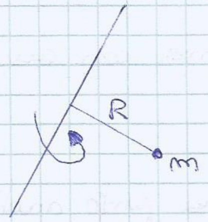
Di seguito viene fornita una definizione di momento di inerzia. Il momento di inerzia di un corpo rigido è una grandezza scalare non negativa. Essa esprime l'inerzia di un corpo rispetto al moto rotazionale. In termini matematici si ha:

$$I = \sum_i m_i d^2(P_i, Q) \qquad \text{dove } Q = \text{polo.}$$

Graficamente si ha:



$I = mR^2$ (unità di misura: $kg\, m^2$).

Scomponendo lungo gli assi si ha:

$$I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$
$$I_y = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$
$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

con: $I_z = I_x + I_y$.

Vediamo il calcolo del momento di inerzia per le configurazioni di base:

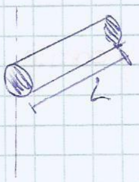
- Guscio cilindrico

$$I = mR^2$$

- Cilindro pieno

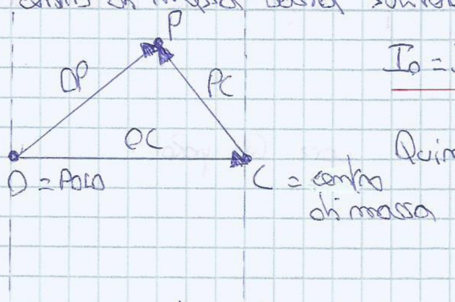
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

- Asta sottile rispetto ad una retta perpendicolare passante per una estremità



$$I = \frac{1}{3} mL^2$$

Il teorema di Huygens-Steiner afferma che dato un corpo rigido, se vogliamo calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse che passa per il centro di massa basta scrivere:



$$I_O = I_C + m\,d^2(O,C)$$

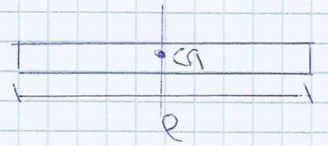
Quindi: $O = C \Rightarrow I_O = I_C$

$O \neq C \Rightarrow I_O > I_C$

È bene precisare che, solitamente, dato un sistema con due masse m_1 e m_2, se:

- $m_1 = m_2 \Rightarrow$ il centro di massa sta nel punto medio del segmento.
- Se $m_1 > m_2 \Rightarrow$ il centro di massa è spostato verso m_1
- $m_1 < m_2 \Rightarrow$ il centro di massa è spostato verso m_2

Vediamo il caso di un'asta omogenea di lunghezza l.



$I_z = I_x + I_y \Rightarrow I_x = 0$ (larghezza trascurabile).

$\Downarrow$

$$I_z = I_y = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2\,dx = 2\int_0^{l/2} \rho x^2\,dx$$

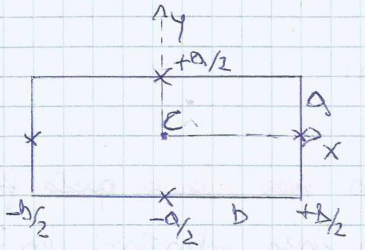
$$= \left[2\,\frac{m}{l}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2$$

NB: densità $\rho = m/l$

$\Downarrow$

$m = \rho l$

Prendiamo ora in esame una lamina quadrata come quella mostrata di seguito:



densità: $\rho = \frac{m}{ab}$

$I_z = I_x + I_y$

con: $I_x = \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} \rho y^2 dx = \frac{1}{12} m b^2$, $I_y = \int dy \int \rho x^2 dx =$

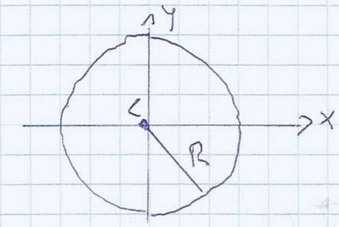
$\Downarrow$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Se la lamina fosse quadrata si avrebbe:

$a = b \Rightarrow I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + a^2) = \frac{1}{12} m \, 2a^2 = \frac{1}{6} m a^2$.

Si supponga ora di avere a disposizione il seguente disco omogeneo di raggio R:



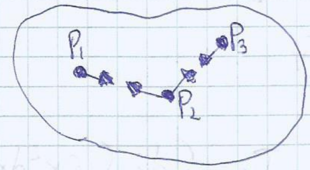
$\rho = \frac{m}{\pi R^2}$ $\quad I_z = 2I_x = 2I_y = \int_0^R R dR \int_0^{2\pi} \rho (R^2 \cos^2\varphi + R^2 \sin^2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} m R^2$

Un vettore $\hat{v}_P$ si dice velocità virtuale di un generico punto P ad un certo istante di tempo se la coppia $(P, \hat{v}_P)$ è un atto di moto ammesso dai vincoli agenti su P.

