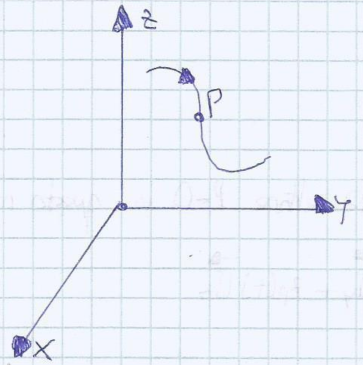
INDICE:

II

Iniziamo il corso di meccanica applicata alle macchine definendo di cosa si occupa. Essa si occupa di studiare i vari componenti che compongono una macchina, o in generale un sistema meccanico, dal punto di vista meccanico. Si inizia partendo da alcune semplici considerazioni:

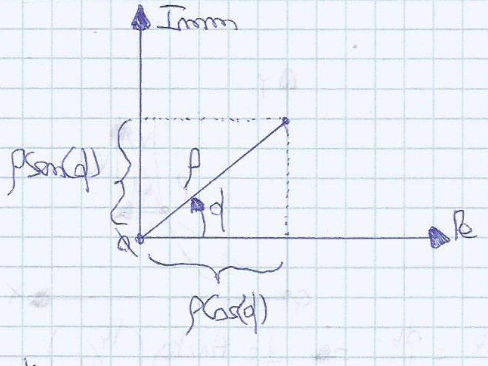


Un punto P si muove nel tempo seguendo una particolare traiettoria.

$$P = P(t)$$

Si definisce traiettoria l'insieme dei punti toccati dalla particella o punto materiale durante il suo moto.

Dal punto di vista matematico si può tranquillamente sovrapporre il piano cartesiano con il piano di Gauss (il piano sul quale si rappresentano i numeri complessi). Si supponga di voler rappresentare un vettore $\vec{z}_1$ ruotato di un certo angolo φ:



NB: Un numero complesso è composto da una parte reale ed una immaginaria e si scrive, in forma algebrica, nel seguente modo:

$$z = x + iy$$

dove: $\begin{cases} x = \text{parte reale} \\ iy = \text{parte immaginaria} \end{cases}$

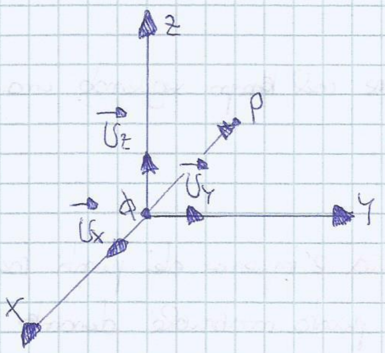
Quindi:

$$\vec{z}_1 = \rho(\cos(\varphi) + i\,\text{Sen}(\varphi))$$ → forma trigonometrica di un numero complesso

Esiste una forma particolare di rappresentazione di un numero complesso che è la forma esponenziale.

$$\vec{Z}_1 = \rho e^{i\varphi}$$

Si consideri la seguente situazione:



$$P-O = P(t) = \begin{cases} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{cases}$$

Possiamo scrivere il vettore P-O in questo modo:

$$\vec{P-O} = x_p(t)\vec{U_x} + y_p(t)\vec{U_y} + z_p(t)\vec{U_z}$$

Per la fisica classica si avrà:

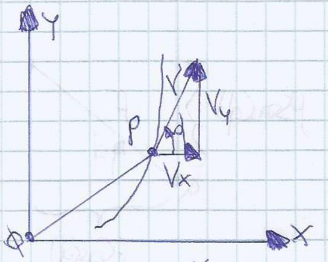
$$V_p = \dot{x}_p(t)\vec{U_x} + \dot{y}_p(t)\vec{U_y} + \dot{z}_p\vec{U_z} \quad \text{ed} \quad a_p = \ddot{x}_p(t)\vec{U_x} + \ddot{y}_p(t)\vec{U_y} + \ddot{z}_p(t)\vec{U_z}$$

Quindi:

$$\vec{V_p} = V_x(t)\vec{U_x} + V_y(t)\vec{U_y} + V_z(t)\vec{U_z}$$
$$\vec{a_p} = a_x(t)\vec{U_x} + a_y(t)\vec{U_y} + a_z(t)\vec{U_z}$$

I moduli dei precedenti vettori sono:

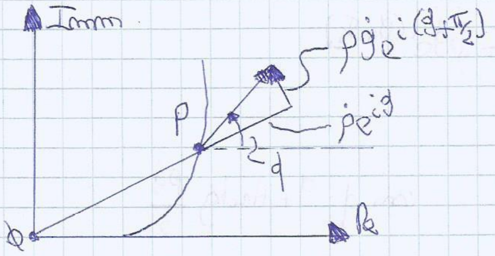
$$|\vec{V_p}| = \sqrt{\dot{x}_p^2(t) + \dot{y}_p^2(t) + \dot{z}_p^2(t)}$$
$$|\vec{a_p}| = \sqrt{\ddot{x}_p^2(t) + \ddot{y}_p^2(t) + \ddot{z}_p^2(t)}$$



Dal disegno a lato si nota che:

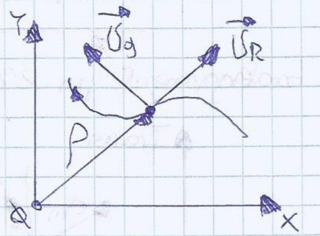
$$Tg\varphi = \frac{Sen\varphi}{Cos\varphi} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{\cancel{dt}}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \varphi = Arctg\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

Spostiamoci sul piano di Gauss:



La legge oraria del moto in coordinate polari è:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$



Possiamo scrivere:

$$\vec{\rho}(t) = \rho\,\vec{u}_R$$
$$\dot{\rho} = d(\rho\,\vec{u}_R)$$

Si indica con V_ρ la velocità radiale e con ω la velocità angolare.

$$V_\rho = d\rho/dt$$
$$\omega = d\theta/dt$$

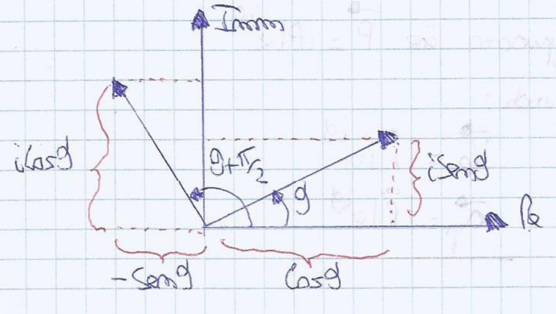
Nel piano di Gauss, quando si ha a che fare con i numeri complessi, le cose si complicano. La velocità radiale diventa:

$$V_\rho = \dot{\rho}e^{i\theta}$$

Per quanto riguarda la velocità angolare:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow d(e^{i\theta}) = i\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta$$

Quest'ultimo passaggio comporta uno sfasamento:



Quindi: $\frac{\pi}{2}$ serve come fattore x sistemare seni e coseni.

$$d(\rho e^{i\theta}) = \rho\dot{\theta}e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$