Vale la pena citare due teoremi:

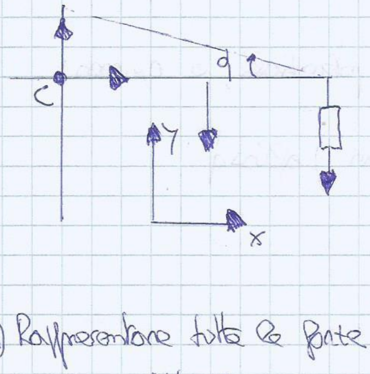
1) Teorema di Torricelli → per un corpo rigido sottoposto a vincoli ideali ed a sole forze peso, condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che il suo baricentro non subisca abbassamenti.

2) Teorema di stazionarietà del potenziale: → Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto P sia di equilibrio per un sistema ad un grado di libertà con vincoli perfetti e forze conservative U è che:

$$U'(P) = \phi.$$

ESERCIZIO (14):

Si consideri la seguente situazione:



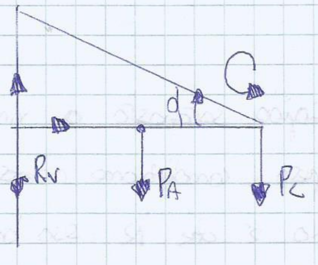
Sia un'asta di lunghezza L incernierata in C. Essa è posta in orizzontale e sorregge il carico di massa $m = 1000\,kg$. $\alpha = 25°$.

a) Rappresentare tutte le forze agenti sull'asta.
b) Calcolare tutte le forze.

∗ SOLUZIONE:

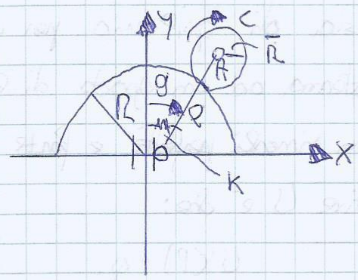
b) $x: R_O - T\cos\alpha = \phi$, $y: R_V - P_A - P_C + T\sin\alpha = \phi$ → $-b_A P_A - b_C P_C + b_T P_T = \phi$

a)



ESERCIZIO (15):

Si consideri la seguente situazione:



L'asta di lunghezza ℓ e massa m_ℓ. Il disco di raggio $\bar{R}$ ha massa m.
Il disco rotola senza strisciare sul profilo circolare

a) Determinare il valore della costante elastica k affinché il sistema sia in equilibrio in $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

* SOLUZIONE:

Si sfrutta il teorema della stazionarietà dei potenziali, e quindi:

$$U(\vartheta) = -\frac{1}{2}k\vartheta^2 + U_c(\phi) - \left(\frac{m_\ell}{2} + m\right) g\ell \cos\vartheta$$

Si noti che:

$$U_c(\phi) \Rightarrow \frac{\ell}{\bar{R}}\vartheta$$

Deriviamo ed otteniamo:

$$U'_2(\vartheta) = -k\vartheta + C\frac{\ell}{\bar{R}} + \left(\frac{m_\ell}{2} + m\right) g\ell \operatorname{sen}\vartheta$$

La condizione di equilibrio è: $U'(\frac{\pi}{3}) = \phi \Rightarrow k = \frac{3\ell}{\pi\bar{R}}C + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}(m_\ell + m)g\ell$

Il concetto di energia potenziale è un concetto fondamentale. E' una energia di posizione. Il teorema di stazionarietà del potenziale è un teorema che di fatto ci permette di imporre la condizione di stazionarietà del potenziale determinando così lo stato del sistema.

$$dU(q) = 0$$

Nella meccanica razionale si dimostra che tale condizione di stazionarietà equivale a soddisfare la seguente equazione di Eulero-Lagrange:

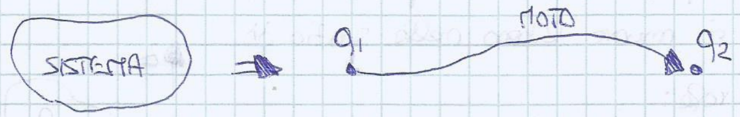
$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

In particolare la seguente funzione:

$$L = T - U$$

dove: T = energia cinetica
U = energia potenziale

viene detta funzione lagrangiana.
Tale funzione, in meccanica razionale, caratterizza la dinamica di un sistema. In parole povere si consideri il seguente sistema:



dove: q_1 e q_2 sono stati.

Si ha:

$$\begin{cases} q_1(t) = q(t_1) \\ q_2(t) = q(t_2) \end{cases} \quad \text{con } t_2 > t_1$$

In un sistema conservativo, si rispetta il principio variazionale di Hamilton il quale afferma che il sistema segue un percorso che tende a minimizzare l'azione S data da:

$$S(q)=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)\,dt$$

La funzione Lagrangiana è una espressione che racchiude lo stato fisico di un sistema. Per i sistemi meccanici la Lagrangiana vale:

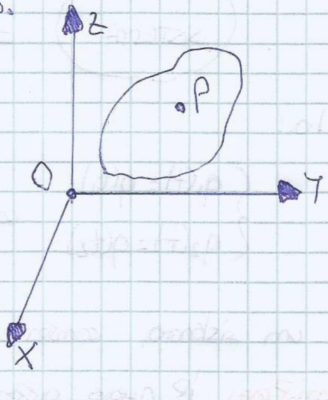
$$L = T - U$$

Esiste uno strumento per poter ottenere l'equazione del moto dalla Lagrangiana e questo strumento si chiama equazione di Eulero-Lagrange. Tale equazione ha la stessa forma sia nei sistemi inerziali sia nei sistemi non inerziali, sia nelle coordinate cartesiane sia nelle coordinate polari.

