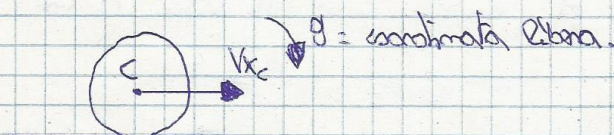


21) Sia dato il seguente disco:



Scrivere il principio dei lavori virtuali.

21) Il principio dei lavori virtuali, in statica, si basa sull'assunto di avere un sistema con soli vincoli lisci.

Per esempio:



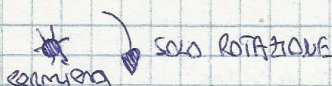
N = reazione vincolare ed è libera se è sempre perpendicolare allo spostamento.

Il vincolo non fa lavoro, sul mio sistema (idealizzazione). Scriviamo l'espressione del lavoro virtuale:

$$\delta L^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i \quad \leftarrow \text{spostamenti virtuali ammissibili}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 Lavoro virtuale Forze attive

Per spostamento virtuale si intende l'insieme di tutti gli spostamenti ammissibili in base al vincolo che si ha. Per esempio:



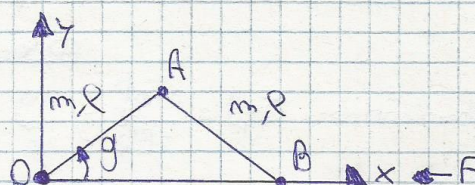
Quindi:

$$\delta L^* = Q_k(q) \delta q = 0$$

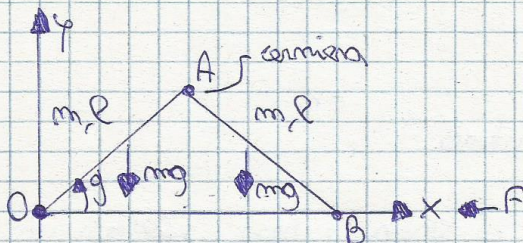
$$\text{con } \delta x_c = \frac{\partial x_c}{\partial q} \delta q = R \delta q$$

22) Sia dato il seguente sistema di aste:

Calcolare δq = ?



22) Il punto A è una carrucola ed i vincoli sono tutti fissi. Quindi:



$$\delta L^* = F \delta x_B + mg \delta y_{G_1} + mg \delta y_{G_2}$$

Quindi:

$$\delta L^* = -F \vec{U}_x \delta x_B - mg \delta y_{G_1} \vec{U}_y - mg \delta y_{G_2} \vec{U}_y$$

Si noti che:

$$y_{G_1} = O - G_1 = \frac{l}{2} \cos \theta \vec{U}_x + \frac{l}{2} \sin \theta \vec{U}_y$$

$$y_{G_2} = O - G_2 = \frac{3l}{2} \cos \theta \vec{U}_x + \frac{l}{2} \sin \theta \vec{U}_y$$

$$x_B = B - O = 2l \cos \theta \vec{U}_x$$

$$\begin{cases} -2l \sin \theta \delta \theta^* \\ (-\frac{l}{2} \sin \theta \vec{U}_x + \frac{l}{2} \cos \theta \vec{U}_y) \delta \theta^* \\ (-\frac{3l}{2} \sin \theta \vec{U}_x + \frac{l}{2} \cos \theta \vec{U}_y) \delta \theta^* \end{cases}$$

Ritornando:

$$\delta L^* = (2F \sin \theta - mg \frac{l}{2} \cos \theta - mg \frac{3l}{2} \cos \theta) \delta \theta^*$$

$$(2F \sin \theta - mgl \cos \theta) \delta \theta^* = 0$$

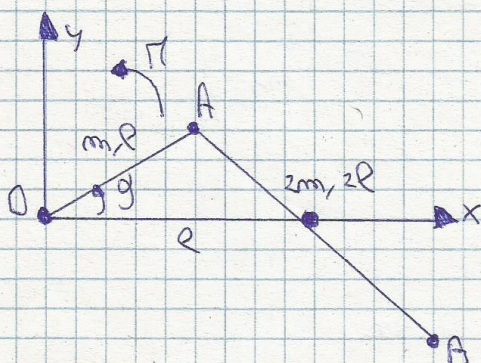
$$2F \sin \theta - mgl \cos \theta = 0 \Rightarrow 2F \sin \theta = mgl \cos \theta$$

Conclusione: $\tan \theta = \frac{mgl}{2F} = \frac{mg}{2F/l} \Rightarrow \theta = \text{Arctg}(mg/2F)$
 $\nearrow$ g di eq.

(79)

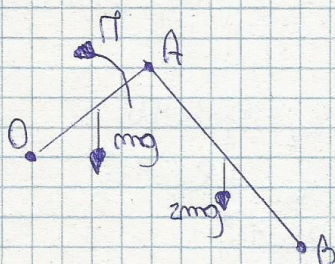
Si noti che quando il lavoro delle forze attive è nullo, allora il sistema si trova in uno stato di equilibrio.

23) Si consideri la seguente situazione:



Calcolare il valore di θ per il quale il sistema è in equilibrio.

23) Diagramma del corpo libero:



$$\delta L^* = \pi \delta y_A^* = mg \delta y_{G_1}^* - 2mg \delta y_{G_2}^*$$

Quindi:

$$y_{G_1} = \frac{r}{2} \sin \theta$$

$$y_{G_2} = r \sin \theta + \frac{2r}{2} \sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = r \sin \theta - r \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Pertanto:

$$\delta L^* = \pi \delta y_A^* - \frac{r}{2} \cos \theta \delta \theta - 2mg (r \cos \theta + \frac{r}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)) \delta \theta$$

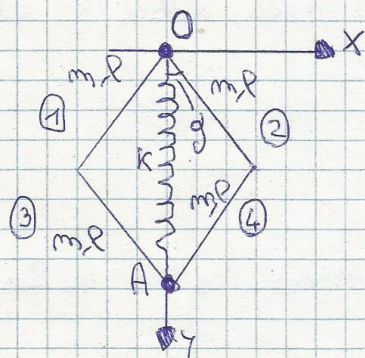


$$\left(\pi - \frac{5}{2} mg r \cos \theta - mg r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \delta \theta = 0$$

Quindi:

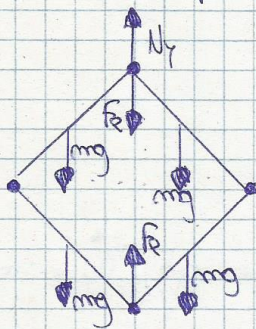
$$\pi = \frac{5}{2} mg r \cos \theta + mg r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = mg r \left(\frac{5}{2} \cos \theta + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

24) Dato il seguente sistema:



$g_{eq}?$

24) Diagramma del corpo rigido:



F_E = forza elastica

$$N_Y = F_E \Rightarrow \delta L^* = \sum_{i=1}^4 m_P \delta y_{Gi} + F_E \delta A^*$$

Quindi:

$$y_{G1} = y_{G2} = \frac{e}{2} \cos \theta \vec{U}_y$$

$$y_{G3} = y_{G4} = \frac{3}{2} R \cos \theta \vec{U}_y$$

$$y_A = 2R \cos \theta \vec{U}_y$$

Si noti che:

$$F_E = -k y_A = -k 2R \cos \theta \vec{U}_y$$

Quindi:

$$\delta L^* = 2(-m_P \frac{e}{2} \sin \theta) + 2(-m_P \frac{3}{2} R \sin \theta) + 4kR^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\sin \theta (4kR^2 \cos \theta - 4m_P R) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi \\ \theta = \pm \arccos(m_P R / kR^2) \end{cases}$$

La stessa soluzione si poteva ottenere con

il teorema dei potenziali il quale afferma che:

$$\delta L^* = \delta U \text{ e in condizioni di eq: } \delta U = 0$$

(16)

(20)



Pto di eq. stabile



Pto di eq. instabile

NB: entrambi sono punti di stazionarietà.

