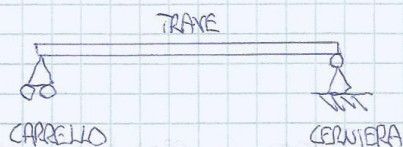


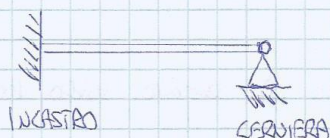
Numero di impedimenti = Numero di g.d.P.

Per esempio:



La trave è in equilibrio.
sistema isostatico.

Si consideri il seguente esempio:

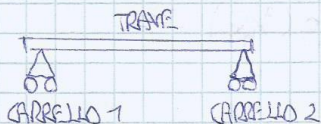


- Con l'aggiunta della cerniera si ha un vincolo abbondante e quindi non necessario in quanto la trave era già in equilibrio. $\Rightarrow$ Sistema iperstatico

Nel caso del sistema iperstatico appena mostrato si hanno 5 vincoli, tre legati all'incasso e 2 alla cerniera. I g.d.P. della trave sono 3. Quindi:

$$3 + 2 = 5 \text{ (vincoli)} > 3 \text{ g.d.P.}$$

Vediamo ora il seguente esempio:



Ogni carrello impedisce un movimento.
Quindi:

$$2 \text{ vincoli} < 3 \text{ g.d.P. della trave}$$

I vincoli generano reazioni vincolari. Le prime domande da porsi sono:

$\Rightarrow$ Sistema labile.

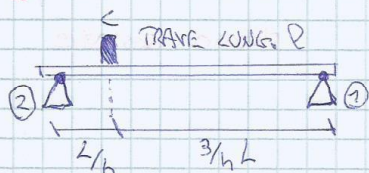
- 1) Da una situazione di non equilibrio possiamo ricadere ad una di equilibrio?
- 2) Come calcoliamo le reazioni vincolari?

Per rispondere a tutte domande usiamo le equazioni della STATICA.

22

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

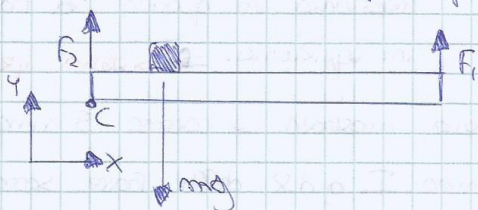
ESERCIZIO 8):



Trovare le forze F_1 e F_2 per mantenere in equilibrio la trave.

* SOLUZIONE:

Il corpo C ha una sua forza peso che agisce sulla trave.



Condizione di equilibrio:

$$F_1 + F_2 = mg \Rightarrow F_1 + F_2 - mg = 0$$

Siccome $C = \text{C.M.} \Rightarrow M_1 = F_1 \cdot \frac{L}{4} = 0$, $M_2 = F_2 \cdot \frac{3}{4}L$, $M_{\text{peso}} = -P \cdot (\frac{1}{2}L)$

Quindi:

$$M_{\text{tot}} = M_1 + M_2 + M_P = 0 + F_2 \cdot \frac{3}{4}L - mg \cdot (\frac{1}{2}L)$$



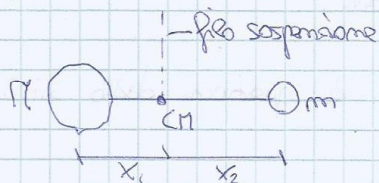
$$F_2 = mg \cdot \frac{2}{3} \text{ e quindi: } F_1 + F_2 = mg \Rightarrow F_1 + mg \cdot \frac{2}{3} = mg$$

Concludendo:

$$F_1 = \frac{1}{3} mg$$

Introduciamo anche il **centro di massa (C.M.)**. Solitamente, per un corpo esteso, esso si comporta come se tutta la sua massa fosse concentrata in C.M.

Per esempio:



La figura illustra un **bilanciere**.

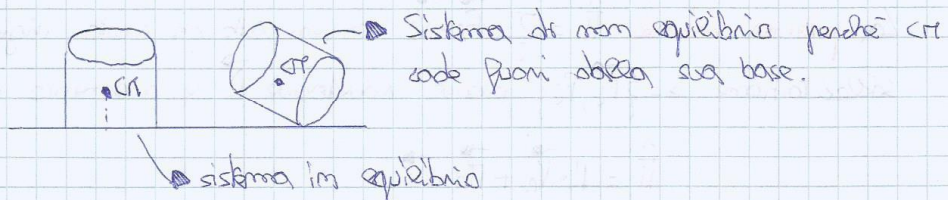
Perché sia in equilibrio deve essere:

$$Mg x_1 = mg x_2 \Rightarrow Mg x_1 = mg x_2$$

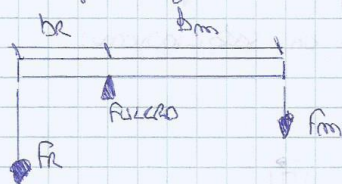
Quindi si può scrivere:

$$M \cdot X_1 = m \cdot X_2 \Rightarrow X_1 = \frac{m}{M} X_2 \quad \text{quindi } X_1 < X_2 \Rightarrow \text{CTR più vicino alla massa maggiore.}$$

Vediamo un altro esempio:



Un altro esempio riguarda la leva.



F_m = forza motrice
 F_R = forza resistente
 b_m = braccio motore
 b_R = braccio resistente

Per avere equilibrio:

$$F_m b_m = F_R b_R$$

Se $b_R > b_m \rightarrow$ leva sbracciata

$b_R < b_m \rightarrow$ leva bracciata

$b_R = b_m \rightarrow$ leva isobracciata

Si definisce coppia una data sollecitazione composta da due forze uguali ed opposte come mostrato di seguito:



$$F_B = -F_A \quad \text{Si consideri che:}$$

$$M_A = F_A \cdot AB = AB \cdot (-F) = -M_B$$

Due sollecitazioni S ed S' si dicono sollecitazioni equivalenti quando le forze di S possono essere trasformate nelle forze di S' in modo totalmente trasparente. Quindi il teorema di equivalenza afferma che S e S' sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante.

24

Dalla fisica classica si sa che:

$$L = F \cdot S \text{ e che la potenza } P = \frac{L}{t} \Rightarrow P = \frac{F \cdot S}{t} = F \cdot v$$

La potenza virtuale $\hat{\Pi} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ di un ab di mole rigide per una sollecitazione $S = \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\}$ agente risultante $\vec{R}$ e momento risultante $\vec{\Pi}_R$ vale:

$$\hat{\Pi} = \vec{R} \cdot \vec{v}_R + \vec{\Pi}_R \cdot \vec{\omega}$$

Una sollecitazione sul corpo rigido è quindi completamente caratterizzata dai vettori $\vec{R}$ ed $\vec{\Pi}$. Esistono quattro classi di sollecitazione:

- 1) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{\Pi} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ sollecitazione nulla
- 2) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{\Pi} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ coppia di intensità $|\vec{\Pi}|$.
- 3) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{\Pi} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ forza applicata sull'asse centrale
- 4) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{\Pi} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{R}$ applicata sull'asse centrale e $\vec{\Pi}$ con direzione uguale a quella dell'asse centrale.

ESERCIZIO (9):

Calcolare la potenza di una coppia costante di momento $\vec{\Pi} = \Pi \vec{e}_z$ agente su un corpo rigido.

* Soluzione:

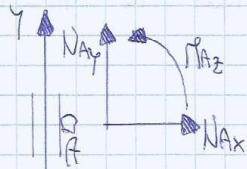


$$P = F \cdot v$$

Si ricordi che:

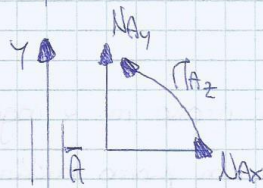
$$v_p = v_o + \omega \times \vec{OP} \Rightarrow \Pi = F v_o - F v_p = F(v_o - v_p) = F \omega \rho$$

Di seguito vengono mostrate le reazioni vincolari per i vari vincoli agenti su un corpo rigido:



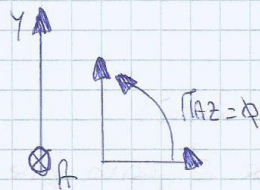
$$N_{Ax}, N_{Ay}, P_{Az} \neq 0$$

CARRULLO



$$N_{Ay} \neq 0$$

PATTINO



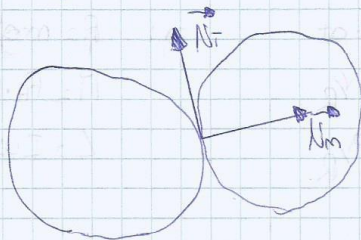
CERNIERA



$$N_{Ax} = N_{Ay} = P_{Az} \neq 0$$

INCASTRO

Per quanto riguarda i vincoli di appoggio si ha:



con sfasciamento

$$\begin{cases} N_m \neq 0 \\ N_r = 0 \end{cases}$$

senza sfasciamento

$$\begin{cases} N_m \neq 0 \\ N_r \neq 0 \end{cases}$$

26

E per quanto riguarda la reazione vincolare di un filo inestensibile?

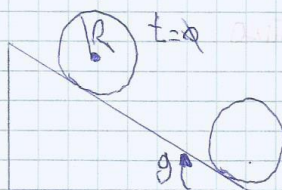
Si scrive:

$$\Pi = N_A V_{AT} + N_B V_{BT} = V_{AT} (N_{AT} + N_{BT}) \text{ visto che } V_{AT} = V_{BT}$$

$$\Pi = 0 \Rightarrow \underline{N_{AT} = -N_{BT}}$$

ESERCIZIO 10:

Si consideri la seguente situazione:

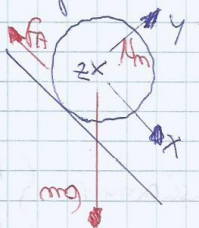


Un disco di massa m e raggio R scende lungo un piano inclinato.

- 1) Calcolare l'accelerazione del disco
- 2) Quale condizione garantisce che il disco non scivoli?
- 3) Quale sarebbe la velocità del disco finale se il piano fosse completamente liscio?

* SOLUZIONE:

1) Il piano presenta attrito e quindi:



Se non c'è slittamento:

$$\begin{cases} v(t) = at \\ \omega = v/R \\ a = \alpha/R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{eq: } F_p &= mg \sin \theta - F_A \\ \tau &= F_A \cdot R \\ L &= I\omega = I v/R \end{aligned}$$

NB: L è il momento angolare:

$$mg \sin \theta - F_A = ma \quad \text{e} \quad R F_A = I a/R \Rightarrow mg \sin \theta = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a$$

$$\text{NB: } F_A = \frac{I a}{R^2} \quad \text{e} \quad I = m \frac{R^2}{2}$$

comp. traslat.

comp. rotat.

$$\begin{cases} V(L) = \sqrt{2ax} \\ L = h/\sin\theta \end{cases} \Rightarrow V(L) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

2) La ruota non sliscierebbe se la relazione del disco fosse coordinata con la relazione di frizione.

$$F_A \leq F_{A\max} = \mu_s mg \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\mu > \tan(\theta)/3$$

3) Se il piano fosse completamente liscio si potrebbe usare il principio di conservazione dell'energia meccanica:

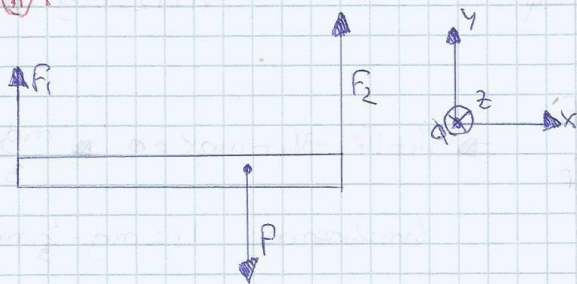
$$E_m = E_{cin} + E_{rot} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mI\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}mv^2$$

nel caso di piano liscio, il disco non ruota ma sliscia e quindi:

$$E_{rot} = 0 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow V(L) = \sqrt{2gh}$$

ESERCIZIO (11):

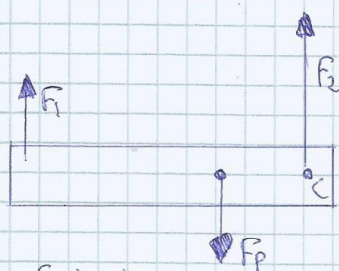


$$\begin{aligned} L &= 4\text{ m} \\ F_1 &=? \\ F_2 &=? \\ F_P &= 100\text{ N} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} L &= 4\text{ m} \\ F_1 &=? \\ F_2 &=? \\ F_P &= 100\text{ N} \end{aligned}} \right\} \text{ x cond. eq.}$$

*** SOLUZIONE:**

$$R: \begin{cases} x: F_1 + F_2 - P = 0 \\ y: F_1 + F_2 = P = R_y \end{cases} \Rightarrow F_2 = F_1 - P \quad \Gamma_{rot} = 0$$

28



$$C = CIR$$

$$\tau_i = F_i \cdot \ell \quad (\text{orario} < \text{antiorario})$$

$$\tau_i = -F_i \cdot \ell = -4F_i$$

$$\tau_2 = F_2 \cdot \ell = \ell$$

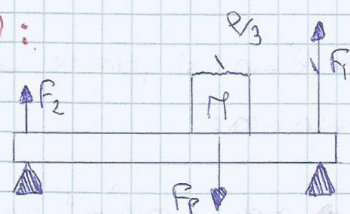
$$\tau_p = F_p \cdot \frac{1}{4}\ell = mg \cdot \frac{1}{4}\ell = mg = 100\text{ N} \quad \text{ANTIORARIO}$$

Quindi:

$$\tau_{\text{tot}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_p = 0 \Rightarrow \tau_1 = -\tau_p \Rightarrow +4F_i = 100\text{ N} \Rightarrow F_i = 25\text{ N}$$

$$F_2 = 100 - 25 = 75\text{ N}$$

ESERCIZIO (12):



$$m = 5\text{ kg}$$

$$L = 3\text{ m}$$

F_1, F_2 ? per eq. static.

* SOLUTIONS:

$$C = CIR$$



$$\begin{cases} x: F_1 + F_2 + mg = 0 \\ y: F_1 + F_2 + mg = R_p \end{cases}$$

$$F_1 + F_2 = mg \Rightarrow F_1 = mg - F_2$$

$$\tau_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow \tau_1 + \tau_p + \tau_2 = 0$$

Quindi:

$$\tau_1 = F_1 \cdot \ell = 3F_1$$

$$\tau_p = mg \cdot \frac{L}{3}$$

$$\Rightarrow \tau_1 + \tau_p = -3F_1 + mg \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \frac{mgL}{3} = F_1 = 33\text{ N}$$

$$\text{conclusione: } F_2 = mg - \frac{1}{3}mg = 16\text{ N}$$