Per quanto riguarda i vincoli, esso è fisso se consente la quiete, altrimenti si dice mobile. Un vincolo che ammette, ad un certo istante, tutte velocità virtuali reversibili si dice bilatero altrimenti si dice unilatero.

Un vincolo si dice perfetto se è bilatero e ideale. Un vincolo ideale è in grado di generare reazioni vincolari che esplicano lavoro non nullo.

Dato un sistema più o meno complesso meccanico:



Si chiamano forze interne quelle forze che nascono dalle interazioni tra i punti del sistema. Tutte le altre forze sono forze esterne.

Il lavoro virtuale di una forza vale:

$$dL = \vec{F} \, dP$$

Quindi ricapitolando uno spostamento dS si dice virtuale se è virtuale anche lo spostamento opposto. Per gli spostamenti irreversibili si ha:

$$dL = \vec{F} \cdot dS \le 0$$

mentre per gli spostamenti reversibili si ha:

$$dL = \vec{F} \cdot dS = 0$$

E' bene notare che:

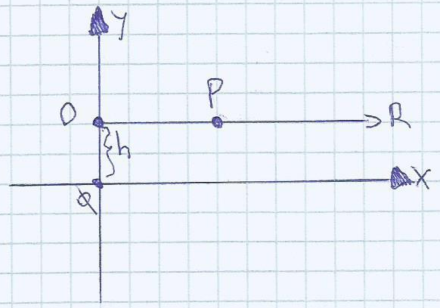
$$dL = \vec{F} \cdot dS = F_x \vec{U}_x \, dS_x + F_y \vec{U}_y \, dS_y + F_z \vec{U}_z \, dS_z$$

Per calcolare il lavoro virtuale di una coppia di forze di momento M, si deve considerare l'angolo di rotazione del corpo e quindi:

$$dL = \pm M \, d\theta$$

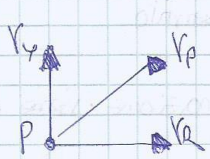
Di seguito si cerca di chiarire il concetto di spostamento e di velocità virtuali.

Si consideri la seguente situazione:



Si supponga che il punto P sia vincolato a muoversi sul piano identificato O-R.

Se il piano si muove lungo l'asse y con una velocità V_y si ha:



$$\vec{V_P} = \vec{V_y} + \vec{V_R}$$

Nel caso in cui il piano si muove lungo l'asse y, V_P è la velocità reale della particella. Nel caso in cui il piano è fermo, si ha che $V_P = V_R$ e questa velocità si chiama velocità virtuale.

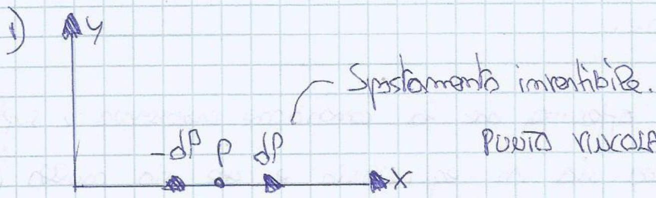
Se il vincolo è mobile in generale le velocità virtuali non sono reali. Viceversa se il vincolo è fisso ogni velocità reale può essere considerata virtuale.

Lo spostamento virtuale è dato da:

$$dP = V_R\,dt$$

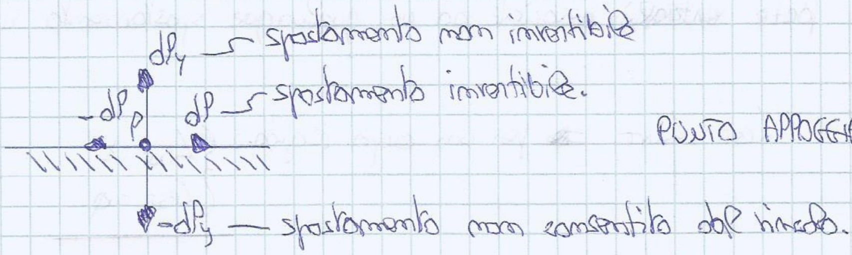
Si veda qualche esempio:

1)



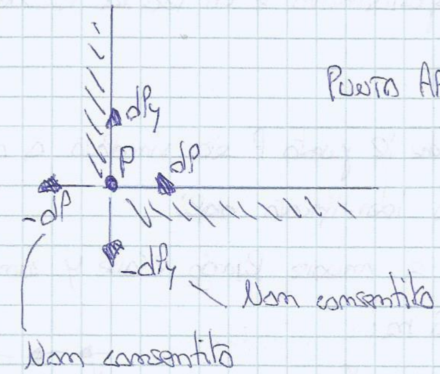
PUNTO VINCOLATO A SCORRERE SULL'ASSE X.

2)



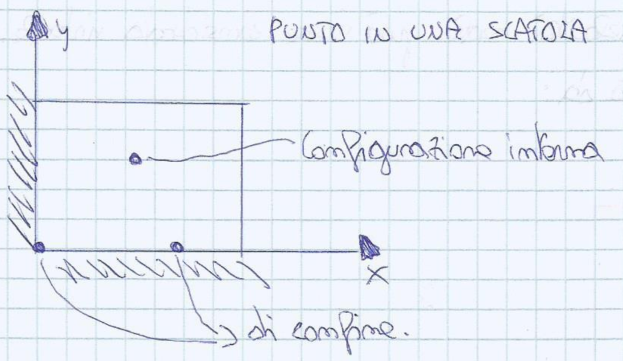
PUNTO APPOGGIATO SU UN PIANO

3)



Una configurazione viene detta interna se ogni spostamento virtuale del sistema a partire da una configurazione iniziale è invertibile altrimenti la configurazione viene detta di confine.

Per esempio:



Il principio dei lavori virtuali afferma che la condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico sia in equilibrio è che sia nullo il lavoro delle forze attive associato ad un qualunque spostamento virtuale compatibile.

$$L_{EST} = L_{INT} \Rightarrow \text{per un corpo rigido: } \begin{cases} L_{INT} = 0 \\ L_{EST} = 0 \end{cases}$$

Dalla fisica classica si ricorda che quando agiscono solo forze conservative, come per esempio la forza peso, vale il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$E_m = E_c + E_p$$

dove:

E_m = energia meccanica

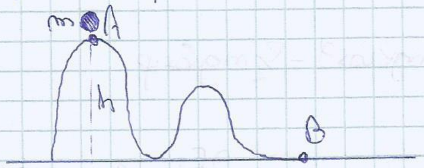
E_c = energia cinetica

E_p = energia potenziale.

Mentre l'energia cinetica è legata al movimento del corpo ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$), l'energia potenziale è legata alla posizione (quota) del corpo.

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ E_p = mgh \end{cases} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Ad esempio, si supponga di avere la seguente situazione:



PIANO TOTALMENTE LISCIO $\Rightarrow$ non ci sono forze di attrito.

Vogliamo calcolare la velocità v_B del corpo di massa m. Si può scrivere:

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

$$\Downarrow$$

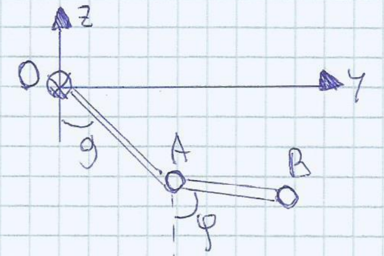
$$E_{c,B} + E_{p,B} = E_{c,A} + E_{p,A} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B.$$

Siccome:

$$h_B = 0 \text{ e } v_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_A \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_A}$$

ESERCIZIO (13):

Trovare i punti di equilibrio del seguente bipendolo.

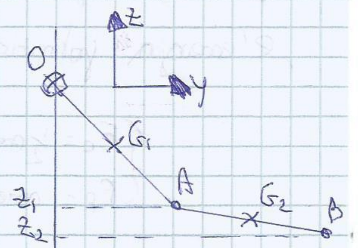


* SOLUZIONE:

Innanzitutto un bipendolo è un pendolo rigido doppio. Si ha:

$$E_p(z) = mgz$$

$$E_{TOT}(z) = E_1(z) + E_2(z) = mgz_1 + mgz_2$$



Si noti che:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ z_2 = -\left(\ell\cos\theta + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{P_{TOT}}(z) = -mg\ell\cos\theta - mg\ell\cos\theta - \frac{\ell}{2}mg\cos\varphi$$

Quindi:

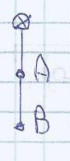
$$E_p(\theta,\varphi) = -\frac{3}{2}mg\ell\cos\theta - \frac{\ell}{2}mg\cos\varphi \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = \frac{3}{2}mg\ell\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = \frac{\ell}{2}mg\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

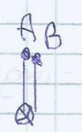
$\Downarrow$ Teorema di stazionarietà del potenziale

La configurazione che si ottiene è:

$\theta = (0,\pi)$

$\varphi = (0,\pi)$ $\Rightarrow$ Quattro posizioni di equilibrio.

1) $(0,0)$ $\rightarrow$ 

2) (π,π) 

3) $(0,\pi)$ 

4) $(\pi,0)$