* RIPASSO DI ALCUNI CONCETTI MATEMATICI:

In Analisi Matematica II ci serviranno moltissimo gli integrali, quindi ripassiamoli. Ci sono a grandi linee due tipi di integrali:

1) Integrali indefiniti
2) Integrali definiti.

Iniziamo questo ripasso "pratico" dagli integrali indefiniti. La ricerca di un integrale indefinito di una generica funzione $f(x)$ si esprime così:

$$\int f(x)\,dx$$

Qui la $f(x)$ è la funzione integranda. In breve bisogna trovare, partendo dalla $f(x)$, una funzione $F(x)$ tale che:

$$DF(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

Ad esempio:

- $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + K$, dove K è una qualsiasi costante.
  Posto: $x = f(x)$ e $\frac{x^2}{2} + K = F(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = x = f(x)$.

Dunque è più corretto scrivere:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K$$

Vediamo ora alcune regole fondamentali di integrazione:

1) Se K è una costante $\Rightarrow \int K\,dx = K\int dx$
2) $\int dx = x + K$
3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$
4) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Facciamo subito qualche esempio:

- $\int 5\,dx = 5\int dx = 5x + K$
- $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = x^3 + K \rightarrow (3\frac{x^3}{3} + K)$
- $\int (2x + 5x)\,dx = \int 2x\,dx + \int 5x\,dx = 2\int x\,dx + 5\int x\,dx = x^2 + \frac{5}{2}x^2 + K$

Vediamo qualche altra proprietà:

5) $\int 1/x \, dx = \log|x| + K$

6) $\int e^x \, dx = e^x + K$

7) $\int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$

8) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$

9) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + K$

10) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + K$

Facciamo degli esempi:

- $\int x^3 \, dx = x^4/4 + K$
- $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + K$
- $\int 1/\sqrt{x} \, dx = \int x^{-1/2} \, dx = 2\sqrt{x} + K$ (* proprietà delle potenze)
- $\int x\sqrt{x} \, dx = \int x \cdot x^{1/2} \, dx = \int x^{3/2} \, dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + K$
- $\int 5/\sqrt[4]{x^3} \, dx = 5\int 1/\sqrt[4]{x^3} \, dx = 5\int x^{-3/4} \, dx = 5 \cdot 4 x^{1/4} + K = 20\sqrt[4]{x} + K$
- $\int e^{x/2} \, dx = 2e^{x/2} + K$
- $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + K$
- $\int 3\operatorname{sen} x \, dx = 3\int \operatorname{sen} x \, dx = -3\cos x + K$
- $\int 3/x \, dx = 3\int 1/x \, dx = 3\log|x| + K$.

Inoltre:

11) $\int \operatorname{Sh} x \, dx = \operatorname{Ch} x + K$

12) $\int Chx\,dx = Shx + K$

13) $\int 1/_{Cos^2x}\,dx = Tgx + K$

14) $\int Sec^2x\,dx = Tgx + K$ (* proprietà trigonometrica).

15) $\int (Tg^2x + 1)\,dx = Tgx + K$

16) $\int 1/_{Sen^2x}\,dx = -Ctgx + K$

17) $\int Cosc^2x\,dx = -Ctgx + K$

18) $\int (Ctg^2x + 1)\,dx = -Ctgx + K$

Esempi:

- $\int 2Shx\,dx = 2\int Shx\,dx = 2Chx + K$
- $\int 5\,Chx\,dx = 5\int Chx\,dx = 5Shx + K$

19) $\int 1/_{Ch^2x}\,dx = Thx + K$

20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} arcsenx + K \\ -arccosx + K \end{cases}$

21) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} arccosx + K \\ -arcsenx + K \end{cases}$

22) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx + K$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \begin{cases} SettShx + K \\ ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K \end{cases}$

24) $\int 1/\sqrt{x^2-1}\,dx = ln\,|x + \sqrt{x^2-1}\,| + K$

25) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + K\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + K$

Esempi:

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + K$
- $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = 3\int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\arcsin x + K$
- $\int \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + K$
- $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + K$
- $\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + K$
- $\int \frac{5}{x^2-1}\,dx = 5\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{5}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + K$
- $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{SettSh} x + K$

Vediamo ora di analizzare qualche proprietà fondamentale dei radicali, delle potenze, dei logaritmi, e delle funzioni trigonometriche. Innanzitutto quando scriviamo:

- $2^3 = 2\times 2\times 2 = 8$

In generale si può scrivere:

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a}_{n\text{ volte}}$$

Vediamo alcune proprietà delle potenze:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) $a^n / a^m = a^{n-m}$
3) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$
4) $a^n \cdot \beta^n = (a\cdot\beta)^n$
5) $a^n / \beta^n = (a/\beta)^n$
6) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Facciamo qualche esempio:

- $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $2^4 / 2^2 = 2^{4-2} = 2^2 = 4$
- $2^{-3} = 1/_{2^3} = 1/_8$
- $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
- $2^2 / 4^2 = (2/4)^2 = (4/_{16})$
- $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4$

Per quanto riguarda i radicali si ha:

$$\sqrt[m]{a} = a^{1/m}$$

In particolare : $\sqrt{a} = a^{1/2}$
Ad esempio:

- $\sqrt[3]{4} = 4^{1/3}$
- $\sqrt[4]{2} = 2^{4}$

Inoltre : $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$

Trasformando dunque i radicali in potenze si possono poi utilizzare le proprietà prima accennate. Vediamo ora le proprietà dei logaritmi. Innanzitutto un logaritmo è una funzione tale che:

$$e^y = x \Rightarrow y = \log x$$

cioè il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Prendiamo ora in esame il seguente logaritmo:

$$\log_a b$$

dove a è la base del logaritmo e b è l'argomento. Analizziamo ora le sue proprietà:

1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

2) $\log(a/b) = \log a - \log b$

3) $a \log b = \log(b)^a$

4) $\log_a b = \log b / \log a$