A questo punto studiamo la dinamica di un corpo rigido. In fisica classica mentre con la cinematica si studiano i moti di un corpo senza studiarne le cause, nella dinamica si introducono le forze e quindi si studiano le cause che generano il moto. Oltre alla forza $\vec{F}$ che vale:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

NB: F è una grandezza vettoriale.

si definisce un'altra grandezza fondamentale chiamata quantità di moto

$$\vec{P} = m \cdot \vec{V}$$

Tale grandezza è molto utile quando si ha a che fare con gli urti. L'unità di misura della quantità di moto è $kg\,m/s$. La quantità di moto $\vec{Q}$ agente su un sistema meccanico è data da:

$$\vec{Q} = \sum_i m_i \vec{V_i}$$

Se il punto G è il baricentro di un sistema, si ha:

$$\vec{Q} = M \vec{V_G}$$

Si definisce momento della quantità di moto e si indica con K_A di un sistema meccanico rispetto al polo A la seguente espressione:

$$\vec{K_A} = \sum_i AP_i \cdot m_i \vec{V_i}$$

Preso un altro polo B si ha:

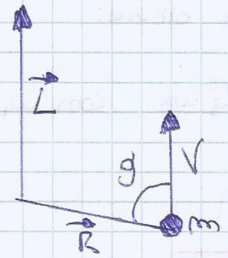
$$\vec{K_B} = \vec{K_A} + \vec{Q} \cdot AB$$

Considerando invece il baricentro:

$\vec{K}_G = \vec{K}_A + \vec{Q}_G \cdot \vec{AG} = \vec{K}_A + M\vec{V}_G \cdot \vec{AG}$ → teorema di Koenig.

Il teorema di Koenig implica che il momento della quantità di moto rispetto ad un determinato polo A è dato dalla somma del momento baricentrale e del momento che il sistema avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro.

Il momento della quantità di moto viene anche detto momento angolare è una grandezza vettoriale che rappresenta la quantità di moto per le traslazioni. L'unità di misura è $kg\, m^2/s$.



$\vec{L}$ = momento angolare

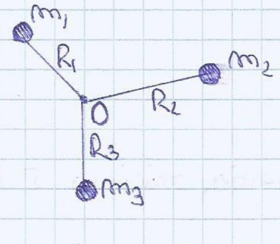
$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} = \vec{R} \times m\vec{V}$

Per un corpo rigido in rotazione attorno a z si ha:

$$K_A = M\vec{AG} \cdot \vec{V}_A + I_{Az}\vec{\omega}$$

I_{Az} = momento di inerzia alla rotazione rispetto ad un asse parallelo a z.

Il momento angolare ci permette di descrivere la rotazione di un corpo, rispetto ad un punto fisso O. Consideriamo un semplice corpo rigido composto da tre masse:



Le tre masse sono in rotazione rispetto ad O.

$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_3$

Quindi possiamo scrivere:

$$L_{TOT} = m_1 V_1 R_1 + m_2 V_2 R_2 + m_3 V_3 R_3$$

Siccome:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi f R$$ visto che la frequenza $f = \frac{1}{T} = T^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_3 = m_1\, 2\pi f R_1 \cdot R_1 + m_2\, 2\pi f R_2 \cdot R_2 + m_3\, 2\pi f R_3 \cdot R_3$$
$$= m_1 R_1^2 (2\pi f) + m_2 R_2^2 (2\pi f) + m_3 R_3^2 (2\pi f)$$

Siccome $\frac{2\pi}{T} = \omega$ ossia la velocità angolare si ottiene:

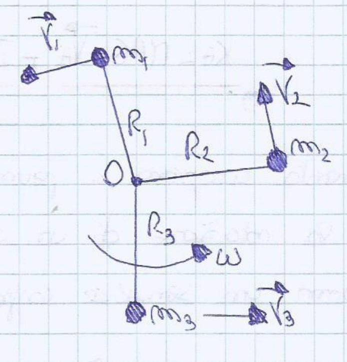
$$L_{TOT} = m_1 R_1^2 \omega_1 + m_2 R_2^2 \omega_2 + m_3 R_3^2 \omega_3 \quad \text{con } \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Quindi:

$$\underline{L_{TOT} = \omega (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2)}$$

La parte interna alle parentesi viene chiamata momento di inerzia I del corpo. Quindi:

$$\underline{L_{TOT} = I\omega}$$



Se il punto A è uguale al baricentro si scrive:

$$\underline{I_{Gz} \vec{\omega} = \vec{L}_G}$$

Quindi:

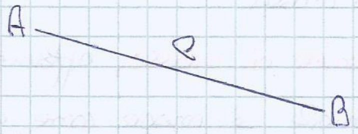
$$\underline{I_{Az} = I_{Gz} + m|AG|^2}$$

• NB: $L = K$ (stesso concetto).