Per trovare la Lagrangiana:

- Scegliere il tipo di coordinate
- Esprimere l'energia cinetica nelle coordinate scelte
- Esprimere l'energia potenziale nelle coordinate scelte

Si supponga, per esempio, di avere un punto materiale P che si muove libero nello spazio 3D.



La Lagrangiana vale:

$$L = T - U \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$$

$$U = mgz$$

$$\Downarrow$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) - mgz$$

Quindi, ricapitolando, dato un sistema composto di punti materiali, si definisce configurazione di equilibrio ogni insieme di posizione dei punti del sistema che soddisfi la seguente proprietà:

$$\begin{cases} P_i(t_0) = P_i^0 \\ V_i(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_i(t) = P_i^0 \\ V_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq t_0$$

Ogni volta che il sistema viene collocato in quiete in tale configurazione, rimane anche in futuro nella medesima configurazione.
Due sono le equazioni cardinali:

1) Prima equazione cardinale della statica $\rightarrow \underline{R^{(E)} = 0}$

2) Seconda equazione cardinale della statica $\rightarrow \underline{\Omega_Q = 0}$

Per quanto riguarda la prima equazione cardinale è bene ricordarsi che:

$$\sum F_i = 0 \quad (F_i = \text{forza interna})$$

$$R^{(I)} + R^{(E)} = 0 \quad , \quad R^{(I)} = 0 \Rightarrow R^{(E)} = 0$$

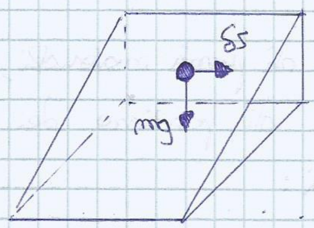
Per la seconda equazione cardinale si ha:

$$\sum QP_i \cdot F_i = \Omega_Q = 0 \quad \text{ma} \quad \Omega_Q^{(I)} + \Omega_Q^{(E)} = 0 \quad \text{e} \quad \Omega_Q^{(I)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega_Q^{(E)} = 0$$

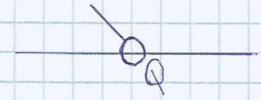
Un altro aspetto fondamentale della statica è legato al concetto di spostamento e velocità virtuale. Si consideri



Una spostamento virtuale è uno spostamento infinitesimale permesso dai vincoli stessi. Il lavoro virtuale è dato da:

$$\delta L = F \cdot \delta s$$

Uno spostamento virtuale, di fatto, è generalmente vincolato e solitamente è una piccola perturbazione del sistema dal suo stato iniziale. Uno spostamento virtuale è reversibile quando è virtuale anche lo spostamento opposto altrimenti si dice irreversibile.
Un vincolo che consente tutti spostamenti virtuali reversibili si dice vincolo bilatero, altrimenti il vincolo si dice unilatero. Il lavoro virtuale è il lavoro compiuto da un sistema di forze associato a spostamenti virtuali.
Il principio dei lavori virtuali (P.L.V) vuole determinare la condizione di equilibrio attraverso una connessione tra posizione e campi di forza applicati. Un vincolo perfetto è un vincolo ideale e bilatero. Un vincolo ideale è un vincolo in grado di generare sui punti reazioni vincolari con lavoro non nullo.
Vediamo l'esempio della seguente cerniera:



$\delta Q = 0 \Rightarrow \delta L = F \cdot \delta Q = 0$

$\Downarrow$

La cerniera è un vincolo perfetto in quanto

Vediamo un altro esempio:

$$\delta Q^{(A)} = \delta Q^{(B)} \quad e \quad V_Q^{(A)} = V_Q^{(B)}$$

$$\Downarrow$$

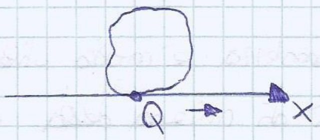
$$\delta L = F_Q^A \delta Q^{(A)} + F_Q^B \delta Q^{(B)} = 0$$

Tale cerniera è un vincolo bilatero.

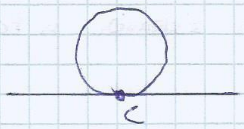
$$\delta L = 0 \quad \text{in quanto} \quad \delta Q^{(A)} = -\delta Q^{(B)}$$

Supponiamo invece di essere in presenza di un carrello come mostrato in figura:

$$\delta L = \underbrace{(F_x\, \delta Q_x)\vec{U_x}}_{\text{forza effettiva}} + \underbrace{(F_y \cdot \delta Q_y)\vec{U_y}}_{\text{reazione vincolare.}}$$



Nel caso invece di puro rotolamento:



$$\delta C = 0 \Rightarrow \delta L = 0$$

Il P.L.V afferma che, in un sistema con soli vincoli lisci, si ha:

$$\delta L^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \delta P_i$$

dove:

δL^* = Lavoro delle forze virtuali (lavoro virtuale)

F = Forze attive

δP_i = Spostamenti virtuali ammissibili.

Quindi:

$$\delta L^* = Q_k(q)\, \delta q^* = 0$$