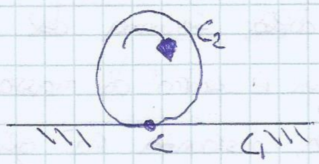
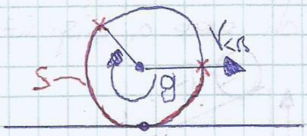
APPROFONDIMENTI:

Si supponga di avere a disposizione la seguente situazione:

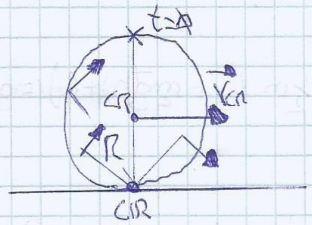


In questa situazione si ha un puro rotolamento. In questa condizione non vi è nessuna velocità relativa tra il corpo C_1 e il corpo C_2. Supponendo che R sia il raggio del disco si ha:

$$\begin{cases} s = R\vartheta \\ V_{cm} = \dfrac{ds}{dt} = R\dfrac{d\vartheta}{dt} = R\omega \\ a_{cm} = \dfrac{dV_{cm}}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha \end{cases}$$



La situazione si può descrivere come un moto di traslazione del cm (centro di massa) più un moto rotatorio attorno al cm con velocità angolare $\omega = \frac{V_{cm}}{R}$.
Si supponga di essere, all'istante di tempo iniziale $t=0$ nella posizione $x=0$, ma anche $y=2R$.



Il moto di puro rotolamento si può descrivere anche come moto di rotazione attorno al CIR.

Quindi:

- Il CIR ha velocità nulla.

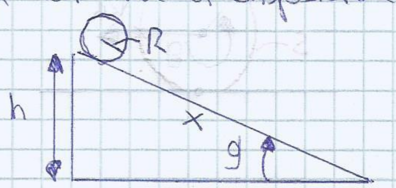
L'energia cinetica di un disco che trasla e ruota vale:

$$E_c = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\omega^2 = \frac{1}{2}I'\omega^2 \quad \text{con } I' = (MR^2 + I)$$

I indica il momento di inerzia.

Esiste un teorema noto come teorema degli assi paralleli noto anche come teorema di Huygens-Steiner afferma che il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse è dato dalla somma del momento di inerzia rispetto all'asse parallelo passante per il centro di massa ed il prodotto della massa per il quadrato della distanza tra gli assi. Quando si ha un puro rotolamento si ha attrito nel punto di contatto che però non genera lavoro. Se invece il corpo, oltre a ruotare, striscia, allora si ha dell'attrito dinamico con dissipazione di energia.

Si supponga di avere a disposizione la seguente situazione fisica:



Si supponga di avere un puro rotolamento.

Si ha:

$$V = \omega \cdot R$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$E_m^{(A)} = E_{c,A} + E_{p,A}$$
$$E_m^{(B)} = E_{c,B} + E_{p,B}$$
$$\Rightarrow \underline{E_m^{(A)} = E_m^{(B)}}$$

Da cui si ottiene: $E_{c,A} + E_{p,A} = E_{c,B} + E_{p,B} \Rightarrow \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} I \omega_A^2 + mg(h+R)$

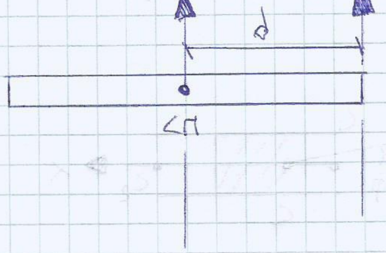
$$= \frac{1}{2} m V_B^2 + \frac{1}{2} I \omega_B^2 + mgR$$

Quindi: $mg(h+R) = \frac{V^2}{2}\left(m + I/R^2\right) + mgR \Rightarrow$ da cui si ottiene la velocità finale.

Si ricordi che:

- $I = \frac{2}{5} MR^2$ (per una sfera)
- $I = MR^2/2$ (per un cilindro)

L'esempio che invece viene mostrato di seguito si riferisce ad una applicazione pratica del teorema di Huygens-Steiner. Si consideri la seguente asta:



Per un'asta si sa che:

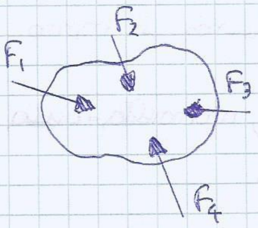
$$I_{CM} = \frac{1}{12} M l^2$$

Quindi:

$$I = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + md^2$$

$$= \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Come già visto in questi appunti un corpo sottoposto ad azione di un sistema di forze rimane in equilibrio se:

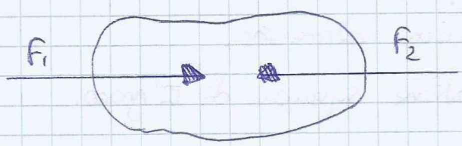


$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_i = 0 \end{cases}$$

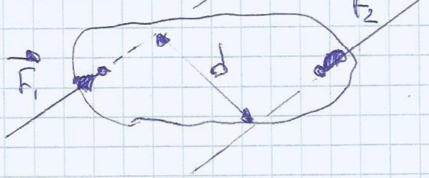
La condizione di equilibrio può essere:

- equilibrio alla traslazione → le forze hanno lo stesso modulo e stessa direzione ma verso opposto
- equilibrio alla rotazione.

Per esempio:

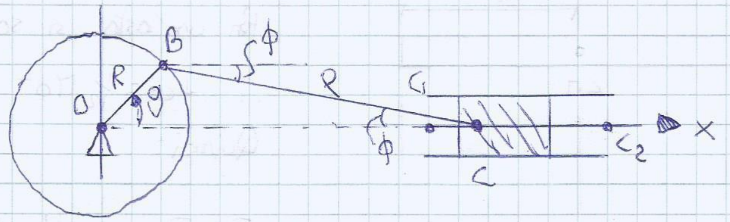


equilibrio alla traslazione



equilibrio in rotazione

Nella prima parte del "corso" si sono visti i manovellismi. Vale la pena citare un tipo di manovellismo particolare di spinta così strutturato:



Questo manovellismo di spinta è composto da una manovella di lunghezza R incernierata nel punto O. È presente un pistone vincolato al telaio mediante una guida lineare che consente la sua traslazione lungo l'asse X. È presente anche una biella di lunghezza ℓ. Quindi si hanno:

- tre coppie rotoidali (telaio-manovella, manovella-biella, biella-pistone)
- una coppia prismatica (pistone-telaio).

Esiste una formula chiamata formula di Grubler, la quale consente di trovare i gradi di libertà di un meccanismo disposto nel piano:

$$gdl = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

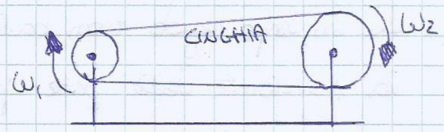
dove:

m = numero di membri che compongono il meccanismo
C_1 = numero delle coppie cinematiche elementari
C_2 = numero delle coppie cinematiche superiori di II° grado.

Se:

- $gdl < \phi \rightarrow$ sistema iperstatico
- $gdl > \phi \rightarrow$ sistema labile
- $gdl = \phi \rightarrow$ sistema isostatico

Un meccanismo è un sistema meccanico che realizza un moto tra due organi della macchina:



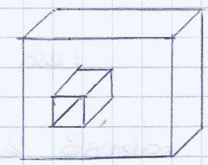
- Ci sono due ruote dette pulegge connesse tra loro da una cinghia. Questo è un esempio di meccanismo.

Ciascuna coppia di elementi collegati prende il nome di coppia-cinematica. Una coppia cinematica può essere:

- coppie cinematiche elementari, ossia due elementi rigidi aventi superfici di contatto identiche e combacianti.
- coppie cinematiche superiori, come per esempio la coppia cinghia-puleggia la quale è non rigida e combaciante oppure una ruota-rotaia che è rigida e combaciante.

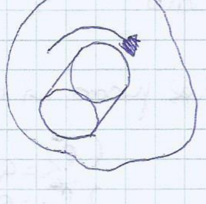
Le coppie cinematiche elementari possono essere:

1) traslazionali
2) rotazionali
3) roto-traslazionali



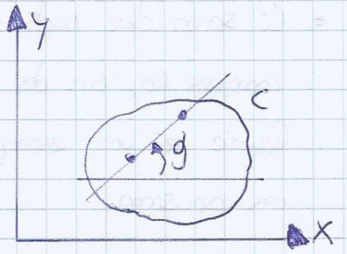
COPPIA CINEMATICA ELEMENTARE TRASLAZIONALE.

Per il nostro esempio, il manovellismo di spinta ha 1 gdl.



COPPIA ELEMENTARE ROTAZIONALE

Analizziamo ora la statica di un corpo rigido. Consideriamo la seguente situazione:



Su un corpo rigido non basta scrivere la risultante delle forze poiché il corpo può traslare ma anche ruotare. Quindi oltre alle forze vanno usati anche i momenti.

È bene ricordarsi che:

1) un corpo a cui viene applicata una risultante delle forze nulla rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.
2) Se su un corpo agisce una forza $F = m \cdot a$, il suo moto varia di tipologia diventando un moto uniformemente accelerato.

3) Se un corpo applica una forza F su un altro corpo esso reagisce con una forza uguale e contraria.

Per risultante delle forze si intende:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

Nella statica si ha: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} = 0 \text{ (asse x)} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{y_i} = 0 \text{ (asse y)} \end{cases}$$

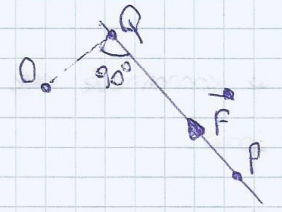
Pertanto per il corpo materiale le condizioni di equilibrio statico sono:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{\Pi} = 0 \end{cases}$$

Nel piano si ha:

$$\begin{cases} \vec{R_x} = 0 \\ \vec{R_y} = 0 \\ \vec{\Pi_O} = 0 \end{cases}$$

Vediamo il seguente esempio:



$$\vec{\Pi}_0 = (P-O)\cdot\vec{F}$$

ma:

$$(P-O) = (Q-O) + (Q-P)$$

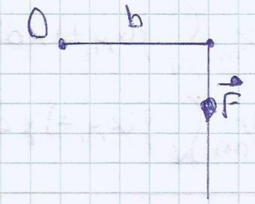
$$\Downarrow$$

$$\vec{\Pi}_0 = (Q-O)\cdot\vec{F} + \cancel{(Q-P)\cdot\vec{F}}^{\,\phi}$$

Quindi:

$$\underline{\vec{\Pi}_0 = (Q-O)\times\vec{F}}$$

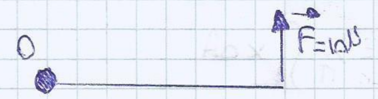
Il momento di una forza viene anche detto momento torcente e' una grandezza vettoriale che causa la rotazione di un corpo rigido. Per essere più precisi, il momento Π rispetto ad un punto O chiamato polo è dato dal prodotto della forza per il braccio. Quindi:



b = braccio $\quad \vec{\Pi} = \vec{F}\times\vec{b}$

ESERCIZIO 4:

Si supponga di avere a disposizione un'asta lunga 2m, libera di ruotare ad un suo estremo. Si applica una forza $\vec{F}$ all'altro estremo. Se l'asta fosse lunga 5m che forza si dovrebbe applicare per avere lo stesso momento?

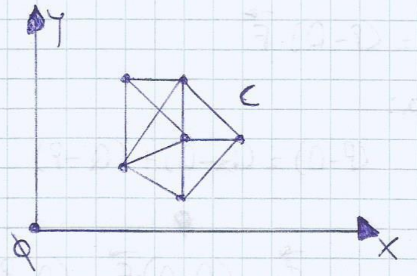


* SOLUZIONE:

$$\vec{\Pi}_0 = \vec{F}\times\vec{b} = 2m \cdot 10N.$$

Per un'asta lunga 5 m $\Rightarrow \vec{\Pi}_0/b = \vec{F} \Rightarrow {}^{20}/_{5m} = 4N$

Si consideri ora un corpo materiale come se fosse un insieme di punti materiali:

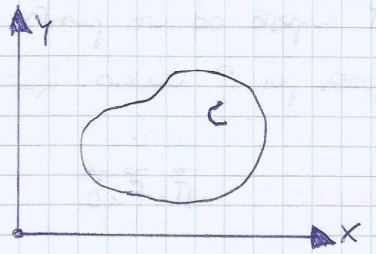


Le coordinate del baricentro sono:

$$\begin{cases} x_b = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} m_i x_i}{m_{TOT}} \\ y_b = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} m_i y_i}{m_{TOT}} \end{cases}$$

dove: $m_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} m_i$

Se il corpo fosse continuo si avrebbe:



Le coordinate del baricentro sono:

$$x_b = \frac{1}{m} \int_V \rho(x,y,z)\, x \, dV$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_V \rho(x,y,z)\, y \, dV$$

Si ricordi infatti che la densità vale:

$$\rho = m/V.$$

Le relazioni accennate valgono se

$$x_b = \frac{\rho h}{m} \int_A x \, dA \qquad x_b = \frac{1}{A} \int_A x \, dA$$

$$\Rightarrow$$

$$y_b = \frac{\rho h}{m} \int_A y \, dA \qquad y_b = \frac{1}{A} \int_A y \, dA$$

• NB: $m = \rho A h$