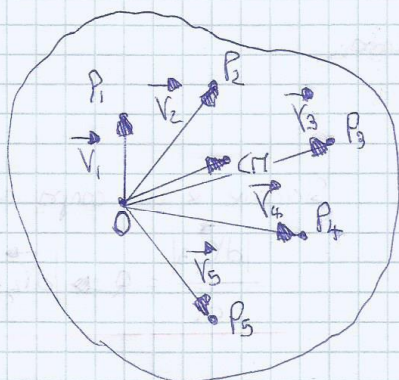


- Il corpo rigido	Pg 1
- Il centro di massa	Pg 1
- Lo spazio vettoriale	Pg 1
- Il campo	Pg 1
- La configurazione di un sistema	Pg 2
- Il sistema di riferimento fisso	Pg 3
- L'atto di moto	Pg 6
- Corpi rigidi liberi o vincolati	Pg 6
- Vincoli di posizione	Pg 7
- Formula fondamentale della cinematica rigida	Pg 7
- Teorema di Poisson	Pg 7
- Teorema di Rivale	Pg 8
- Rotazione traslazionale e rotazionale	Pg 9
- Centro di istantanea rotazione	Pg 9
- Vincoli interni, esterni, dinamici, analfinimenti	Pg 11
- Il carrello, pattino, cerniera, incastro	Pg 12
- Vincoli di contatto	Pg 12
- Vincoli di appoggio	Pg 13
- Teorema di Chaper	Pg 14
- Primo, secondo e terzo principio di Newton	Pg 19
- Sistema isostatico, iperstatico, labile.	Pg 21
- Il bilanciere	Pg 22
- Forza motrice, resistente	Pg 23
- La coppia e il peso	Pg 23
- Sollecitazioni equivalenti	Pg 23
- Teorema di equivalenza	Pg 23

- La potenza virtuale	Pg 24
- Momento di inerzia	Pg 29
- Guscio cilindrico, pieno,	Pg 29
- Teorema di Huygens - Steiner	Pg 30
- Velocità virtuale, vincolo bilatero, ideale, perfetto	Pg 31
- Il lavoro virtuale	Pg 32
- Velocità virtuale	Pg 33
- Configurazione interna e di confine	Pg 34
- Principio dei lavori virtuali	Pg 34
- Energia meccanica, cinetica, potenziale	Pg 35
- Bilanciamento	Pg 36
- Teorema di stazionarietà del potenziale	Pg 36
- Teorema di Tomicella	Pg 37
- Eulero - Lagrange	Pg 39
- Configurazione di equilibrio	Pg 41
- Prima e seconda equazione cardinale della statica	Pg 41
- Dinamica di un corpo rigido	Pg 44
- Quantità di moto	Pg 44
- Momento della quantità di moto	Pg 44
- Teorema di Koenig	Pg 45
- Teorema del moto del centro di massa	Pg 48
- Potenza delle forze e teorema dell'energia cinetica	Pg 48
- Terza equazione cardinale della dinamica	Pg 48
- Teorema di Coriolis, per un corpo rigido	Pg 52
- Formulazioni	Pg 53
- Esercizi	Pg 57

①

Si inizia lo studio della meccanica razionale partendo dalla definizione di **corpo rigido**. Per corpo rigido si intende un qualsiasi corpo in cui la distanza tra i punti al suo interno rimane costante durante le moto. Un corpo rigido è indeformabile ed, internamente, la sua distribuzione di massa è costante nel tempo.



CT = Centro di massa

Prima di proseguire con il discorso legato al corpo rigido facciamo un breve ripasso sui concetti geometrici di base. Per prima cosa viene definita il concetto di **spazio vettoriale**. Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica composta da un insieme di vettori e da un campo. Per **campo** si intende quell'insieme nel quale si possono effettuare le quattro operazioni fondamentali: somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione. Solitamente si indica con K un generico campo. Gli elementi scalari in K godono delle seguenti proprietà:

$$1) \forall x, y, z \in K \Rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$$

proprietà associativa

$$2) x+y = y+x \Rightarrow \text{proprietà commutativa}$$

$$3) x+0 = 0+x \Rightarrow 0 = \text{elemento neutro}$$

$$4) x+y=0 \Rightarrow y = \text{opposto di } x$$

②

5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

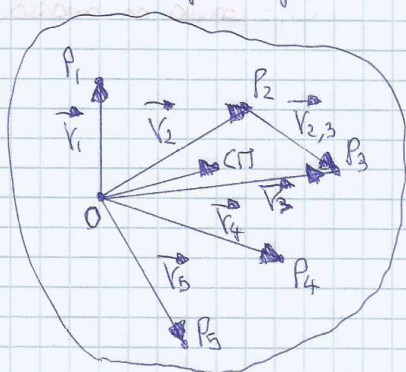
6) $x \cdot y = y \cdot x$

7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x$

8) $x \cdot y = 1$

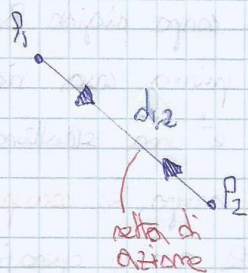
9) $x(y+z) = xy+xz \rightarrow$ *proprietà distributiva*

Risconsideriamo il corpo rigido di prima.



