{ossia} \quad F_y = \sqrt{3} N \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{F_y}{N}$$

2) Determinare il centro di massa (C.M.) di un anello di massa "m" e raggio "R".

2) Si ha:



$dl = R d\theta$, mentre la densità lineare di massa vale:

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

Quindi:

$$dm = \lambda dl = \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{m d\theta}{2\pi}$$

Calcoliamo le coordinate x_{cm} e y_{cm} del centro di massa:

$$x_{cm} = \frac{\int_0^{2\pi} x' dm}{m} = \frac{\int_0^{2\pi} R \cos \theta \frac{m}{2\pi} d\theta}{m}$$

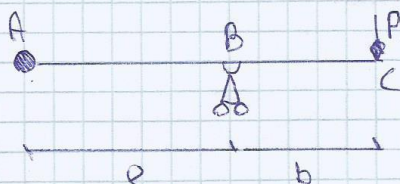
$$y_{cm} = \frac{\int_0^{2\pi} y' dm}{m} = \frac{\int_0^{2\pi} R \sin \theta \frac{m}{2\pi} d\theta}{m}$$

E' bene tener presente che le coordinate x e y del centro di massa si calcolano in questo modo:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

3) Calcolare le reazioni vincolari della seguente struttura:



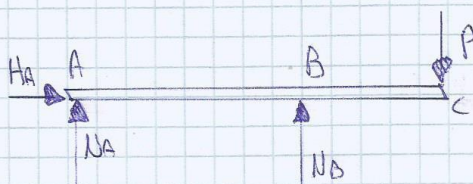
3) Supponendo i vincoli ideali, ossia non presentano attriti o giochi, si può dire che il sistema è vincolato isostaticamente in quanto:

A $\rightarrow$ vincolo fogge 2 gdl

B $\rightarrow$ il carrello fogge 1 gdl

il sistema (asta orizzontale)

senza vincoli ha 3 gdl.



sistema reazioni vincolari.

Scriviamo le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ N_A + N_B - P = 0 \\ N_B e - P(e+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ N_A = P \cdot b/e \\ N_B = P(1 + b/e) \end{cases}$$