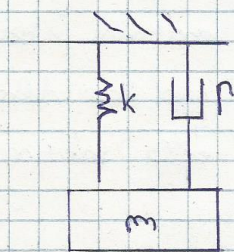
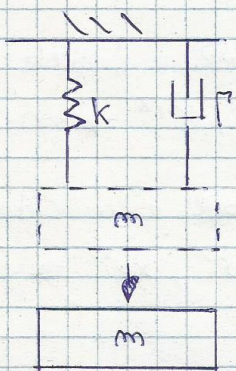


(61)

Si consideri il caso in verticale:



condizione di equilibrio statico.



condizione di equilibrio dinamico

Quindi: $-m\ddot{x} - r\dot{x} - k(x + \Delta x) + mg = 0$

Siccome:

$$-k\Delta x = mg \Rightarrow -m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = 0$$

Se trascuriamo B simultaneamente otteniamo:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x = X e^{it}$$

$$\dot{x} = iX e^{it}$$

$$\ddot{x} = -X e^{it}$$

Si presta attenzione al fatto che una equazione differenziale a coefficienti costanti si presenta in questa forma:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Per esempio:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

In generale λ e X sono numeri complessi.

$$m\lambda^2 X e^{it} + kX e^{it} = 0$$

$$(m\lambda^2 + k)X e^{it} = 0$$

$$\text{ossia: } m\lambda^2 + k = 0$$

(62)

La soluzione generale sarà data da:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{dove } c_1, c_2 \text{ sono parametri liberi}$$

$y_1(x), y_2(x)$ = una base dello spazio delle soluzioni.

Per trovare una base devo risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione caratteristica seguente:

$$az^2 + bz + c = 0 \rightarrow 2 \text{ soluzioni reali e distinte } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Quindi: $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\rightarrow 2 \text{ soluzioni reali e coincidenti } \lambda_1 = \lambda_2$$

Quindi: $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Facciamo un esempio illustrativo:

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \Rightarrow \text{equazione caratteristica: } z^2 - 5z + 4 = 0$$

Quindi:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$$

sol: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$
BASE: e^{4x}, e^x

Trasliamo alla nostra equazione differenziale:

$$(m\omega^2 + k) X e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow (m\omega^2 + k) = 0$$

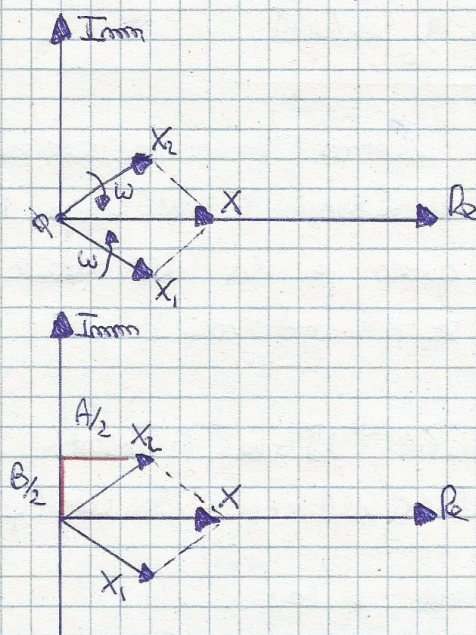
$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

ω viene detta **pulazione del sistema** e si misura in rad/s.

La soluzione diventa: $\dot{x} = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t} = x_1 e^{i\omega t} + x_2 e^{-i\omega t}$

Quindi: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{pulazione propria}$

Possiamo rappresentare la soluzione precedente sul piano di Gauss:



$$X_1 = A/2 - iB/2$$

$$X_2 = A/2 + iB/2$$

Applicando la formula di Eulero si ha:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Quindi:

$$X = (X_1 + X_2) \cos \omega t + i(X_1 - X_2) \sin \omega t$$

$$\Downarrow$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\text{con } \begin{cases} A = C \cos \varphi \\ B = -C \sin \varphi \end{cases}$$

Quindi:

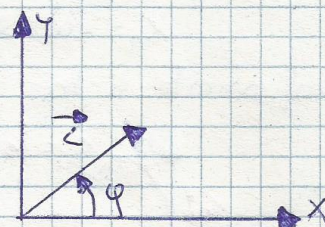
$$x = C \cos \omega t \cos \varphi - C \sin \omega t \sin \varphi$$

da cui:

$$C^2 = A^2 + B^2 \text{ e } \tan \varphi = -B/A$$

In forma esponenziale si ha:

$$\underline{x} = C e^{i(\omega t + \varphi)} = C e^{i\omega t}$$



(64)

Per il modo libero di un sistema meccanico a 1 g.d.l. consiste essenzialmente in una sollecitazione armonica di ampiezza C e pulsazione ω . Date le condizioni iniziali del sistema si può scrivere:

$$x = X_0 \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Nella realtà, quando un sistema meccanico subisce una vibrazione essa non permane indefinitamente nel tempo. Passa poco la sua ampiezza diminuirà, questo per via dell'attrito.

Si consideri, per esempio, le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x = X_0 \\ \dot{x} = \dot{X}_0 \end{cases} (t=0) \Rightarrow x = \operatorname{Re}[C e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[C(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \operatorname{Re}[C(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi))]$$

Considerando solo la parte reale si ha:

$$x = C \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{X_0 = C \cos \varphi} \quad \text{e} \quad \underline{C = X_0 / \cos \varphi}$$

Analogamente:

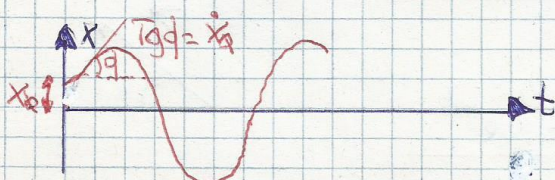
$$\dot{x} = \operatorname{Re}[i\omega C(\cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi))]$$

Considerando solo la parte reale:

$$\dot{x} = -\omega C \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{X}_0 = -\omega C \sin \varphi$$

Graficamente si ha:



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = \dot{X}_0 / \omega X_0 \\ C = X_0 / \cos \varphi \end{cases}$$

(65)

Consideriamo l'equazione differenziale m e smorzamento:

$$-m\ddot{x} - \gamma\dot{x} - kx = 0$$

Si ha:

$$-m\lambda^2 x e^{\lambda t} - \gamma\lambda x e^{\lambda t} - kx e^{\lambda t} = 0$$

$$\downarrow$$

$$(-m\lambda^2 - \gamma\lambda - k)x e^{\lambda t} = 0$$

Da:

$$\lambda^2 m + \gamma\lambda + k = 0 \Rightarrow x \text{ non può mai essere nulla.}$$

Risolviamo l'equazione:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

Considera:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow ?$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow ?$$

Per gli ultimi due casi introduciamo il **smorzamento critico** γ_c definito come il smorzamento che annulla il discriminante:

$$\underline{\gamma_c = 2m\omega}$$

Consideriamo il caso in cui $\gamma < \gamma_c$ e $\Delta < 0$. Definiamo anche **fattore di smorzamento** (h) il rapporto tra il smorzamento del sistema e il smorzamento critico.

$$\underline{h = \frac{\gamma}{\gamma_c} = \frac{\gamma}{2m\omega}}$$

(66)

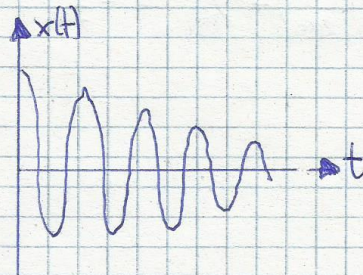
$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{r}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} = -d \pm i\sqrt{\omega^2 - d^2} = -d \pm i\omega_d$$

$$\text{con } d = \frac{r}{2m} \text{ e } \omega_d = \sqrt{\omega^2 - d^2} = \omega \sqrt{1 - h^2}$$

Ne caso di $\Delta < 0$ si ha $h < 1$ e $r < r_c$. Trovata la posizione si sostituiscono nell'equazione di oscillazione:

$$x = e^{-idt} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)).$$

Questa cosa vuol dire? Vuol dire che il sistema compie un moto oscillatorio smorzato.

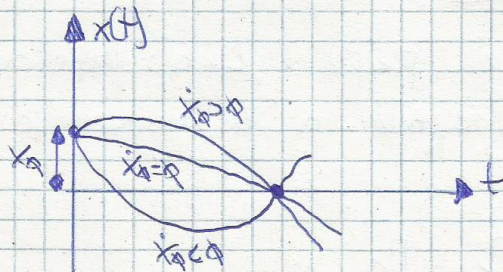


$r < r_c \rightarrow$ **SMOZZATO**

Ne caso in cui $\Delta = 0$ ossia $r = r_c$ e $h = 1$ le due soluzioni sono reali e negative. Quindi:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -d \Rightarrow x = X_1 e^{-idt} + X_2 t e^{-idt}$$

Graficamente:



Non si hanno oscillazioni

La Rata che permette la vibrazione del sistema meccanico viene anche detta **forzante**. La forzante può anche essere:

- **a gradino** $\rightarrow x_p(t) = X_0$



$$kX_0 = F_0 \Rightarrow X_0 = F_0/k$$

La risposta del sistema alla forzante a gradino consiste in una oscillazione smorzata che per $t \rightarrow \infty$ tende a regime.

- **armonica** $\rightarrow$ dove: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

dove:

F_0 = ampiezza della forzante

ω = pulsazione della forzante

Quindi, nel caso di una forzante armonica si può scrivere:

$$x_p = X_0 \cos(\omega t + \phi)$$

o in forma esponenziale:

$$f(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Forzante:

$$\vec{x} = X_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{\vec{x}} = i\omega \vec{x}$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2 \vec{x} + i r \omega \vec{x} + k \vec{x}) e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$



$$X_0 = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i r \omega} = \frac{F_0/k}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2i \frac{r}{k} \frac{\omega}{\omega_n}}$$

(68)

con: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $\rho = \frac{c}{m\omega}$, $h = \frac{P_0}{P_c}$, $q = \frac{s}{\omega}$

Allora prima si ottiene:

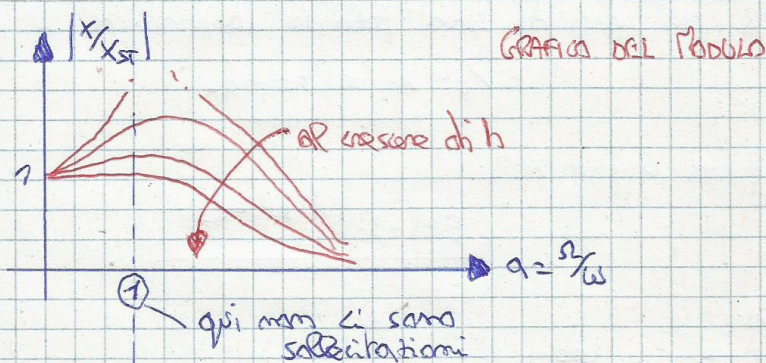
$$X_q = \frac{F_0/k}{(1-q^2) + 2iah} = \frac{X_q \text{ statica}}{(1-q^2) + 2iah}$$

Si noti che: $\tan \phi = -\frac{2h}{1-q^2}$

Il termine F_0/k è lo **spostamento statico** X_{st} , e indica di quanto si allunga la molla a partire dalla condizione di equilibrio statico quando viene applicata una forza F_0 . Quindi:

$$\frac{X_q}{X_{st}} = \frac{1}{(1-q^2) + 2iah}$$

Il grafico è il seguente:



Nel caso che $q \ll 1$ si ha che tende ad ottenere lo smorzamento e quindi il sistema è in condizioni statiche. Per $q=1$ siamo in **zona di risonanza** ($X_q/X_{st} \rightarrow \infty$). Per $q > 1$ siamo in **zona sismografica** e quindi l'ampiezza della vibrazione decresce con l'aumentare della perturbazione.