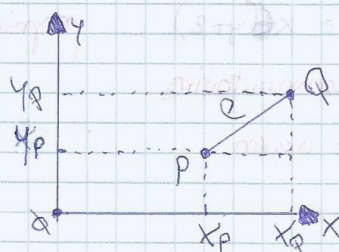
Siccome è un corpo rigido si ha:

$$\frac{|\vec{v}_{2,3}|}{dt} = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{2,3}| = 0$$



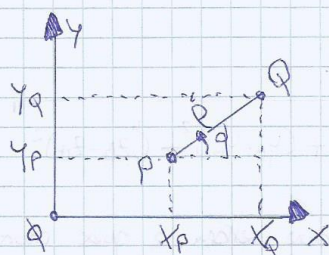
- Dato un sistema di N punti materiali che, per comodità chiamiamo S , si definisce *configurazione del sistema* (ad un dato istante) l'insieme delle posizioni occupate dai punti del medesimo.

In molte applicazioni pratiche le coordinate dei punti si possono esprimere sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.



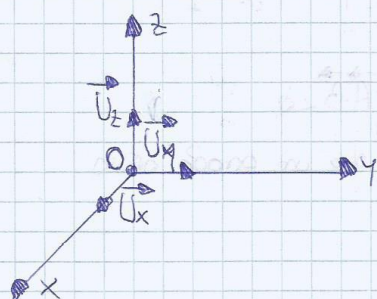
$$\begin{cases} P(x_p, y_p) \\ Q(x_q, y_q) \end{cases}$$

③



$$\begin{cases} x_q = x_p + r \cos \alpha \\ y_q = y_p + r \sin \alpha \end{cases}$$

Indichiamo con E un generico spazio vettoriale. All'interno di tale spazio vettoriale indichiamo con O l'origine in cui, per comodità, si pone un generico osservatore. Lo spazio euclideo è il nostro spazio vettoriale E .



sistema di riferimento fisso

Non varia la posizione di O e l'orientamento della terna.

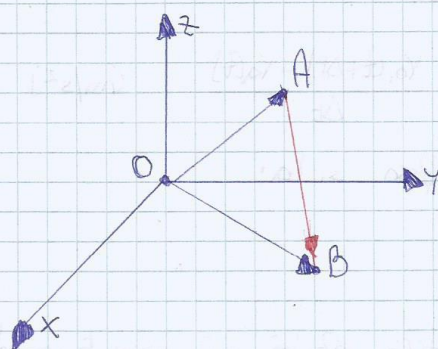
$\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sono i versori (vettori di modulo unitario) dei tre assi. Dato l'ortogonalità dei tre versori si può scrivere:

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \text{e} \quad \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$$

Prodotto scalare tra versori

NB: $|\vec{u}_x|$ = modulo del versore.

Dati due punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ si ha:



$$\begin{cases} \vec{OA} = x_A \vec{u}_x + y_A \vec{u}_y + z_A \vec{u}_z \\ \vec{OB} = x_B \vec{u}_x + y_B \vec{u}_y + z_B \vec{u}_z \end{cases}$$

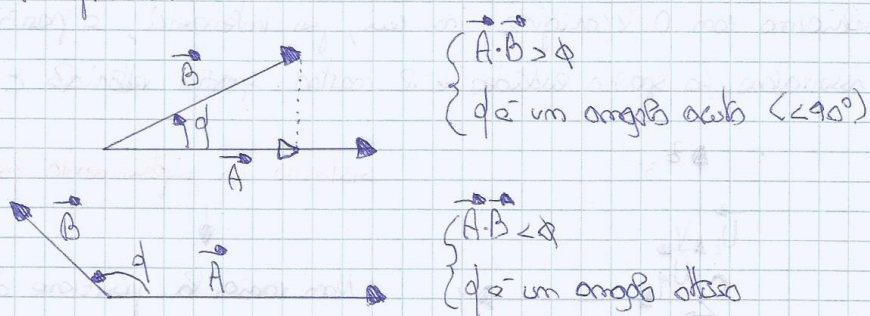
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A) \vec{u}_x + (y_B - y_A) \vec{u}_y + (z_B - z_A) \vec{u}_z$$

④

Il modulo del vettore AB vale:

$$|AB| = \sqrt{AB \cdot BA} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si ricorda che il prodotto scalare tra due vettori è quel numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo vettore per il modulo del secondo vettore e per il coseno dell'angolo tra i due vettori.