Alcuni potenziali molari:

$$F \quad E_p \equiv U = -F \cdot x$$

$$U = mgh$$

$$U = -c\theta$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Quindi:

$$U = \frac{1}{2} k \varphi^2 - mg \varphi_{G_1} - mg \varphi_{G_2} - mg \varphi_{G_3} - mg \varphi_{G_4} = \frac{1}{2} k 4R^2 \cos^2 \theta$$

$$- mg \frac{R}{2} \cos \theta - mg \frac{R}{2} \cos \theta - mg \frac{3}{2} R \cos \theta - mg \frac{3}{2} R \cos \theta$$

$$U = 2kR^2 \cos^2 \theta - 4mgR \cos \theta \Rightarrow (4mgR \sin \theta - 4kR^2 \cos \theta \sin \theta) = 0$$

stato stab.

25) Dato il seguente disco, calcolare le quantità meccaniche:

 $Q, k_c, k_H, T?$

25) Si ricominci che:

$$Q = mV_G \quad e \quad K_0 = K_G + (G-O) \times mV_G$$

(28)

 $K_G + (G - O) \rightarrow$ Ponte rot. baricentro.

 $mV_G \rightarrow$ Ponte tras. baricentro

Soltanto 0 si sceglie $O \equiv G$ oppure la velocità del baricentro è parallela a OG . Infine:

$$T \equiv E_c = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$\rightarrow$ ponte traslat.
 $\rightarrow$ ponte rot.

Quindi:

$$V_G = R \dot{\varphi} \vec{U}_x$$

$$\omega = -\dot{\varphi} \vec{U}_z$$

$$\Rightarrow K_c = K_G + (G/O) = K_G = I_G \omega = -\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$K_H = K_c + (G/H) m V_G = K_c + R \dot{\varphi} + m R \dot{\varphi} \vec{U}_x =$$

$$= K_c - m R^2 \dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2} m^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= I_H \omega$$

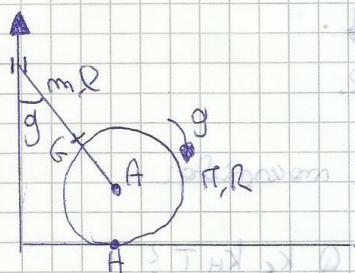
Infine:

$$T = \frac{1}{2} I_H \omega^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

Impatto:

$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \rightarrow$ basta ricordarsi il primo teorema di Koenig ed otteniamo il precedente risultato.

26) Si consideri:



Calcolare Q_{sist} , K_{sist} , T_{sist} .

26) Analisi cinematica:

$$V_G = \frac{R}{2} \dot{\varphi} G \vec{U}_x - \frac{R}{2} \dot{\varphi} S \vec{U}_y \Rightarrow V_G^2 = \frac{R^2}{4} \dot{\varphi}^2, \omega = \dot{\varphi} \vec{U}_z$$

Disco: $\vec{V}_A = R\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_x$ e $\vec{\omega}_D = -\dot{\varphi} \vec{U}_z$ e $\dot{\vartheta} = \frac{R}{h} \dot{\varphi} \sin \varphi$

$$Q_{sist} = Q_{ASTA} + Q_{DISCO} = m \left(\frac{R}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_x - \frac{R}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{U}_y \right) + \pi R \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_x$$

$$= (m \frac{R}{2} + \pi R) \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_x - m \frac{R}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{U}_y$$

$$K_{sist} = K_{ASTA} + K_{DISCO} = \left(\frac{1}{12} m R^2 \dot{\varphi}^2 \vec{U}_z + \left(-\frac{R}{2} \sin \varphi \vec{U}_x + \frac{R}{2} \cos \varphi \vec{U}_y \right) m \vec{V}_G \right) \cdot \frac{\pi R}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_z$$

(p.B. A)



$$K_{sist} = \frac{\pi R}{2} R \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_z + m \left(\frac{R^2}{h} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \vec{U}_z - \frac{R^2}{h} \dot{\varphi} \cos^2 \varphi \vec{U}_z \right) + \frac{1}{12} m R^2 \dot{\varphi}^2 \vec{U}_z$$

Impulsi:

$$T_{sist} = T_{ASTA} + T_{DISCO} = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$+ \frac{1}{2} I_H \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{h} + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{3}{2} \pi R^2 \left(\dot{\varphi} \cos \varphi \frac{R}{h} \right)^2 = \frac{3}{h} \pi R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{6} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$NB: K_{DISCO} = \frac{1}{2} \pi R^2 \dot{\vartheta}^2 =$$

$$= -\frac{\pi R^2}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{U}_z$$

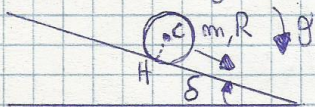
$$K_{ASTA} = K_G + (G-A) \times m \vec{V}_G$$

$$= I_G \omega + (G-A) \times m \vec{V}_G$$

$$= \frac{1}{12} m R^2 \dot{\varphi}^2 \vec{U}_z +$$

$$\left(-\frac{R}{2} \sin \varphi \vec{U}_x + \frac{R}{2} \cos \varphi \vec{U}_y \right) m \vec{V}_G$$

27) Consideriamo il seguente sistema:



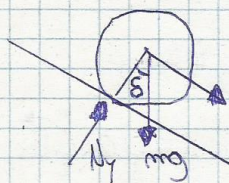
Studiamo il moto del disco ($\vartheta(t)$), nel caso
sliscio ($\mu=0$) oppure puro rotolamento.

27) Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{cases} dQ/dt = F_{attiva} + F_{reattiva} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dK_{tot}/dt = P_{attiva} + P_{reattiva} - V_{\varphi} \times Q_{sist} \end{cases}$$

$V_{\varphi} \Rightarrow V_G = 0, V_G \neq V_G$ o $0 \leq G$.



Il sistema ha 2 g.d.l. Il sistema può solo rotolare o scivolare.

Eq. cardinali:

$$\begin{cases} Q = m\dot{x}_c = m\ddot{x}_c \\ K_c = I_c \ddot{\theta} \end{cases}$$

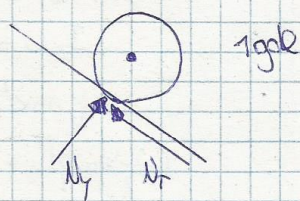
$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = g \sin \delta \\ Q = -mg \cos \delta + N_y \Rightarrow N_y = g \cos \delta m \\ -\frac{1}{2} I_c \ddot{\theta} = Q \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{2} \frac{g}{m} \sin \delta t^2 + V_0 t + x_0 \\ N_y = g \cos \delta m \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \theta(t) = \dot{\theta}_0 t \end{cases}$$

CASO STRISCIAANTE

Ora vediamo il caso di ROTOLAMENTO:



$$\dot{x}_c = R \dot{\theta} \vec{U}_x$$

$$Q = mR \ddot{\theta} \vec{U}_x$$

$$K_H = I_H \ddot{\omega} = -\frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta} \vec{U}_z$$

Quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = g \sin \delta - N_f \\ Q = -mg \cos \delta + N_f \\ -\frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta} \vec{U}_z = -g \sin \delta R \vec{U}_z \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2}{3} g \sin \delta / R \end{cases}$$

Siccome:

$$\dot{x}_c = R \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x}_c = \frac{2}{3} g \sin \delta \quad \text{e quindi} \quad x_c = \frac{1}{3} g \sin \delta t^2 + V_0 t + x_0$$

$$N_f = mg \sin \delta - \frac{2}{3} g \sin \delta \quad \text{e} \quad N_y = mg \cos \delta$$

Integrazione.