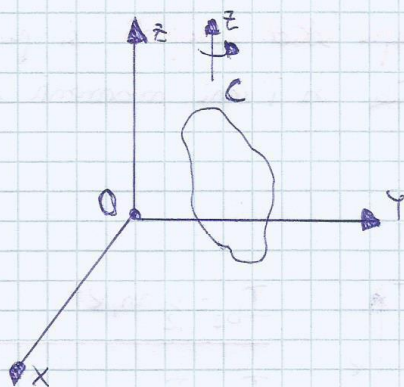


(37)

Un'altra grandezza fondamentale è il **momento di inerzia**. Questa grandezza esprime l'inerzia dei corpi rispetto ai moti rotazionali. Svalga le medesime unità della massa nei moti traslazionali. Si consideri la seguente situazione:



Si supponga che il corpo C ruoti attorno all'asse z ad una distanza R dall'origine O . Il momento di inerzia I vale:

$$\underline{I = mR^2}$$

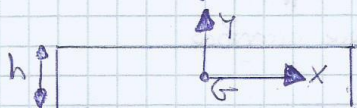
L'unità di misura del momento di inerzia è kgm^2 ed è una grandezza scalare. Maggiore è il momento di inerzia, tanto più è difficile far ruotare il corpo attorno all'asse scelto.

Per aumentare il momento di inerzia è sufficiente aumentare la massa oppure la distanza dall'asse di rotazione o entrambe.

Il momento di inerzia totale di un sistema di punti materiali vale:

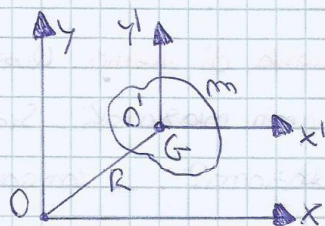
$$\underline{I_{\text{tot}} = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots + m_n R_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2}$$

Vediamo un esempio:



$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow I = \int_{-L/2}^{+L/2} \rho V x^2 dx = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{1}{12} mL^2$$

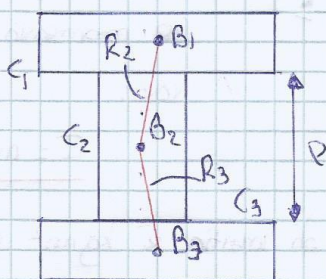
Calcolando un momento di inerzia si possono ricavare tutti i momenti rispetto agli altri poli.



$$I_O = I_O' + mR^2$$

dove: mR^2 = momento di trasporto

Quando si ha n. di corpi con corpi solidi composti si può trovare il baricentro di ciascun corpo semplice ed i vari momenti si possono esprimere rispetto ai vari baricentri.



$$I_{B2} = \frac{1}{12} m_1 P^2$$

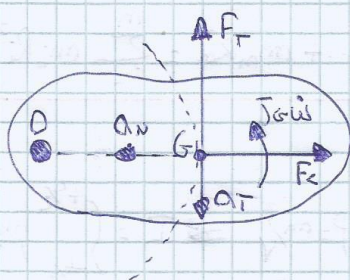
$$I_{B1} = I_{B2} + m_2 R_2^2$$

$$I_{A3} = I_{B2} + m_3 R_3^2$$

La coppia di inerzia σ data da:

$$\sigma_{im} = -J\dot{\omega} \quad \text{dove } J = \text{inerzia del corpo}$$

$\dot{\omega}$ = accelerazione angolare.



La coppia di inerzia $J\dot{\omega}$

si oppone in verso all'accelerazione angolare.

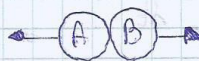
Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} a_T = \dot{\omega}(G-O) \\ a_N = \omega^2(G-O) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_T = m\dot{\omega}(G-O) \\ F_C = m\omega^2(G-O) \end{cases}$$

Valiamo di impulzione e grandezze fondamentali della dinamica. Come già detto la quantità di moto è una grandezza vettoriale importante soprattutto quando si ha a che fare con gli urti. Essa ci permette di mantenere invariata, direzione e verso della velocità dei corpi dopo l'urto.

$$\vec{P} = m\vec{V}$$



Durante l'urto dei due corpi A e B si ha:

$$F_{AB} + F_{BA} = 0$$

Risultando che:

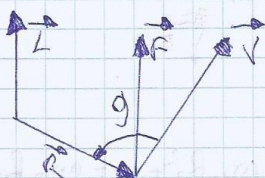
$$F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Quindi

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{d(P_A + P_B)}{dt} = 0$$

Quando la risultante delle forze esterne applicate ad un sistema è nulla, ossia quando il sistema è isolato, allora la quantità di moto si conserva nel tempo. Questo è il **principio di conservazione della quantità di moto**.

Il momento della quantità di moto detto anche **momento angolare** invece rappresenta per le rotazioni quello che rappresenta per le traslazioni la quantità di moto.



$\vec{F}$ giace sul piano

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \quad (\text{N} \cdot \text{m})$$

Si può anche scrivere:

$$L = mRv = mR^2\omega$$

Deriviamo ora la quantità appena introdotta:

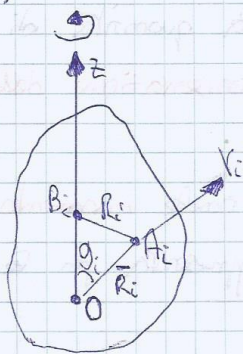
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{P} + \vec{R} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{P} = \vec{v} \times \vec{P} = \vec{0}$$

$$\text{Siccome } \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

La derivata nel tempo della quantità di moto di una particella è uguale al momento della forza ad essa applicata. Per quanto riguarda un corpo rigido le cose si complicano in quanto esso può sia rotare che traslare.

Per esempio:



$$R_i = A_i B_i \Rightarrow \omega_i = \frac{v_i}{R_i} \text{ e } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$$

Il momento della velocità rotale:

$$v_i = \omega R_i \sin \theta_i = \omega \cdot R_i$$

Quindi:

$$L_i = m_i R_i \cdot v_i$$

Il momento angolare totale vale:

$$L_{\text{tot}} = \sum_i L_i = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots + m_n R_n^2) \omega = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega$$

(4)

Si può anche scrivere:

$$L_{rot} = I_{rot} \omega \quad \text{dove: } I_{rot} = m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_i m_i r_i^2$$

I è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z .

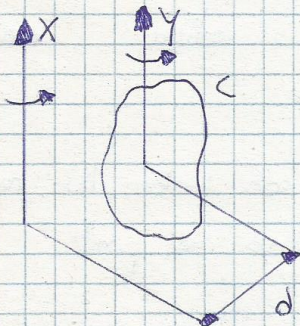
La tecnica di calcolo del momento di inerzia consiste nel sommare o meglio nell'integrare la seguente espressione:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \int R^2 dm \quad (\text{m}^2 \text{kg})$$

Dato che:

$$\rho = \text{densità} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow I = J = \rho \int_V R^2 dV$$

Sia data, per esempio, la seguente situazione:



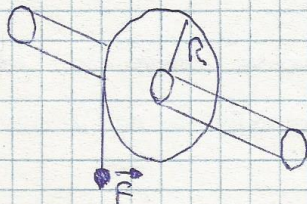
I momenti di inerzia rispetto agli assi paralleli sono legati dal **teorema di Steiner**

$$I_z = I_x + \rho d^2$$

viene anche detto **teorema degli assi paralleli**.

ESERCIZIO (5):

Sia data la seguente disco rotante



Dati:

$$R = 50 \text{ cm}$$

$$M = 10 \text{ kg}$$

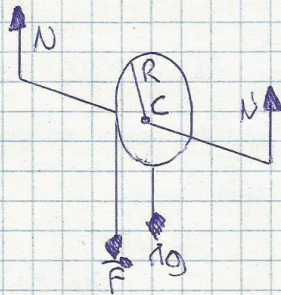
$$F = 10 \text{ N}$$

Calcolare accelerazione

angolare e vel. angolare

* Soluzione:

Sul disco agisce la forza peso e la forza F . Inoltre:



L'unico momento non nullo è:

$$\tau = F \cdot R$$

$$I = \frac{1}{2} \tau R^2$$

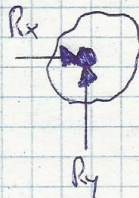
Siccome:

$$\tau = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2FR}{\frac{1}{2} \tau R^2} = \frac{2F}{\tau R}$$

Inoltre: $\omega = \alpha t$

Torniamo ora alla dinamica del corpo rigido e vediamo i vari vincoli:

• Cerniera



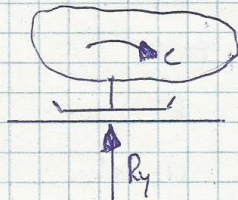
Il corpo può solo ruotare. Due reazioni vincolari applicate nel punto.

• Carrozza

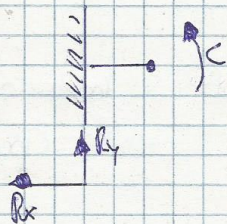


Una reazione vincolare. La libertà di movimento è lungo l'asse X e nella rotazione.

• Piatino



Impedisce anche la rotazione. Solo movimento lungo l'asse X.

• Immagini

Vincolo che annulla tutti i momenti.

Nella fisica classica, l'energia cinetica che è l'energia di movimento vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Nel contesto appena inserito si ha:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso di un corpo che ruota attorno ad un asse passante per il suo baricentro e che trasla simultaneamente si ha:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_{cG}$$

dove E_{cG} = energia cinetica interna
rispetto al centro di
massa

Quindi:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Ricordando che:

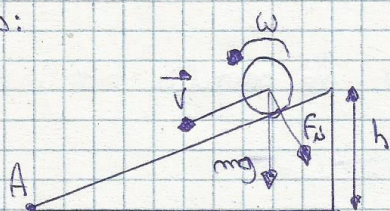
$$E_m = \text{energia meccanica} = E_c + E_p$$

si ha:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + mgh = \text{cost} \rightarrow \text{Principio di conservazione dell'energia meccanica}$$

Questa ultima relazione è vera se ci sono in ballo forze solo conservative.

Per esempio:



NB: Si parla di forza di attrito (forza non conservativa)

all'inizio della discesa (punto A) si ha:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{v_G^2}{R^2}$$

$$\Downarrow$$

$$mgh = \frac{v^2}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mghR^2}{mR^2 + I}}$$

Solitamente nella meccanica si distinguono le azioni resistenti al moto come:

- azioni legate all'attrito
- azioni associate all'usura, in cui nel contatto tra i corpi si ha asportazione di materia.

Esistono vari tipi di attrito:

- attrito statico $\rightarrow$ caso in cui la forza applicata non riesce a far muovere il corpo.
- attrito dinamico $\rightarrow$ caso in cui l'attrito si oppone al moto del corpo.

Per definizione:

$$F_s = \text{forza attrito statico} = \mu_s N$$

$$F_d = \text{forza di attrito dinamico} = \mu_d N$$

$$\underline{F_d < F_s}$$