In coordinate polari si ha:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi$$

In fisica classica la cinematica si occupa di studiare i tipi di moto di una particella (punto materiale). Una delle grandezze fondamentali è la velocità:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OA}(t+\Delta t) - \vec{OA}(t)}{\Delta t} \quad (\text{m/s})$$

Analogamente per l'accelerazione:

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_A(t+\Delta t) - \vec{v}_A(t)}{\Delta t} \quad (\text{m/s}^2)$$

In un sistema di riferimento fisso si ha:

$$\vec{v}_O = 0$$

Posiamo scrivere la formula della velocità nel seguente modo:

(5)

$$\vec{v}_A = \frac{dx_A}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy_A}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz_A}{dt} \vec{u}_z = \dot{x}_A \vec{u}_x + \dot{y}_A \vec{u}_y + \dot{z}_A \vec{u}_z$$

Analogamente per l'accelerazione:

$$\vec{a}_A = \frac{d\dot{x}_A}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\dot{y}_A}{dt} \vec{u}_y + \frac{d\dot{z}_A}{dt} \vec{u}_z = \ddot{x}_A \vec{u}_x + \ddot{y}_A \vec{u}_y + \ddot{z}_A \vec{u}_z$$

E per quanto riguarda la velocità relativa $\frac{dAB}{dt} = ?$

Si ricordi che:

$$AB = OB - OA \Rightarrow \frac{dAB}{dt} = \frac{dOB}{dt} - \frac{dOA}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

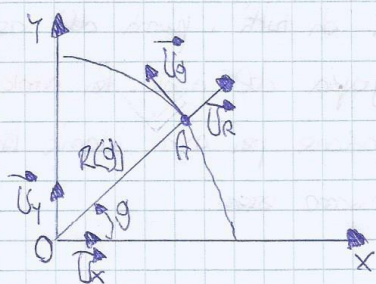
Quindi:

$$\frac{dAB}{dt} = (\dot{x}_B - \dot{x}_A) \vec{u}_x + (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \vec{u}_y + (\dot{z}_B - \dot{z}_A) \vec{u}_z$$

In un sistema fisso $\vec{v}_A = 0$. In un sistema mobile $\vec{v}_A \neq 0$ si ha:

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{u}_x + \dot{y}_A \vec{u}_y + \dot{z}_A \vec{u}_z + x_A \dot{\vec{u}}_x + y_A \dot{\vec{u}}_y + z_A \dot{\vec{u}}_z$$

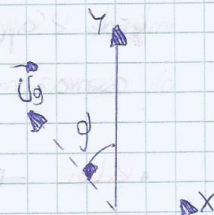
Si consideri ora un generico punto A su una traiettoria circolare.



$$OA = R(g) \vec{u}_r \text{ con } \vec{u}_r = \vec{u}_x \cos g + \vec{u}_y \sin g$$

Quindi:

$$\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x \sin g + \vec{u}_y \cos g$$

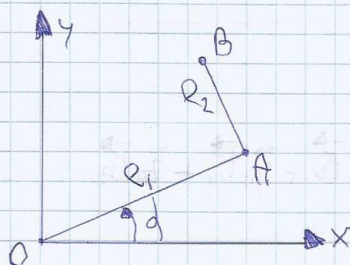


Possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = (-\vec{u}_x \sin g + \vec{u}_y \cos g) \dot{g} = \dot{g} \vec{u}_\theta, \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (-\vec{u}_x \cos g - \vec{u}_y \sin g) \dot{g} = -\dot{g} \vec{u}_r$$

⑥

Il seguente esempio mostra un uso "pratico" delle precedenti relazioni:



$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow$ ASTA RIGIDA COMPOSTA

Si può scrivere:

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_1 \vec{U}_x + \mathbf{r}_2 \vec{U}_y$$

$$\vec{v}_B = \mathbf{r}_1 \frac{d\vec{U}_x}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{d\vec{U}_y}{dt} = \mathbf{r}_1 \dot{\theta} \vec{U}_y - \mathbf{r}_2 \dot{\theta} \vec{U}_x \rightarrow \text{vel. punto B.}$$

Analogo discorso per l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \mathbf{r}_1 \ddot{\theta} \vec{U}_y + \mathbf{r}_1 \dot{\theta} \frac{d\vec{U}_y}{dt} - \mathbf{r}_2 \dot{\theta} \frac{d\vec{U}_x}{dt} = \mathbf{r}_1 \ddot{\theta} \vec{U}_y - \mathbf{r}_1 \dot{\theta}^2 \vec{U}_x - \mathbf{r}_2 \dot{\theta}^2 \vec{U}_y - \mathbf{r}_2 \ddot{\theta} \vec{U}_x \\ &= (-\mathbf{r}_1 \dot{\theta}^2 - \mathbf{r}_2 \ddot{\theta}) \vec{U}_x + (\mathbf{r}_1 \ddot{\theta} - \mathbf{r}_2 \dot{\theta}^2) \vec{U}_y \end{aligned}$$

Si consideri un corpo in movimento. Nella fisica classica quando si ha a che fare con punti materiali lo studio si semplifica, ma quando si ha a che fare con un corpo esteso le cose si complicano. Si definisce **atto di moto** l'insieme delle coppie di posizioni e velocità di tutti i punti del sistema ad un dato istante di osservazione. E' una fotografia del moto. Per **moto** si intende l'applicazione che fornisce una configurazione per ogni istante temporale di osservazione. I corpi rigidi, come vedremo, possono essere:

- **liberi** $\rightarrow$ liberi di muoversi nello spazio

- **vincolati** $\rightarrow$ vincolati nei movimenti.

Si consideri la seguente situazione: