mantenimento non distruggono la linearità. Quindi il sistema S si può anche rappresentare nel seguente modo:

$$\begin{cases} x(t+1)^* = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

* Si noti che x^* ha le stesse dimensioni del vettore x. Quindi il numero di poli non varia.

Si noti che passare dalla rappresentazione sottoforma di funzione di trasferimento, alla rappresentazione in forma matriciale comporta un procedimento noto con il nome di REALIZZAZIONE. Si noti inoltre che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} A = e^{F\Delta} \\ B = \int_0^\delta e^{F\delta} G\, d\delta \\ C = H \end{cases}$$

* Noi per ora ci concentriamo sulla forma $A = e^{F\Delta}$.

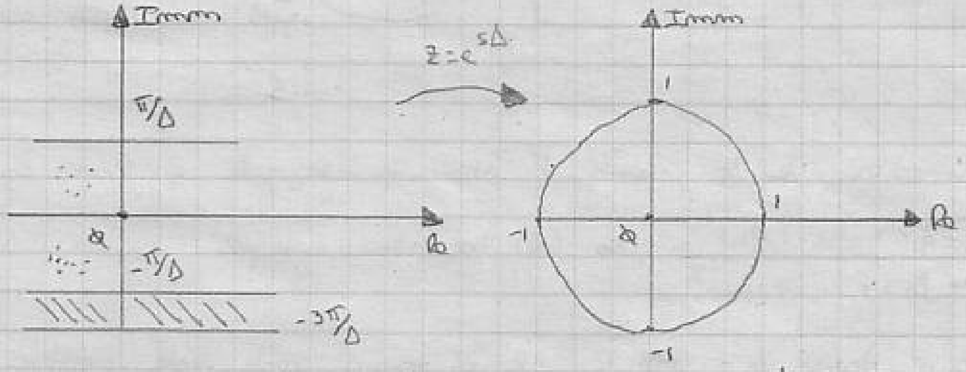
Analizziamo quindi la formula $A = e^{F\Delta}$. Da questa formula si può ottenere il legame tra i relativi autovalori che è:

$$\lambda_i = e^{\lambda_i \Delta}$$

Quindi se consideriamo la variabile z come la variabile a tempo discreto, e la variabile s come la variabile a tempo continuo, si ottiene la seguente importantissima relazione nota come TRASFORMATA DI CAMPIONAMENTO:

$$z = e^{s\Delta}$$

Questa relazione ci permette di passare dal piano complesso individuato dalla variabile s al piano complesso individuato dalla variabile z. Graficamente:



Per $s=0 \Rightarrow z=1$ e quindi ($z = e^0 = 1$). Per $s = j\omega \Rightarrow z = e^{j\omega\Delta}$ e quando $\omega = \frac{\pi}{\Delta} \Rightarrow z = e^{j\frac{\pi}{\Delta}\Delta}$.
Quindi i punti di sinistra in S, sono interni al cerchio di raggio unitario, mentre tutti quelli a destra in S, sono esterni a tale cerchio. Il meccanismo è poi ciclico. Perciò la stabilità non varia a causa del campionamento. Quindi si ha la seguente corrispondenza tra poli:

$$p_{td} = e^{p_{tc}\Delta}$$, dove: $\begin{cases} p_{tc} = \text{poli a tempo continuo} \\ p_{td} = \text{poli a tempo discreto} \end{cases}$

Per quanto riguarda il guadagno si ha:

$G(s)\Big|_{s=0}$ e $H(z)\Big|_{z=1}$. Quindi i due guadagni devono essere uguali.

Infatti: $H(z)\Big|_{z=1} = H(I-e^{F\Delta})^{-1}\int_0^{\Delta} e^{F\delta}\, d\delta\, G = H(I-e^{F\Delta})^{-1}(e^{F\Delta}-I)F^{-1}G = -HF^{-1}G = G(s)\Big|_{s=0}$

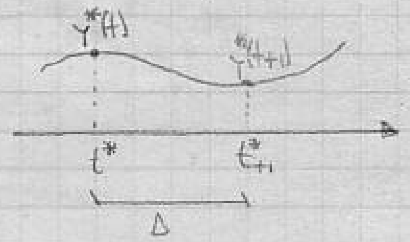
Si noti infatti che vale la seguente formula fondamentale: $\underline{H(z) = (zI-A)^{-1}C\cdot B}$.
Vediamo ora gli zeri come si comportano. Nel mondo continuo si ha:

$$G(s) = \begin{cases} h \text{ zeri} \\ k \text{ poli} \end{cases} \quad \text{con } \underline{h \le k}$$

Dopo il campionamento si ha:

$$H(z) = \begin{cases} k-1 \text{ zeri} \\ k \text{ poli} \end{cases} \quad (\text{CASO GENERICO}) \Rightarrow$$ il numero di zeri nel mondo discreto è maggiore.

Quindi nell'operazione di campionamento si creano nuovi zeri detti ZERI EVOCATI. Quando Δ è grande ($\Delta \to \infty$), si ha che $z \to 0$ $\underline{(z = e^{\Delta s})}$; Quindi per $\Delta \to \infty$, l'intervallo di campionamento è così elevato che, tra un campione e il suo successivo, la risposta di P giunge a regime.
Graficamente si ha:



* Quello che conta è perciò solamente il comportamento statico, cioè a basse frequenze $\underline{(s \to 0)}$. $\Rightarrow$ il legame di ingresso e di $\underline{\text{uscita}}$ è determinato solo dal guadagno:

$$\underline{y(t+1) = \mu u(t)}$$

Quindi per $\Delta \to \infty$ $H(z)$ deve tendere a μz^{-1} $\left(\frac{\mu}{z}\right)$. Dato che P, se è stabile, fa sì che tutti i poli di S tendano a zero, si ha che gli zeri devono tendere tutti a zero in modo da cancellare $k-1$ poli, lasciando un solo polo nell'origine. Per $\Delta \to 0$ il campionamento diventa molto fitto e quindi conta il comportamento in alta frequenza, di P. Quindi $G(s)$ diverge a $G(\infty) = 1/s^{k-h}$. Se si indica con $H(\infty)$ la funzione di trasferimento associata a $G(\infty)$, si avrà che $H(\infty)$ avrà un numero di poli uguale a quello di $G(\infty)$ cioè $k-h$ poli. Siccome per $\Delta \to 0$, $H(z) \to H(\infty)_z$, è necessario che h zeri di $H(z)$ si spostino per cancellare h poli della stessa funzione di trasferimento. Si nota che gli h zeri devono tendere a 1; Per quanto riguarda i restanti $k-h-1$ zeri di $H(z)$ dal momento che non corrispondono a nessuno zero di $G(s)$, essi tendono, per $\Delta \to 0$, agli zeri di $H_\infty(z)$. Si noti che siccome $H_\infty(z)$ ha un denominatore di grado $k-h$, allora $H_\infty(z)$ ha proprio $k-h-1$ zeri, e quindi:

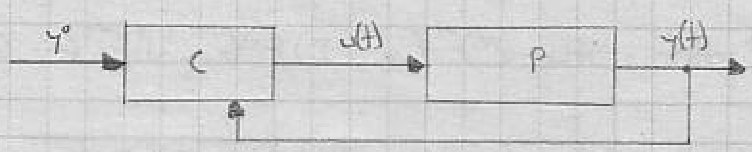
GRADO RELATIVO	NUMERO ZERI EVOCATI	ZERI EVOCATI
2	1	-1
3	2	$-3{,}73$; $-0{,}27$
4	3	$-9{,}89$; -1 ; $-0{,}1$

NB: Per definizione si ha:

$\underline{\text{GRADO RELATIVO} = \#\text{poli} - \#\text{zeri}}$.

dove $\#$ = numero.

Per il grado relativo ≥ 3, uno degli zeri evocati in modulo è maggiore di 1. Se anche il sistema a tempo continuo ha tutti gli zeri in modulo minore di zero, il corrispondente sistema a tempo discreto può anche avere zeri fuori dal cerchio unitario. Un sistema si dice a SFASAMENTO MINIMO quando ha zeri e poli nella regione di stabilità. Quindi se un sistema continuo è a sfasamento minimo, non è detto che il duale a tempo discreto lo sia. Consideriamo ora il seguente sistema:

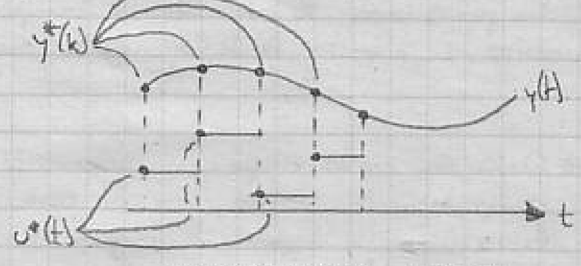


dove P denota il sistema sotto controllo e C denota il CONTROLLORE.

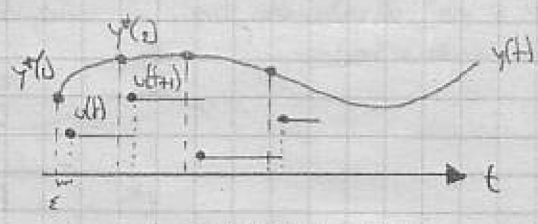
Si noti che il controllore ha il compito di rendere piccolo L'ERRORE DI CONTROLLO e cioè:

$$e(t) = y(t) - y^o \Rightarrow y(t) \to y^o$$

Si noti inoltre che il controllore agisce sul sistema sotto controllo P attraverso la variabile $u(t)$ denominata VARIABILE DI CONTROLLO. Invece la variabile y^o viene detta VARIABILE DI RIFERIMENTO. In un problema di controllo dobbiamo stabilire quanto vale $u(t)$ istante per istante in modo da individuare $y(t)$. Si noti però che una volta nota la $u(t)$, il sistema sotto controllo P non produce immediatamente $y(t)$, bensì impiega un po' di tempo. Tale tempo è dovuto al RITARDO DI ELABORAZIONE τ_e. Graficamente si ha:



COMPORTAMENTO IDEALE



COMPORTAMENTO REALE.

Si noti che con ε abbiamo indicato il ritardo di elaborazione. Quindi il sistema P può essere rappresentato con un modello ARMAX o ARX. Se uso un modello ARX ho:

$$y(t+1) = a_1 y(t) + \dots + b_0 \cancel{u(t+1)} + b_1 u(t)$$

↳ L'elemento sincrono non c'è.

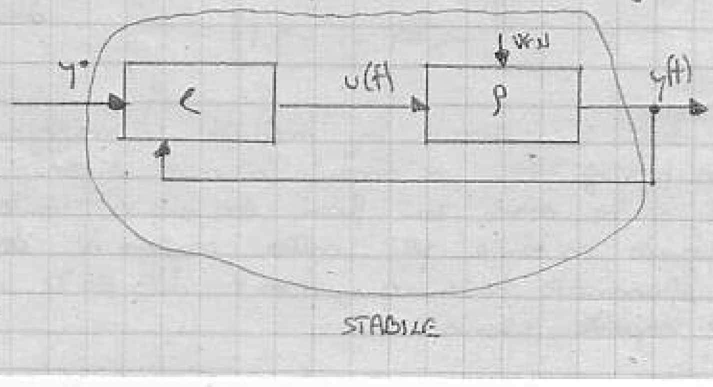
Infatti $u(t) = f(y(t), y(t-1), \dots, u(t-1) \dots)$. Quindi in un modello ARX c'è sempre il ritardo ed è pari a 1. La $y(t)$ dipende dai valori della u negli istanti passati. Quindi introduciamo una nuova teoria che si adatta ai modelli ARX e ARMAX detta TEORIA DEL CONTROLLO PREDITTIVO. Supponiamo di avere:

$$S: y(t) = a y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + WN$$

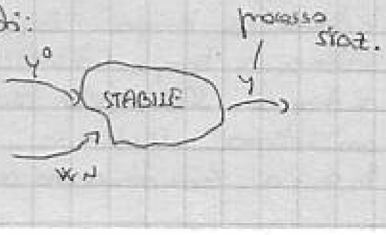
Lo scopo è che y si discosti il meno possibile da y^o. Scriviamo quindi:

$$y(t+1) - y^o = \min \Rightarrow E[(y(t+1) - y^o)^2] = J \to \min$$

Quest'ultima relazione è nota come LEGGE DI CONTROLLO A MINIMA VARIANZA. Si noti che J dipende dal controllore C e quindi scriveremo $J(C)$. Consideriamo per esempio:



Quindi:



NB: y^o = costante.

Scriviamo: $y(t+1) = \hat{y}(t+1) + e(t+1)$ con $\begin{cases} e(t+1) \sim WN(0,\lambda^2) \\ \hat{y}(t+1) = a y(t) + b_1 u(t) + \dots \end{cases}$

Quindi:

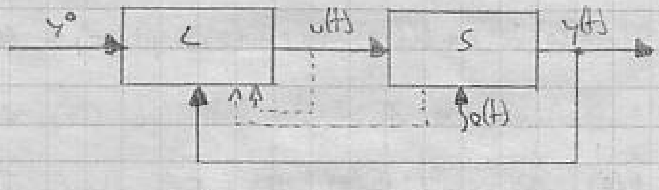
$$J = E[(\hat{y}(t+1|t) - y^\circ + e(t+1))^2] = E[(\hat{y}(t+1) - y^\circ)^2] + E[e(t+1)^2] + 2E[\overbrace{(\hat{y}(t+1) - y^\circ)e(t+1)}^{0}]$$

$$= E[(\hat{y}(t+1|t) - y^\circ)^2] + \lambda^2$$

Il controllore agisce solo sul primo termine. Quindi: $\hat{y}(t+1) = y^\circ \Rightarrow$ ricaviamo il controllore C. Si ricordi che noi vogliamo che:

$y = y^\circ$ il più possibile (INGENUO).

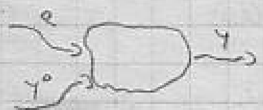
Possiamo però imporre che $\hat{y}(t+1|t) = y^\circ$, da qui il termine di controllo predittivo. Quindi consideriamo il seguente problema di controllo. Bisogna fare in modo che una variabile y replichi un andamento desiderato indicato con y°. La variabile y viene detta VARIABILE CONTROLLATA oppure VARIABILE DI IMPATTO. Consideriamo il seguente schema generico.

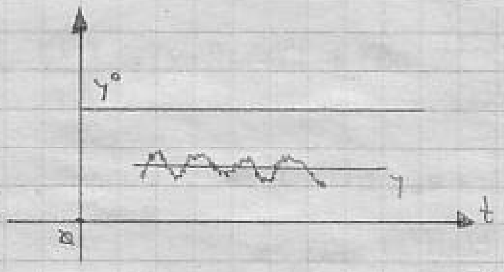


Vediamo il caso in cui y° è costante (set points) ed S è un modello deterministico. Sia:

$$S: A(z)y(t) = B(z)u(t) + C(z)e(t)$$

Quando C viene progettato si ha: Bisogna fare in modo che il sistema in retroazione sia stabile, in quanto vogliamo che $y(t)$ sia un processo a regime stazionario. Graficamente si ha:





$\begin{cases} E[y] = \bar{y}^\circ \\ E[(y(t) - \bar{y}^\circ)^2] \to \min \end{cases}$

↳ scarto di varianza

Per rendere minima J, possiamo agire sulla variabile di controllo $u(t)$. Dobbiamo però considerare il ritardo K sull'uscita. Quindi:

$$S: A(z)y(t) = B(z)u(t-K) + C(z)e(t)$$

Si noti che la nostra varianza non cambia con t. Quindi possiamo scrivere:

$$J = E[(y(t+K) - \bar{y}^\circ)^2]$$

Siccome: $y(t+K) = u(t) + \varepsilon(t+K)$, non si riesce a fare $y(t+K) = \bar{y}^\circ$. Possiamo però provare a scrivere:

$\hat{y}(t+K|t) = \bar{y}^\circ$. Si ricordi infatti che: $y(t+K) = \hat{y}(t+K|t) + \varepsilon(t+K)$

In breve ragioniamo che la predizione dell'uscita coincida con il valore desiderato e cioè:

$$\hat{y}(t+k|t) = \bar{y}^{\circ}.$$

Questo si ha perché $\varepsilon(t+k)$ è incorrelato da $\hat{y}(t+k|t)$, grazie all'ottimalità del predittore. Seguiamo quindi la seguente logica; Si esegue la divisione del polinomio $C(z)$ per il polinomio $A(z)$ per k passi:

$$C(z) = A(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z) \quad \rightarrow \text{EQUAZIONE DIOFANTINA}$$

con: $E(z) = 1 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{k-1} z^{-k+1}$. Si noti che siccome $A(z)$ e $C(z)$ sono monici, il primo coefficiente di $E(z)$ è pari a 1. Moltiplichiamo entrambi i membri di S per $E(z)$ ottenendo:

$$A(z)E(z)y(t+k) = B(z)E(z)u(t) + C(z)E(z)e(t+k)$$

Aggiungendo poi ai membri il termine $C(z)y(t+k)$ si ottiene:

$$C(z)y(t+k) = B(z)E(z)u(t) + (C(z) - A(z)E(z))y(t+k) + C(z)E(z)e(t+k)$$

Tenendo conto dell'equazione Diofantina e dividendo tutto per $C(z)$ si ottiene:

$$y(t+k) = \frac{\tilde{F}(z)}{C(z)}y(t) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t) + E(z)e(t+k)$$

Infatti:

$$\frac{\cancel{C(z)}y(t+k)}{\cancel{C(z)}} = \frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t) + \frac{\cancel{C(z)}E(z)}{\cancel{C(z)}}e(t+k) + \left(\frac{\cancel{A(z)E(z)} + z^{-k}\tilde{F}(z) - \cancel{A(z)E(z)}}{C(z)}\right)y(t+k)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t+k) = \frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t) + E(z)e(t+k) + \left(\frac{z^{-k}\tilde{F}(z)}{C(z)}\right)y(t+k) =$$

$$= \frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t) + E(z)e(t+k) + \frac{\tilde{F}(z)}{C(z)}y(t).$$

Però:

$$E(z)e(t+k) = e(t+k) + e_1 e(t+k-1) + \dots + e_{k-1} e(t+1) \Rightarrow$$ incorrelata con il passato fino all'istante t.

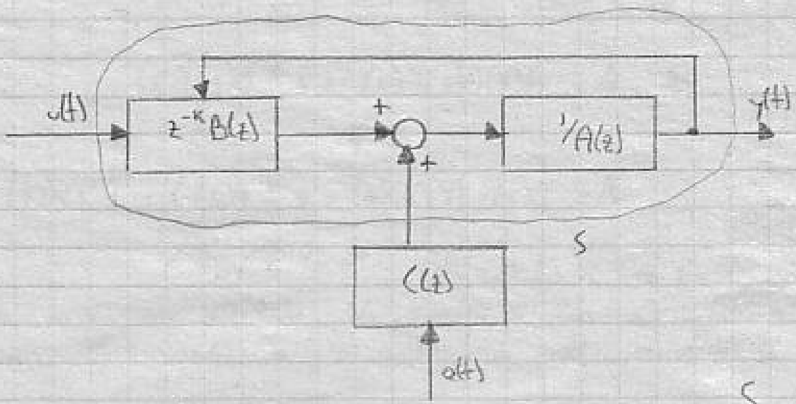
Invece i primi due addendi cioè $\frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t)$ e $\frac{\tilde{F}(z)}{C(z)}y(t)$ dipendono rispettivamente da $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ fino al tempo t. Quindi il predittore ottimo è dato da:

$$\hat{S}: \; C(z)\hat{y}(t+k|t) = B(z)E(z)u(t) + \tilde{F}(z)y(t)$$

Quindi la legge di controllo, e ovviamente il controllore, sono dati da:

$$C: \; C(z)\bar{y}^{\circ} = \tilde{F}(z)y(t) + B(z)E(z)u(t)$$ visto che $\hat{y}(t+k|t) = \bar{y}^{\circ}$.

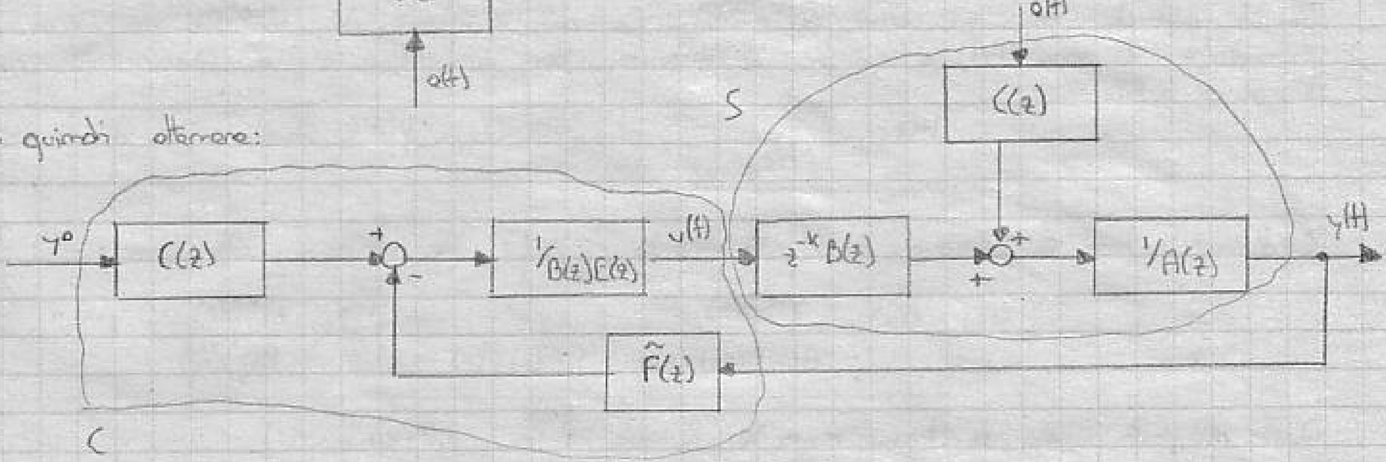
Vediamo quanto appena visto con gli schemi a blocchi:



Si noti che:

$$u(t) = \frac{-\tilde{F}(z)}{B(z)E(z)} y(t) + \frac{C(z)}{B(z)E(z)} \bar{y}^{\circ}$$

Possiamo quindi ottenere:



Supponiamo ora che il segnale di riferimento non sia costante. In questo caso si ha:

$$J = E\left[(y(t+k) - y^{\circ}(t+k))^2\right]$$

Si scomponga ora il segnale di riferimento nella sua predizione ottima k passi in avanti e nel relativo errore di predizione:

$$\underline{y^{\circ}(t+k) = \hat{y}^{\circ}(t+k|t) + \varepsilon^{\circ}(t+k)}$$

$$\Downarrow$$

Vogliamo che:

$$\begin{cases} \hat{y}(t+k|t) = \hat{y}^{\circ}(t+k|t) \\ \hat{y}(t+k|t) = y^{\circ}(t) \end{cases}$$

Questo ci permette di dire che: $\underline{J = E\left[(y(t+k) - y^{\circ}(t))^2\right]}$. Quindi la legge di controllo sarà:

$$\underline{C: \; C(z)\,\hat{y}^{\circ}(t+k|t) = \tilde{F}(z)\,y(t) + B(z)E(z)\,u(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{C: \; C(z)\,y^{\circ}(t) = \tilde{F}(z)\,y(t) + B(z)E(z)\,u(t)}$$

Analizziamo ora il sistema di controllo e la sua stabilità. Si noti che per sistema di controllo intendiamo l'unione del controllore e del sistema sotto controllo. Quindi:

<u>SISTEMA DI CONTROLLO = CONTROLLORE (C) + SISTEMA SOTTO CONTROLLO (S)</u>

Il sistema di controllo è stabile se C(z) è stabile (e lo è perché è un processo MA), e se l'anello di retroazione è stabile. Sia

perché la retroazione è negativa.

D = numeratore + denominatore della f.d.t d'anello.

Posto:

$$L(z) = z^{-k} \cdot \frac{B(z)\tilde{F}(z)}{A(z)B(z)E(z)} \Rightarrow \Delta = A(z)B(z)E(z) + z^{-k}B(z)\tilde{F}(z)$$

f.d.t d'anello.

$$\Downarrow$$

$$\Delta = B(z)\underbrace{\left(A(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)\right)}_{\text{eq. Diofantina}} = B(z)C(z)$$

Quindi il sistema di controllo è stabile se e solo se Δ ha singolarità minori di 1 in modulo.
Questo dipende dai polinomi $C(z)$ e $B(z)$. Quindi il sistema di controllo risulterà stabile se e soltanto se lo sono $B(z)$ e quindi il sistema da controllare è a sfasamento minimo.
Si ricordi infatti che:

$$H(z) = \frac{F(z)}{1+L(z)}$$ con $F(z)$ = f.d.t della linea di andata.

Calcoliamo ora la funzione di trasferimento (f.d.t) da $y°$ a y. Otteniamo:

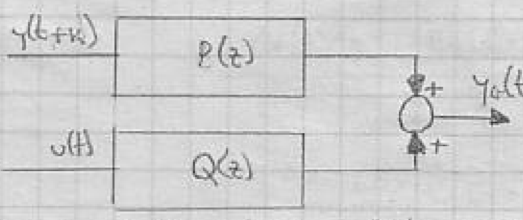
$$S(z) = C(z) \cdot \frac{z^{-k}B(z)}{A(z)B(z)E(z) + z^{-k}B(z)\tilde{F}(z)} = \cancel{C(z)}\frac{z^{-k}B(z)}{B(z)\cancel{C(z)}} = z^{-k}.$$

Questo comporta che, se trascuriamo il rumore si ha: $y(t+k) = y°(t)$
Questo porta a dire che la variabile $u(t)$ crea problemi se ha degli scostamenti notevoli. Si ricordi che per motivi di ingegnerizzazione la variabile $u(t)$ deve essere limitata. Vediamo ora la MINIMA VARIANZA GENERALIZZATA:

$$J = E[(y_G(t+k) - y°(t))^2]$$

NB: $y°(t)$ è un processo stocastico stazionario

dove y_G si ottiene in questo modo:



* Quindi $y_G(t+k)$ è stata ottenuta filtrando $u(\cdot)$ e $y(t+k)$.

Le funzioni $P(z)$ e $Q(z)$ sono a scelta del progettista. Ipotizziamo che sia soddisfatta la condizione sulla stabilità in modo che $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ siano processi stocastici stazionari. La cifra di merito può essere perciò così riscritta:

$$J = E[(P(z)y(t+k) + Q(z)u(t) - y°(t))^2]$$

visto che $y_G(t+k) = P(z)y(t+k) + Q(z)u(t)$. Determiniamo ora il controllore ottimo facendo l'ipotesi che il meccanismo di generazione dei dati sia:

$$S: A(z)y(t) = B(z)u(t-k) + C(z)e(t), \quad \text{con } e(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2).$$

Poniamo:

- $\tilde{y}(t+k) = P(z)y(t+k)$
- $\tilde{y}°(t) = y°(t) - Q(z)u(t)$

$$\Rightarrow J = E[(\tilde{y}(t+k) - \tilde{y}°(t))^2]$$

Caratterizziamo numeratore e denominatore come segue: $P(z) = \frac{P_N(z)}{P_D(z)}$, $Q(z) = \frac{Q_N(z)}{Q_D(z)}$
Quindi:

$$\tilde{y}(t+k) = \frac{P_N(z)}{P_D(z)}y(t+k) = \frac{P_N(z)}{P_D(z)}\underbrace{\left(\frac{B(z)}{A(z)}u(t) + \frac{C(z)}{A(z)}e(t+k)\right)}_{y \text{ di ARMAX}}$$