Chiaramente il momento di inerzia minimo è il baricentro.

ESERCIZIO 16:

Data la seguente asta:



con densità ρ. Calcolare il momento di inerzia baricentrale.

*** SOLUZIONE:**

Se l'asta è omogenea si può scrivere:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \rho dV = dm$$. Trascuriamo la componente z e y e si ha:

$$\rho dx = dm$$

Quindi:

$$I_{G,z} = \int_A^B (GP_i)^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 dx = \left[\frac{1}{3}\rho x^3\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\rho L^3 = \frac{1}{12} mL^2$$

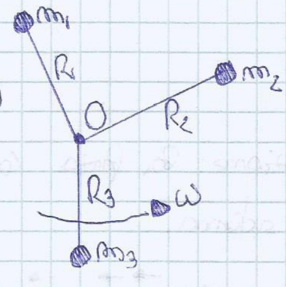
Con il teorema di Huygens-Steiner si calcolano:

$$I_{A,z} = I_{B,z} = I_{G,z} + mL^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

Con l'introduzione del momento di inerzia si può riscrivere l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione nel seguente modo:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Quindi:



$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 R_1^2 \omega^2 + m_2 R_2^2 \omega^2 + m_3 R_3^2 \omega^2)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2) \cdot \omega^2$$

$$\Downarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Vale la pena chiudere questo argomento legando quanto appena visto con alcune considerazioni sul centro di massa.
Il noto teorema del moto del centro di massa afferma che il centro di massa di un sistema materiale si muove come un punto di massa pari alla massa totale su cui sono concentrate tutte le forze esterne applicate al sistema.

$$R^{(E)} = m_T a_{CM}$$

Quindi:

$$\begin{cases} R_x = m a_{CMx} = m \ddot{x}_{CM} \\ R_y = m a_{CMy} = m \ddot{y}_{CM} \\ M_{CMz} = I_{CM} \cdot \omega = m \dot{g} \end{cases}$$

In un sistema di riferimento inerziale la variazione di energia cinetica è:

$$\dot{E}_c = \Pi \quad \text{dove} \quad \Pi = \sum_i F_i \cdot V_i \rightarrow \text{Potenza delle forze.}$$

Questo è il teorema dell'energia cinetica.
Infatti:

$$\dot{E}_c = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt}(V_i \cdot V_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i 2 m_i a_i \cdot V_i$$

$$= F_i \cdot V_i = \Pi.$$

Attenzione: la forza contribuisce ad aumentare o meno l'energia cinetica del sistema.

$$\Pi = \vec{F} \cdot \vec{V} = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cos\phi \begin{cases} > \frac{\pi}{2} & E_c \text{ diminuisce} \\ < \frac{\pi}{2} & E_c \text{ aumenta} \end{cases}$$

Terza equazione cardinale della dinamica.

Data la definizione:

$$\tilde{\Pi} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

nei vincoli perfetti e fissi la potenza di tali reazioni vincolari sono nulle. La potenza delle forze conservative è uguale alla derivata prima del potenziale rispetto al tempo. La potenza di una coppia di forze vale:

$$\tilde{\Pi}^{(c)} = \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}^{COPPIA}$$

Quest'ultima espressione si può anche riscrivere nel seguente modo:

$$\tilde{\Pi}^c = \vec{\omega} \cdot \vec{\Pi}^{coppia} = \pm \Pi \dot{g}$$

- se $\dot{g}$ e Π sono concordi, $\tilde{\Pi}^c$ aumenta
- se $\dot{g}$ e Π sono discordi, $\tilde{\Pi}^c$ diminuisce

Su un sistema con vincoli perfetti e fissi il quale è sottoposto a forze conservative, l'energia meccanica si conserva.

$$E_m = U - T \Rightarrow \dot{T} = \dot{U}$$

Per quanto riguarda i problemi di dinamica, solitamente, è necessario risolvere vari quesiti tra cui:

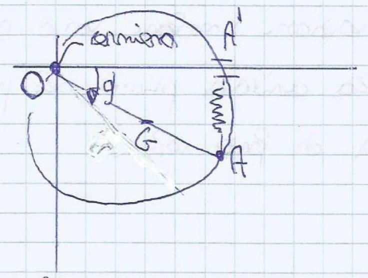
- la configurazione del moto
- L'equazione del moto
- Analisi delle reazioni vincolari

In questo ambito, solitamente, si usano:

- $\tilde{\Pi} = \dot{E}_c \Rightarrow$ teorema dell'energia cinetica
- Conservazione dell'energia meccanica $(\dot{T} - \dot{U} = 0)$

ESERCIZIO 17

Sia data la seguente situazione:



Sul punto A viene applicata la forza elastica $F_A = -k(A-A')$.

$$K = \frac{mg}{2R}$$

I vincoli sono lisci.

1) Trovare l'equazione differenziale del moto.

2) Calcolare la reazione dinamica in O

3) La posizione di equilibrio del disco

* SOLUZIONE:

1) Le forze agenti sul disco sono conservative e sono la forza peso e la forza elastica. Quindi:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad e \quad \vec{F_A} = -k(A-A')$$

G = baricentro $\Rightarrow \begin{cases} G_x = R\cos\vartheta \\ G_y = R\sin\vartheta \end{cases}$, $A \begin{cases} A_x = 2R\cos\vartheta \\ A_y = 2R\sin\vartheta \end{cases}$

Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = -R\sin\vartheta\dot{\vartheta} \\ \dot{y}_G = R\cos\vartheta\dot{\vartheta} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \ddot{x}_G = -R\sin\vartheta\ddot{\vartheta} - R\cos\vartheta\dot{\vartheta}^2 \\ \ddot{y}_G = R\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - R\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 \end{cases}$$

Il momento della quantità di moto vale:

$$\vec{K_O} = I_O \cdot \vec{\omega} \quad e \quad \vec{\omega} = \dot{\vartheta} \cdot \vec{k} \Rightarrow \vec{K_O} = I_{O_z}\dot{\vartheta}\vec{k}$$

⇓

$$I_{O_z} = I_{G_z} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\vartheta}\,\vec{z} = (G-O)\times m\vec{g} + (A-O)\times\vec{F_A}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\vartheta} = mgR\cos\vartheta - 4kR^2\operatorname{Sen}\vartheta\cos\vartheta$$

Quindi:

$$3mR^2\ddot{\vartheta} = 2mgR\cos\vartheta - 2mgR\operatorname{Sen}2\vartheta$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vartheta} - \frac{2g}{3R}(\cos\vartheta - \operatorname{Sen}2\vartheta) = 0$$

2) Dalla prima equazione cardinale si ha:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{(E)} + \vec{\Phi}^{(E)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m(-R\operatorname{Sen}\vartheta\,\ddot{\vartheta} - R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) = \Phi_{O_x} \\ m(R\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} - R\operatorname{Sen}\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) = \Phi_{O_y} + mg - 2kR\operatorname{Sen}\vartheta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\Phi}_O = \Phi_{O_x}\vec{u}_x + \Phi_{O_y}\vec{u}_y$$

Quindi:

$$\begin{cases} \Phi_{O_x} = m(-R\operatorname{Sen}\vartheta\,\ddot{\vartheta} - R\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) \\ \Phi_{O_y} = m(R\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} - R\operatorname{Sen}\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) - mg - 2kR\operatorname{Sen}\vartheta \end{cases}$$

3) Calcoliamoci il potenziale delle forze agenti sul disco:

$$U = mgy_G - \frac{k}{2}\overline{AA'}^2 + c = mgR\operatorname{Sen}\vartheta - 2kR^2\operatorname{Sen}^2\vartheta + c$$

$$\Downarrow$$

$$dU/dt = 0 \Rightarrow mgR\cos\vartheta - 4kR^2\operatorname{Sen}\vartheta\cos\vartheta = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = 0 \text{ OR } \operatorname{Sen}\vartheta = \frac{1}{2}$$

Quindi: $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_2 = \frac{3\pi}{2}$, $\vartheta_3 = \frac{\pi}{6}$, $\vartheta_4 = \frac{5\pi}{6}$

Il teorema di Koenig per un corpo piano afferma che, dato un corpo piano che si muove con velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{U}_z$$

l'energia cinetica vale:

$$T \equiv E_c = \frac{1}{2} M |V_G|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \dot{\vartheta}^2$$

dove:

M = massa totale del sistema

I_{G_z} = momento di inerzia rispetto al baricentro G.

Sempre, per quanto riguarda un corpo piano applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$M_A^{(e)} = \dot{K}_A + V_A \wedge Q \Rightarrow M_G^{(e)} = \dot{K}_G = I_{Gz} \ddot{\vartheta} \vec{U}_z$$

Si ricordi che:

$$K_A = MAG \wedge \vec{V}_A + I_{A_z} \dot{\vartheta} \vec{U}_z$$

Per un corpo rigido piano, le due equazioni cardinali della dinamica diventano:

$$\ddot{x}_G = \frac{1}{M} R_x^{(e)} \quad , \quad \ddot{\vartheta} = \frac{1}{I_{G_z}} M_{Gz}^{(e)}$$

$$\ddot{y}_G = \frac{1}{M} R_y^{(e)}$$

Per un corpo piano il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(e)} = \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{V}_G + \vec{M}_G^{(e)} \cdot \vec{\omega} \quad , \quad \frac{dT}{dt} = \Pi^{(A,e)} \text{ (vincoli perfetti).}$$