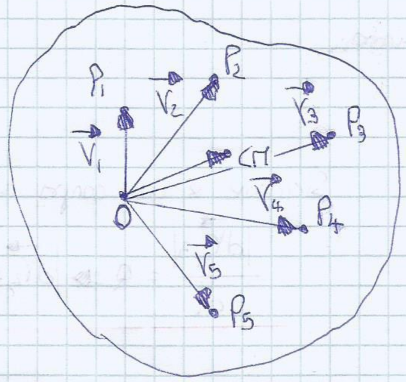
Si inizia lo studio della meccanica razionale partendo dalla definizione di corpo rigido. Per corpo rigido si intende un qualsiasi corpo in cui la distanza tra i punti al suo interno rimane costante durante le moto. Un corpo rigido è indeformabile ed, idealmente, la sua distribuzione di massa è costante nel tempo.



CM = Centro di massa

Prima di proseguire con il discorso legato al corpo rigido facciamo un breve ripasso sui concetti geometrici di base. Per prima cosa viene definito il concetto di spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica composta da un insieme di vettori e da un campo. Per campo si intende quell'insieme nel quale si possono effettuare le quattro operazioni fondamentali: somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione. Solitamente si indica con 'K' un generico campo. Gli elementi scalari in K godono delle seguenti proprietà:

1) $\forall x, y, z \in K \rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$ proprietà associativa
2) $x+y = y+x \rightarrow$ proprietà commutativa
3) $x+\phi = \phi+x \rightarrow \phi$ = elemento neutro
4) $x+y = \phi \rightarrow y$ = opposto di x

5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

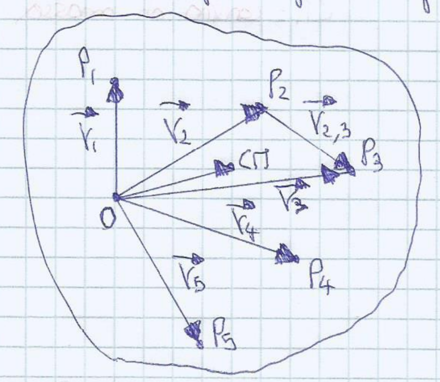
6) $x \cdot y = y \cdot x$

7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x$

8) $x \cdot y = 1$

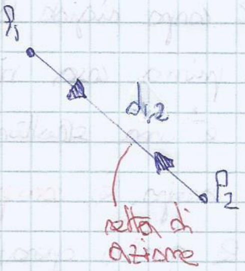
9) $x(y+z) = xy + xz \Rightarrow$ proprietà distributiva

Riconsideriamo il corpo rigido di prima.



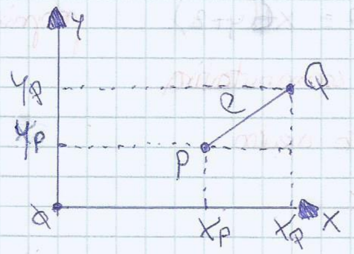
Siccome è un corpo rigido si ha:

$$\frac{|d\vec{r}_{2,3}|}{dt} = 0 \Rightarrow |d\vec{r}_{2,3}| = 0$$

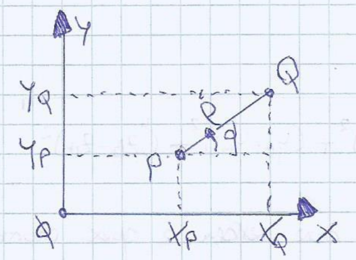


- Dato un sistema di N punti materiali che, per comodità chiamiamo S, si definisce configurazione del sistema (ad un dato istante) l'insieme delle posizioni occupate dai punti del medesimo.

In molte applicazioni pratiche le coordinate dei punti si possono esprimere sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.

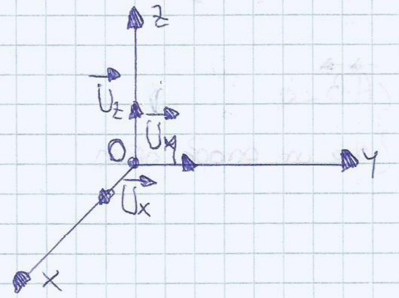


$$\begin{cases} P(x_P, y_P) \\ Q(x_Q, y_Q) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_Q = x_P + \rho\cos\varphi \\ y_Q = y_P + \rho\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Indichiamo con E un generico spazio vettoriale. All'interno di tale spazio vettoriale indichiamo con O l'origine in cui, per intenderci, si posiziona un generico osservatore. Lo spazio euclideo è il nostro spazio vettoriale E.



sistema di riferimento fisso

↓

Non varia la posizione di O e l'orientamento della terna.

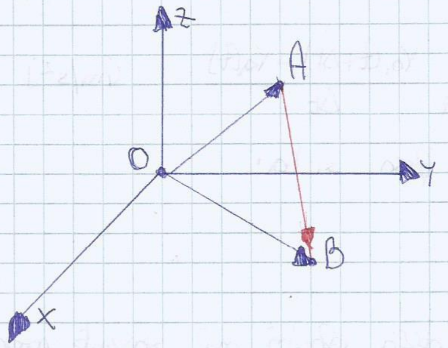
$\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z$ sono i versori (vettori di modulo unitario) dei tre assi. Data l'ortogonalità dei tre versori si può scrivere:

$$\vec{U}_x\cdot\vec{U}_y = \vec{U}_x\cdot\vec{U}_z = \vec{U}_y\cdot\vec{U}_z = 0 \quad e \quad \vec{U}_x\cdot\vec{U}_x = \vec{U}_y\cdot\vec{U}_y = \vec{U}_z\cdot\vec{U}_z = 1$$

→ PRODOTTO SCALARE TRA VERSORI

NB: $|\vec{U}_x|$ = modulo del versore.

Dati due punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ si ha:



$$\begin{cases} OA = x_A\vec{U}_x + y_A\vec{U}_y + z_A\vec{U}_z \\ OB = x_B\vec{U}_x + y_B\vec{U}_y + z_B\vec{U}_z \end{cases}$$

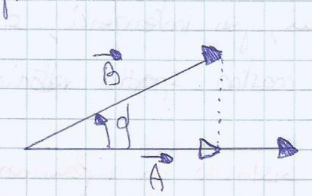
↓

$$AB = OB - OA = (x_B - x_A)\vec{U}_x + (y_B - y_A)\vec{U}_y + (z_B - z_A)\vec{U}_z$$

Il modulo del vettore AB vale:

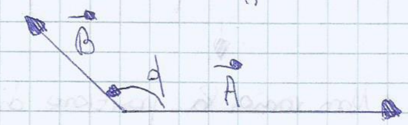
$$|AB| = \sqrt{AB \cdot BA} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si ricordi che il prodotto scalare tra due vettori è quel numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo vettore per il modulo del secondo vettore lungo il primo.



$\vec{A}\cdot\vec{B} > 0$

φ è un angolo acuto ($<90°$)



$\vec{A}\cdot\vec{B} < 0$

φ è un angolo ottuso

In coordinate polari si ha:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\cos\varphi$$

In fisica classica la cinematica si occupa di studiare i tipi di moto di una particella (punto materiale). Una delle grandezze fondamentali è la velocità:

$$\vec{V}_A = \frac{dOA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{OA(t+\Delta t) - OA(t)}{\Delta t} \qquad (m/s)$$

Analogamente per l'accelerazione:

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_A(t+\Delta t) - V_A(t)}{\Delta t} \qquad (m/s^2)$$

In un sistema di riferimento fisso si ha:

$$V_0 = 0$$

Possiamo riscrivere la formula della velocità nel seguente modo:

$$\vec{V}_A = \frac{dx_A}{dt}\vec{U}_x + \frac{dy_A}{dt}\vec{U}_y + \frac{dz_A}{dt} = \dot{x}_A\vec{U}_x + \dot{y}_A\vec{U}_y + \dot{z}_A\vec{U}_z$$

Analogamente per l'accelerazione:

$$\vec{a}_A = \frac{d^2x_A}{dt}\vec{U}_x + \frac{d^2y_A}{dt} + \frac{d^2z_A}{dt}\vec{U}_z = \ddot{x}_A\vec{U}_x + \ddot{y}_A\vec{U}_y + \ddot{z}_A\vec{U}_z$$

E per quanto riguarda la velocità relativa $\frac{dAB}{dt} = ?$

Si ricordi che:

$$AB = OB - OA \Rightarrow \frac{dAB}{dt} = \frac{dOB}{dt} - \frac{dOA}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

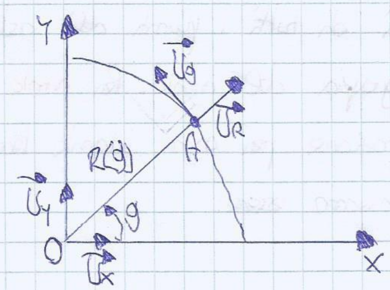
Quindi:

$$\frac{dAB}{dt} = (\dot{x}_B - \dot{x}_A)\vec{U}_x + (\dot{y}_B - \dot{y}_A)\vec{U}_y + (\dot{z}_B - \dot{z}_A)\vec{U}_z$$

In un sistema fisso $\vec{V}_0 = 0$. In un sistema mobile $V_0 \neq 0$ si ha:

$$\vec{V}_A = \dot{x}_A\vec{U}_x + \dot{y}_A\vec{U}_y + \dot{z}_A\vec{U}_z + x_A\dot{\vec{U}}_x + y_A\dot{\vec{U}}_y + z_A\dot{\vec{U}}_z$$

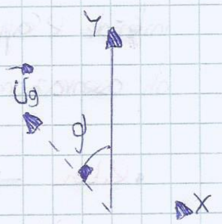
Si consideri ora un generico punto A su una traiettoria circolare.



$$OA = R(\vartheta)\vec{U}_R \quad \text{con} \quad \vec{U}_R = \vec{U}_x\cos\vartheta + \vec{U}_y \,\text{sen}\,\vartheta$$

Quindi:

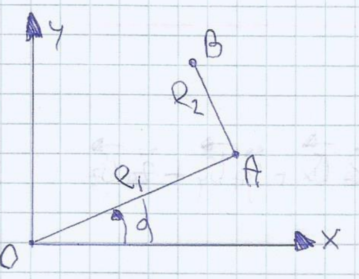
$$\vec{U}_\vartheta = -\vec{U}_x \,\text{sen}\,\vartheta + \vec{U}_y\cos\vartheta$$



Possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{U}_R}{dt} = (-\vec{U}_x \,\text{sen}\,\vartheta + \vec{U}_y\cos\vartheta)\,\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}\vec{U}_\vartheta \quad , \quad \frac{d\vec{U}_\vartheta}{dt} = (-\vec{U}_x\cos\vartheta - \vec{U}_y \,\text{sen}\,\vartheta)\,\dot{\vartheta} = -\dot{\vartheta}\vec{U}_R$$

Il seguente esempio mostra un uso "pratico" delle precedenti relazioni:



$l = l_1 + l_2$ → ASTA RIGIDA COMPOSTA

Si può scrivere:

$$OB = OA + AB = l_1 \vec{U}_R + l_2 \vec{U}_\vartheta$$

⇓

$$\vec{V}_B = l_1 \frac{d\vec{U}_R}{dt} + l_2 \frac{d\vec{U}_\vartheta}{dt} = l_1 \dot{\vartheta} \vec{U}_\vartheta - l_2 \dot{\vartheta} \vec{U}_R$$ → vel. punto B.

Analogo discorso per l'accelerazione:

$$\vec{a}_B = l_1 \ddot{\vartheta} \vec{U}_\vartheta + l_1 \dot{\vartheta} \frac{dU_\vartheta}{dt} - l_2 \dot{\vartheta} \frac{dU_R}{dt} = l_1 \ddot{\vartheta} \vec{U}_\vartheta - l_1 \dot{\vartheta}^2 \vec{U}_R - l_2 \ddot{\vartheta} U_R - l_2 \dot{\vartheta}^2 \vec{U}_\vartheta$$

$$= (-l_1 \dot{\vartheta}^2 - l_2 \ddot{\vartheta}) \vec{U}_R + (l_1 \ddot{\vartheta} - l_2 \dot{\vartheta}^2) \vec{U}_\vartheta$$

Si consideri un corpo in movimento. Nella fisica classica quando si ha a che fare con punti materiali lo studio si semplifica, ma quando si ha a che fare con un corpo esteso le cose si complicano. Si definisce atto di moto l'insieme delle coppie di posizioni e velocità di tutti i punti del sistema ad un dato istante di osservazione. È una fotografia del moto. Per moto si intende l'applicazione che fornisce una configurazione per ogni istante temporale di osservazione. I corpi rigidi, come vedremo, possono essere:

- liberi → libero di muoversi nello spazio
- vincolati → vincolato nei movimenti.

Si consideri la seguente situazione: