④

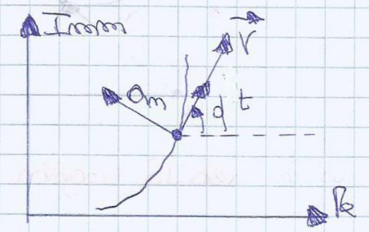
Quindi si può scrivere:

$$\vec{V}_P = \dot{\rho} e^{i\theta} + \rho i \dot{\theta} e^{i\theta} = \dot{\rho} e^{i\theta} + \rho \dot{\theta} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

Il modulo vale:

$$|\vec{V}_P| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2}$$ con $\phi = \theta + \arctan \frac{\rho \dot{\theta}}{\dot{\rho}}$

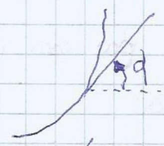
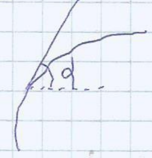
Analogamente per l'accelerazione:



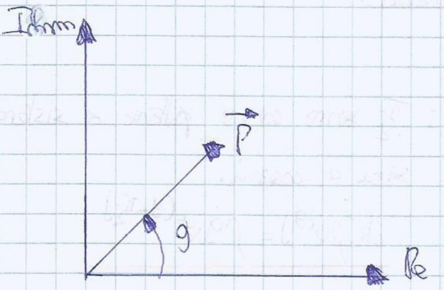
$\vec{V} = V e^{i\phi}$

$\vec{a}_P = \dot{V} e^{i\phi} + V i \dot{\phi} e^{i\phi} = \dot{V} e^{i\phi} + V \dot{\phi} e^{i(\phi + \frac{\pi}{2})}$

È banale la seguente considerazione:

- Se ϕ cresce  $\dot{\phi} > 0$
- Se ϕ decresce  $\dot{\phi} < 0$

Analizziamo ora il caso del moto più semplice ossia il moto rettilineo.



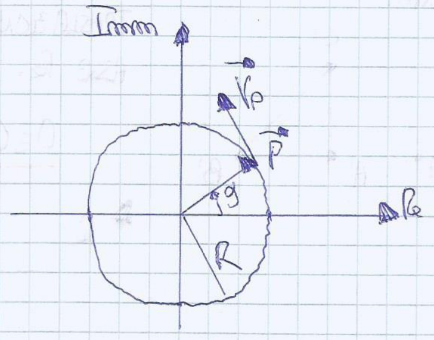
Sappiamo che $\vec{P} = |P| e^{i\theta}$

Quindi:

$\vec{V}_P = |\dot{P}| e^{i\theta}$

$\vec{a}_P = |\ddot{P}| e^{i\theta}$

Nel caso di un moto più complesso, come per esempio, il moto circolare si ha:



$R = cost$ e $\vartheta = \vartheta(t)$

Quindi:

$$\vec{P}(t) = Re^{i\vartheta}$$

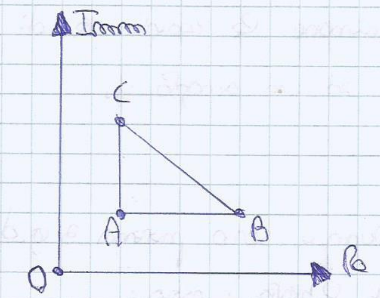
mentre:

$$\vec{V}_P = i\dot{\vartheta}Re^{i\vartheta}$$

$$\vec{a}_P = i\ddot{\vartheta}Re^{i\vartheta} - R\dot{\vartheta}^2 e^{i\vartheta}$$

Un corpo materiale è un corpo le cui dimensioni non sono trascurabili rispetto al piano di riferimento, contrariamente ad un punto materiale (particella).

Un corpo rigido è un corpo che, muovendosi, non subisce deformazioni e quindi la distanza dei vari punti interni rimane costante. Si consideri, per esempio, il seguente corpo rigido sul piano:

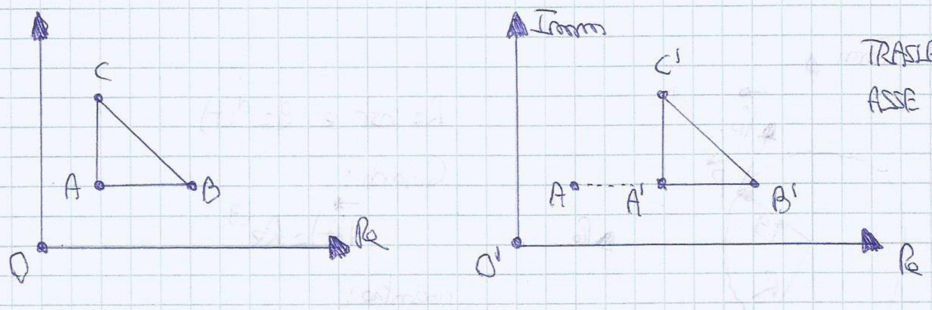


$$\begin{cases} (A-O) = \text{VETTORE POSIZIONE PUNTO } A \\ (B-O) = \text{VETTORE POSIZIONE PUNTO } B \\ (C-O) = \text{VETTORE POSIZIONE PUNTO } C \end{cases}$$

Un corpo rigido può subire degli spostamenti sul piano che possono essere delle traslazioni, delle rotazioni oppure delle roto-traslazioni.

(6)

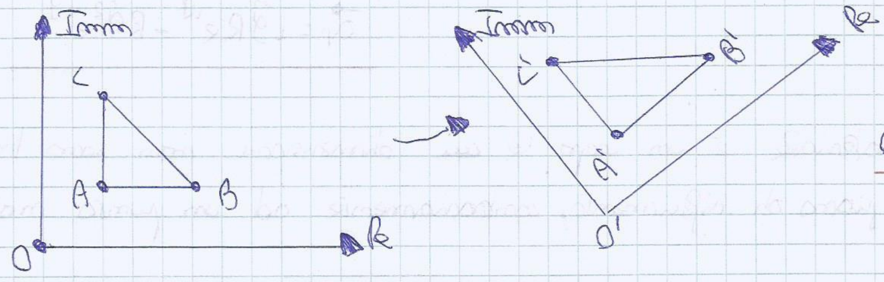
Per esempio:



TRASLAZIONE LUNGO ASSE Re.

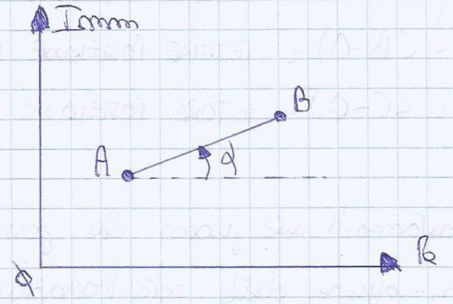
$O \equiv O'$

Di seguito viene mostrata una rotazione:



$O' \neq O$

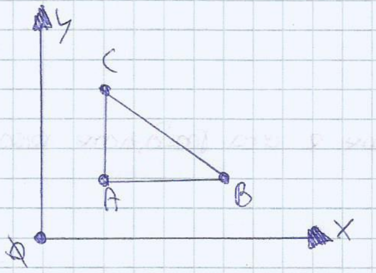
Essendo un corpo rigido conoscendo lo spostamento di un punto sono univocamente determinate le posizioni di tutti gli altri punti.
Gli angoli relativi tra due punti del corpo rimangono sempre costanti.
Solitamente, su un piano è possibile determinare le coordinate di un generico punto B conoscendo le coordinate del punto A ed un angolo φ.



Dunque sono presenti 3 g.d.l. (Gradi di libertà) ossia:

x_A, y_A, φ

Consideriamo ora la seguente situazione:



Si conoscono le coordinate dei vari punti:

$$\begin{cases} x_A, y_A, z_A \\ x_B, y_B, z_B \\ x_C, y_C, z_C \end{cases}$$

9 parametri in tutto.

Siccome è un corpo rigido, si avranno 3 condizioni sulle distanze dei punti e tre condizioni sulla quota "z". Quindi:

$$L_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

$$L_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2}$$

$$L_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2}$$

e:

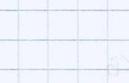
$$\begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = 0 \\ z_C = 0 \end{cases}$$

Quindi si avranno in totale 3 g.d.l (9 parametri − 6 vincoli).

Inserendo dei vincoli che legano, in qualche modo, il corpo al sistema di riferimento si possono ridurre o annullare i gradi di libertà.

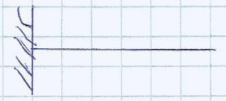
Per esempio:

- cerniera



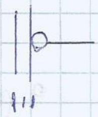
Annulla i movimenti lungo x e y ma permette la rotazione. Quindi si ha solo un grado di libertà.

- Incastro

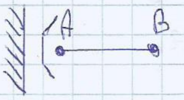


Annulla tutti i gradi di libertà (sia traslazioni che rotazioni

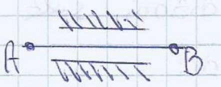
- Pattino



Annulla la rotazione e una traslazione verso y o verso x.

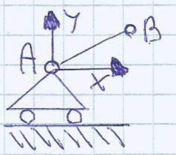


- Manicotto



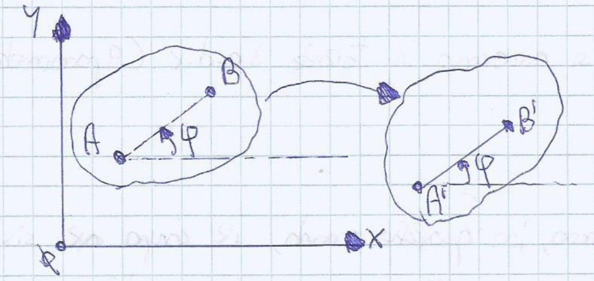
Annulla la rotazione ed una traslazione quindi da 1 g.d.l alla struttura.

