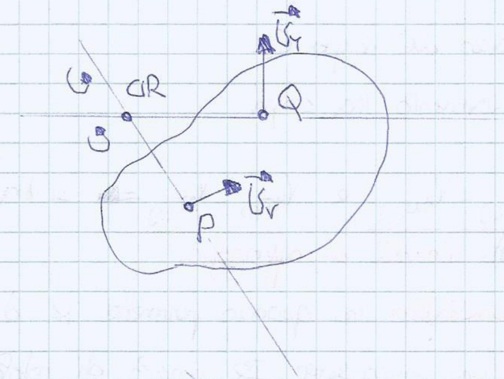
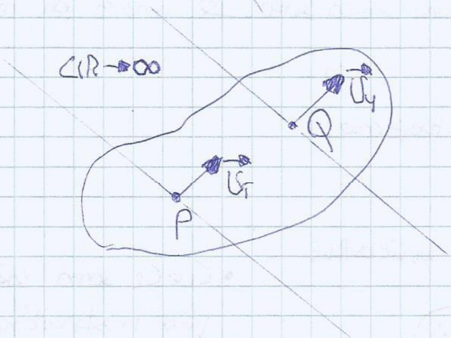
14

Esiste un teorema noto come **teorema di Chasles** il quale afferma che se per l'atto di moto di un corpo rigido piano è nota la direzione del vettore velocità in due punti distinti P e Q, allora la posizione del CIR che governa l'atto di moto è determinata dall'intersezione delle due rette 'p' e 'q' come mostrato di seguito:

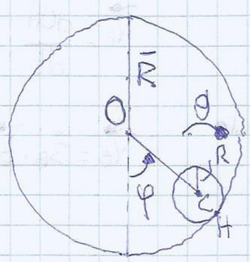




In altre parole, il centro CIR si trova all'intersezione delle normali alle traiettorie di 2 qualsiasi punti del corpo rigido.

Esercizio (3):

Si consideri un disco rigido con centro nel punto C di raggio R vincolato a muoversi senza strisciare sulla superficie interna di una guida circolare di raggio $\bar{R}$ con centro in O.



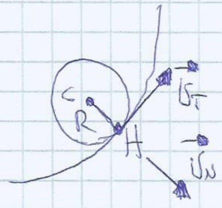
1) Capire i g.d.l del sistema.

2) Trovare il legame cinematico tra φ e ϑ.

*SOLUZIONE:

1) Il sistema ha 1 grado di libertà (g.d.l) che è l'angolo φ. Se si ferma φ anche il disco rigido non rotola più.

2)



$$CO = (\bar{R}-R)\vec{U}_N$$

$$V_C = \frac{dCO}{dt} = \frac{dCO}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dCO}{dt}\dot{\varphi}\vec{U}_T$$

Il punto H è il CIR dove $\vec{V}_H = 0$.

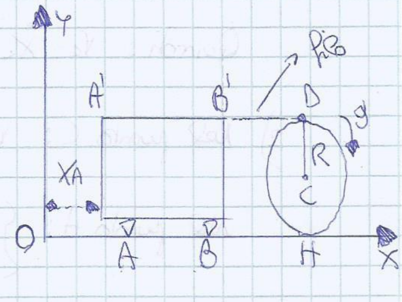
$$\vec{V}_C = \underbrace{\vec{V}_H}_{0} + \vec{\omega}(CH) \Rightarrow V_C = \dot{\vartheta}\vec{U}_z R$$

Confrontando si ottiene:

$$\dot{\vartheta} = \frac{(\bar{R}-R)\dot{\varphi}}{R} \Rightarrow \omega = \frac{(\bar{R}-R)}{R}\dot{\varphi}\vec{U}_z$$

Esercizio 4:

Si supponga di avere a disposizione un disco rigido che rotola senza strisciare collegato con un filo inestensibile e di massa trascurabile ad una lamina quadrata.



1) Trovare il g.d.l del sistema

2) Scrivere le equazioni vel. angolare del disco e del punto A nelle coordinate libere adottate.

*** SOLUZIONE:**

1) Il sistema meccanico ha 1 g.d.l. : ϑ

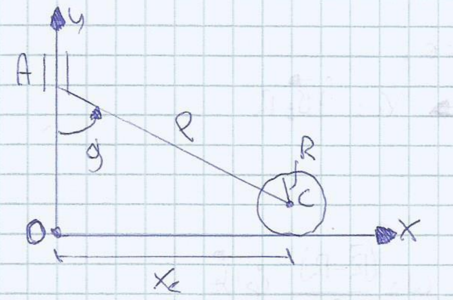
2) Nel punto D si ha:

$$\vec{V_D} = -\dot{\vartheta}\,\vec{U_z}\,(DH) \Rightarrow \vec{V_{B'}}\,\vec{U_T} = \vec{V_D}\,\vec{U_T}$$ per l'inestensibilità del filo.

Nel punto A:

$$\dot{x}_A = \frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_A}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow \dot{x}_A = 2R\dot{\vartheta}$$

ESERCIZIO (5):



1) Determinare il legame cinematico fra x_c e ϑ

2) Scrivere le velocità nei punti C e A e del baricentro dell'asta.

*** SOLUZIONE:**

1) $$\dot{x}_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_c}{d\vartheta}\,\dot{\vartheta} \quad \text{con } x_c = l\,\text{sen}\,\vartheta \Rightarrow \dot{x}_c = l\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

Quindi: $V_c = \dot{x}_c\,\vec{U_x} = l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\vec{U_x}$

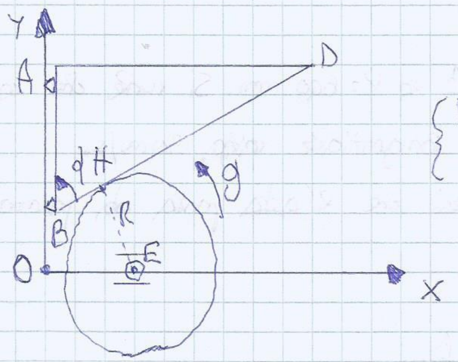
2) Nel punto C: $V_c = \dot{x}_c\,\vec{U_x} = l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\vec{U_x}$

Nel punto A: $\begin{cases} y_A = l\cos\vartheta + R \\ \dot{y}_A = -l\dot{\vartheta}\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$

Nel baricentro: $(G-O) = x_G\,\vec{U}_{x_G} + y_G\,\vec{U}_{y_G} = \left(x_c - \frac{l}{2}\text{sen}\,\vartheta\right) + \left(R + \frac{l}{2}\cos\vartheta\right)$

$$dGO/dt = \dot{x}_c - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + R + \left(-\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\,\text{sen}\,\vartheta\right).$$

ESERCIZIO 6:



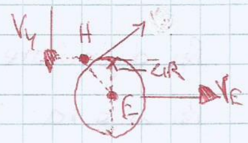
$$\begin{cases} |AB| = l \\ |BD| = 2l \end{cases} \qquad \vec{\omega} = \dot{q}\vec{U}_z$$

1) Determinare le coordinate del CIR.
2) Determinare la relazione che lega ω con la vel. della lamina.
3) La velocità $\vec{V_E}$.

* SOLUZIONE:

1) Per il teorema di Chasles si ha:

$$\begin{cases} x_C = x_E \\ y_C = y_H . \end{cases}$$



2) Si noti che:

$$\vec{V}_{y_A} = V_A \cdot \vec{U}_y \quad e \quad \vec{V}_{y_A} = \dot{y}_A \vec{U}_y = V_H = \vec{\omega}_D \times CH \qquad \text{con:}$$

$$\begin{cases} C = CIR \\ \omega_D = \text{vel. rotazione del disco} \end{cases}$$

Quindi:

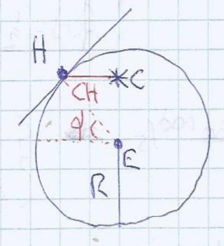
$$V_H = \dot{q}\vec{U}_z \cdot (-R\cos q\,\vec{U}_x)$$

visto che:

$$CH = -R\cos q\,\vec{U}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{q} = -\frac{\dot{y}_A}{R\cos q} = \frac{V_H}{R\cos q}$$

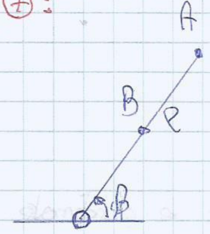


3) Si sa che V_E è lungo la componente 'x' e quindi:

$$\vec{V_E} = V_E \vec{U}_x \text{. Siccome: } \vec{V_E} = \vec{\omega}_D \cdot CE \Rightarrow V_E = \dot{q}\vec{U}_z \cdot (-R\sin q\,\vec{U}_y) = R\dot{q}\sin q\,\vec{U}_x$$

Quindi: $\vec{V_E} = -\dot{y}_A \,Tg\, q\,\vec{U}_x$

ESERCIZIO 7:

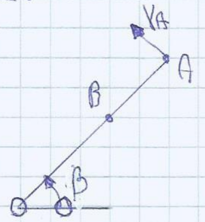


Sia noto β ed ℓ = 600 mm. Si vede che con $\dot\omega = 40°$ la velocità tangenziale valga 30 m/s.
Si consideri che l'asta parta da ferma con β = 0.