- Carrello



Annulla il movimento in una traslazione lungo una delle due direzioni. Fornisce 2 g.d.l.

Come già accennato in precedenza un corpo rigido può ruotare, traslare e roto-traslare. Per esempio per il moto traslatorio:



Condizione iniziale:

$$\begin{cases} x_A \\ y_A \\ \varphi \end{cases}$$

$\Downarrow$

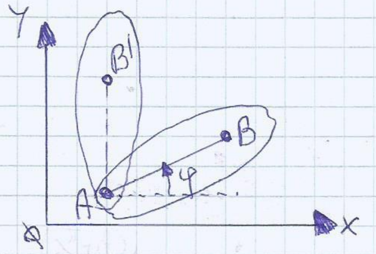
Dopo la traslazione:

$$\begin{cases} x_A' \\ y_A' \\ \varphi \end{cases}$$

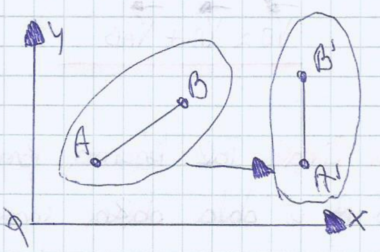
Attenzione: il moto traslatorio è diverso dal moto rettilineo.

Per il moto rotatorio:

Condizioni iniziali $\begin{cases} x_A \\ y_A \\ \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A' = x_B \\ y_A' = y_A \\ \varphi' \neq \varphi \end{cases}$ A = CIR = Centro istantaneo di rotazione.

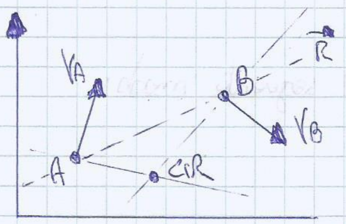


Per quanto riguarda il moto roto-traslatorio si ha:



Cambiamo le coordinate x_A, y_A e l'angolo di rotazione.

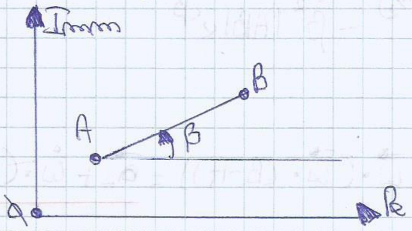
Si definisce atto di moto la fotografia dei vettori posizione e velocità in un certo istante di tempo di un corpo rigido. Si consideri la seguente situazione:



La proiezione delle velocità lungo la retta che congiunge i due punti è uguale.

Con CIR si identifica il centro di istantanea rotazione. Se il CIR viene portato all'infinito si ha un moto traslatorio. Il punto CIR ha una velocità nulla ma la sua accelerazione è diversa da zero. Il punto CIR si trova con le intersezioni delle rette perpendicolari a vettori velocità dei punti.

Torniamo ora al piano di Gauss e consideriamo la seguente situazione:



I vettori complessi di posizione di A e B sono:

$\vec{A} = x_A + i y_A$, $\vec{B} = x_B + i y_B$

Quindi si può tranquillamente scrivere:

$$\vec{B} = x_A + i y_A + |AB| e^{i\beta}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_B = V_{Ax} + i V_{Ay} + i \dot{\beta} |AB| e^{i\beta} = V_{Ax} + i V_{Ay} + \dot{\beta} |AB| e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}$$

Quest'ultima espressione denota il teorema di Rivals. Tale teorema fondamentalmente afferma che la velocità del punto B è data dalla somma della velocità di traslazione e della velocità di rotazione. Quindi:

V_A = velocità di traslazione

V_{AB} = velocità di rotazione.

La precedente relazione si può riscrivere nel seguente modo:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \cdot (\vec{B} - \vec{A})$$

Se il riferimento è il CIR si può scrivere:

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \cdot (\vec{B} - \vec{CIR})$$

Per quanto riguarda l'accelerazione:

$$a_B = a_{Ax} + i a_{Ay} + i \ddot{\beta} |AB| e^{i\beta} + i \dot{\beta} |AB| i \dot{\beta} e^{i\beta}$$

$$= a_{Ax} + i a_{Ay} + \ddot{\beta} |AB| e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})} - \dot{\beta}^2 |AB| e^{i\beta}$$

Posto $\dot{\omega} = \ddot{\beta}$ otteniamo:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\omega} \cdot (B - A) + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot (B - A)) = \vec{a}_A + \dot{\omega} \cdot (B - A) - \omega^2 (B - A)$$