1) Si determini l'accelerazione in A e B.
2) Si determini la velocità tangenziale in B quando β = 40°
3) Si determini la velocità angolare quando β = 40°
4) Si determini l'accelerazione angolare

* SOLUZIONE:

1)



Per definizione: $\omega = \frac{d\beta}{dt}$
Per ω si ha:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \dot\omega t \\ \beta(t) = \beta_0(0) + \omega_0 t + \frac{1}{2}\dot\omega t^2 \end{cases} \rightarrow \text{eq. del moto.}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \beta_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \dot\omega t \\ \beta(t) = \frac{1}{2}\dot\omega t^2 \end{cases} \rightarrow \omega = {}^{V_A}/_{\ell} \quad \text{visto che in genere:}$$

- $\omega R = V$

con:

$$\omega = 50\ {}^{rad}/_{s} \rightarrow \begin{cases} t = {}^{\omega(t)}/_{\dot\omega} \\ \dot\omega = \frac{2\beta(t)}{t^2} \end{cases} \circ \begin{cases} \dot\omega = {}^{\omega}/_{t} \\ t^2 = \frac{2\beta(t)}{\dot\omega} = \frac{2\beta(t)}{\omega/t} \rightarrow t = \frac{2\beta(t)}{\omega} \end{cases}$$

1) Per le accelerazioni:

a_A^T = acc. tangenziale = $\dot\omega \cdot \ell$ $\qquad a_B^T = \dot\omega\, {}^{\ell}/_{2}$

a_A^R = " radiale = $\omega^2 \ell$ $\qquad a_B^R = \omega^2\, {}^{\ell}/_{2}$

2) La velocità tangenziale in B: $V_B = \omega\, {}^{\ell}/_{2}$

Come abbiamo analizzato la cinematica di un corpo rigido ora si studia la dinamica di un corpo rigido. Si riprendono le tre leggi della dinamica ovvero le tre leggi di Newton:

1) Un corpo preserva lo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme solo se non subisce perturbazioni dall'esterno. (primo principio di Newton)

2) Ogni variazione dello stato di moto di un corpo è proporzionale alla forza su di esso impressa. (secondo principio di Newton).

$$\vec{F_P} = m \cdot \vec{a_P} \qquad P = \text{punto}$$

3) Ad ogni azione corrisponde sempre una azione uguale e contraria (terzo principio di Newton).

$$F^{A \to B} = -F^{B \to A}$$

Per sollecitazione su un sistema meccanico si intende l'insieme delle forze e dei punti di applicazione:

$$\text{Sollecitazione} = \{\vec{F_i} ; P_i\}$$

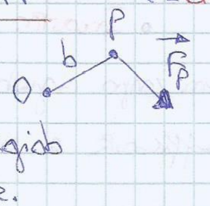
Si chiama risultante delle forze la seguente espressione:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$$

Analogamente, il momento rispetto al polo A è dato da:

$$\vec{\Pi}_A = \sum_i AP_i \cdot \vec{F_i}$$

NB: $\vec{\Pi} = b \times \vec{F}$ b = braccio

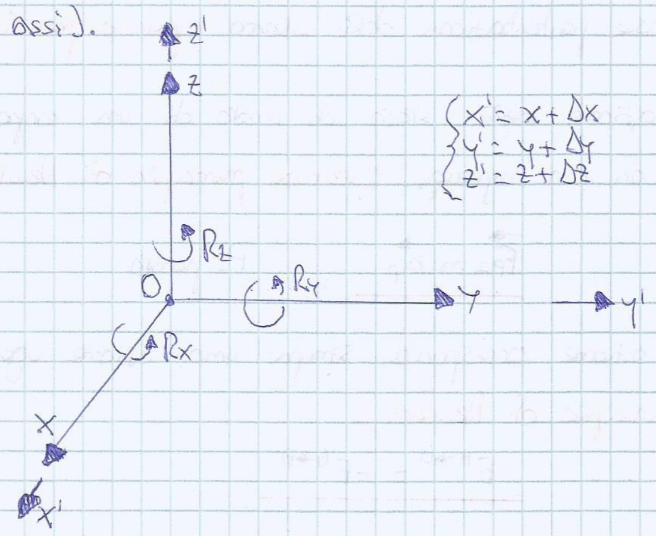


Ad ogni sistema di forze e coppie applicate ad un corpo rigido possiamo sostituire la loro risultante senza alcuna variazione.

Va inoltre ricordato che per g.d.l si intende il numero di coordinate necessarie per descrivere il moto di un corpo rigido.

Per esempio:

- Nello spazio abbiamo 6 movimenti (tre traslazioni e tre rotazioni attorno agli assi).

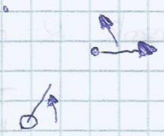


$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y \\ z' = z + \Delta z \end{cases}$$

- Nel piano si hanno tre movimenti (due traslazioni e una rotazione).

È bene notare che per un punto materiale nel piano si hanno 2 traslazioni ma nello spazio si hanno 3 traslazioni. Come detto in precedenza un vincolo è tutto ciò che limita i movimenti di un corpo.

- Carrello è un vincolo semplice (1 traslazione e una rotazione).
- Cerniera è un vincolo doppio e permette solo la rotazione.



- Incastro non permette nessun movimento.

Un corpo rigido si dice in equilibrio quando il numero di vincoli è sufficiente a bloccare ogni suo movimento. Quindi: