- Che tipo di processo è, nel caso generale, $\varepsilon(t)$?
- Dire se esistono valori della coppia di parametri (a°, c°) per cui il processo $\varepsilon(t)$ risulta essere un rumore bianco e, in caso affermativo, si specifichino tali valori.

1) • Posto: $J(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{t=1}^{N} e(t)$

si ha:

Per $N \to \infty \Rightarrow J \to \bar{J}$ con $\bar{J} = E[e(t)^2] = E[(v(t) - \hat{v}(t))^2]$

Siccome $\hat{v}(t) = a v(t-1)$ per il processo $AR(1)$, si ottiene:

$$E[(v(t) - a v(t-1))^2] = \gamma(0) + a^2 \gamma(0) - 2a\gamma(1)$$

Per determinare il parametro stimato si procede così:

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 2a\gamma(0) - 2\gamma(1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \to \text{relazione valida solo per gli } \underline{AR}.$$

A questo punto $\gamma(0), \gamma(1)$ si possono determinare risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \gamma(0) = a^{\circ 2}\gamma(0) + 1 + c^{\circ 2} + 2a^\circ c^\circ \\ \gamma(1) = a^\circ \gamma(0) + c^\circ \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a} = a^\circ + \frac{c^\circ(1 - a^{\circ 2})}{1 + c^{\circ 2} + 2a^\circ c^\circ}$$

• $\varepsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t) = a^\circ v(t-1) - \hat{a} v(t-1) + \xi(t) + c^\circ \xi(t-1) = (a^\circ - \hat{a}) v(t-1) + \xi(t) + c^\circ \xi(t-1)$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon(t) = (a^\circ - \hat{a}) z^{-1} \frac{1 + c^\circ z^{-1}}{1 - a^\circ z^{-1}} \xi(t) + c^\circ \xi(t-1)$$

Quindi: $$\frac{\varepsilon(t)}{\xi(t)} = \frac{(1 + c^\circ z^{-1})((a^\circ - \hat{a}) z^{-1} + (1 - a^\circ z^{-1}))}{1 - a^\circ z^{-1}} = \frac{(1 + c^\circ z^{-1})(1 - \hat{a} z^{-1})}{(1 - a^\circ z^{-1})}$$

- $\varepsilon(t)$ è un processo $ARMA(1,2)$.
- Nel caso in cui $c^\circ = 0$ e $|a^\circ| < 1$ il sistema S è di tipo $AR(1)$. Quindi: $a^\circ = \hat{a}$
Quindi $\varepsilon(t)$ è un rumore bianco.

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon(t) / \xi(t) = 1$$

2) Si consideri il sistema

$$S:\ y(t) = a^\circ u(t) + v(t)$$

dove $v(t) = e(t) + 0{,}5 e(t-1)$ con $e(\cdot) \sim WN(0,1)$

Il segnale in ingresso è deterministico e pari a 1 ad ogni istante $(u(t) = 1, \forall t)$.
Sia inoltre data la famiglia di modelli:

$$M:\ y(t) = a u(t) + \xi(t) \qquad \text{con } \xi(t) \sim WN \text{ a valore atteso nullo}$$

- Si stimi il parametro 'a' con l'algoritmo dei minimi quadrati. A quale valore tende la stima $\hat{a}(t)$ quando $t \to \infty$?

- Come si modifica la risposta al punto precedente se il rumore $e(\cdot)$ ha media 1? $e(\cdot) \sim WN(1,1)$

- Dire come cambia la risposta al punto 1 se $v(t)$ è dato dall'equazione

$$v(t) = 0{,}2\,v(t-1) + e(t) \qquad \text{con } e(\cdot) \sim WN(0,1).$$

2) • Siccome: $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t+1|t)$

$$\Downarrow$$

Modello M in forma di predizione: $\hat{M}(\vartheta): \hat{y}(t+1|t) = a\,u(t)$

Quindi:

$$\varepsilon(t) = y(t) - a\,u(t) \quad \text{con } y(t) = a^\circ u(t) + v(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = a^\circ u(t) + v(t) - a\,u(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = (a^\circ - a)\,u(t) + v(t)$$

Il metodo dei minimi quadrati è un metodo di minimizzazione dell'errore di predizione e quindi:

$$J = (1/N) \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2 \Rightarrow \bar{J}(a) = E[\varepsilon(t)^2]$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{J}(a) = E[((a^\circ - a)u(t) + v(t))^2] =$$

$$= E[(a^\circ - a)^2 u(t)^2 + v(t)^2 + 2(a^\circ - a)u(t)v(t)] =$$

$$= E[(a^\circ - a)^2 + v(t)^2 + 2(a^\circ - a)v(t)]$$

Questo succede perché $u(t) = 1, \forall t$. Perciò:

$$\bar{J}(a) = (a^\circ - a)^2 + \mathrm{Var}[v(t)]$$

Il minimo di $\bar{J}(a)$ è: $\mathrm{Var}[v(t)]$ che si ottiene quando $\underline{a^\circ = a}$.

- In questo caso si ha:

$$E[v(t)] = E[e(t) + 0{,}5\,e(t-1)] = 1{,}5$$

Quindi la cifra di merito assume la seguente forma:

$$\bar{J}(a) = E[((a^\circ - a) + v(t))^2] = E[(a^\circ - a)^2 + v(t)^2 + 2(a^\circ - a)v(t)] = (a^\circ - a)^2 + 3(a^\circ - a) + \mathrm{Var}[v(t)]$$

Per trovare il minimo si ha:

$$\frac{d\bar{J}(a)}{da} = 2(a - a^\circ) - 3 = 0 \Rightarrow a = a^\circ + 1{,}5$$

- Si ha sempre $E[v(t)] = 0$ e quindi $\bar{J}(a) = (a^\circ - a)^2 + \mathrm{Var}[v(t)] \Rightarrow \underline{a^\circ = a}$.

3) Si consideri il sistema ingresso/uscita descritto dall'equazione:

$$y(t) = a u(t) + d(t) \qquad \text{con } d(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

in cui $a \in \mathbb{R}$ è un parametro, $u(\cdot)$ è una variabile di ingresso, $y(\cdot)$ è una variabile di uscita, ed $d(\cdot)$ è un disturbo.

- Si spieghi concisamente in cosa consiste la stima ai minimi quadrati di a a partire da misurazioni delle variabili di ingresso e di uscita.

- Si supponga di avere a disposizione le sei misure delle variabile di ingresso e di uscita riportate nella tabella sottostante:

	1	2	3	4	5	6
u	5	8	2	-1	-4	3
y	7	7	4	0	-6	3

Si calcoli la stima ai minimi quadrati del parametro a basata sui dati a disposizione;

3)

- La stima ai minimi quadrati consiste nel minimizzare la seguente cifra di merito:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \hat{y}(t+1|t))^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dJ(a)}{da} = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} 2(y(t) - \hat{y}(t+1)t) = 0$$

In breve si ha:

$$\frac{dJ(a)}{da} = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} 2(y(t) - a u(t)) u(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{t=1}^{N} y(t) u(t) = a \sum_{t=1}^{N} u^2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^{N} y(t) u(t)}{\sum_{t=1}^{N} u(t)^2}$$

- Sostituendo i dati della tabella nella formula per calcolare $\hat{a}$, si ottiene:

$$\hat{a} = \frac{35 + 56 + 8 + 24 + 9}{25 + 64 + 4 + 1 + 16 + 9} = \frac{132}{119} \simeq 1,1$$

4) Si considerino le variabili casuali: $d(i) = m + v(i)$
dove $v(i)$ è una successione bianca ($v(i)$ e $v(j)$ incorrelati per $i \neq j$) a valore atteso nullo, $E[v(i)] = 0$, $\forall i$ e varianza $Var[v(i)] = 1$ per i pari e $Var[v(i)] = 2$ per i dispari.

Si vuole stimare m a partire dalle osservazioni di $d(1), d(2), d(3), \dots, d(10)$. Si chiede di trovare lo stimatore non polarizzato a minima varianza nella famiglia di stimatori:

$$\hat{m} = q_1 d(1) + q_2 d(2) + \dots + q_{10} d(10)$$

4) Perché lo stimatore sia non polarizzato è necessario che: $E[\hat{m}] = m$. Essendo $E[v(i)] = 0$ si ha:

$$E[\hat{m}] = q_1 m + q_2 m + \dots + q_{10} m = m(q_1 + q_2 + \dots + q_{10})$$

$$\Downarrow$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_{10} = 1$$

Tenendo presente che le $v(i)$ sono indipendenti tra loro, si ha:

$$Var[\hat{m}] = E[(\hat{m} - m)^2] = E[((q_1 v(1) + q_2 v(2) + \dots + q_{10} v(10))^2] =$$

$$= (q_1^2 + q_3^2 + \dots + q_9^2)\,2 + (q_2^2 + q_4^2 + \dots + q_{10}^2)\,1$$

NB: La varianza dello stimatore dipende dalla somma dei parametri.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} q_1 = q_3 = \dots = q_9 = x \\ q_2 = \dots = q_{10} = y \end{cases}$$

Quindi: $f(x,y) = 10x^2 + 5y^2$ con $5x + 5y = 1$

$$\Downarrow$$

$$y = 1/5 - x \Rightarrow f(x) = 15x^2 - 2x + 1/5$$

Facendo la derivata di $f(x)$ rispetto a x si ottiene:

$$\frac{df(x)}{dx} = 30x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_3 = \dots = q_9 = x = 1/15 \\ q_2 = q_4 = \dots = q_{10} = y = 2/15 \end{cases}$$

Quindi lo stimatore non polarizzato a minima varianza è:

$$\hat{m} = \tfrac{1}{15}(d(1) + d(3) + \dots + d(9)) + \tfrac{2}{15}(d(2) + \dots + d(10))$$

5) Siano date due variabili casuali (scalari) $d(1)$ e $d(2)$ entrambe a densità di probabilità esponenziale, ossia con densità di probabilità:

$$p(x) = \vartheta e^{-\vartheta x} \quad , x \geq 0$$

dove ϑ è un parametro incognito. Si supponga di avere a disposizione δ_1 e δ_2 (valori numerici assunti da $d(1)$ e $d(2)$. Ricavare la stima a massima verosimiglianza di ϑ.

5) Ipotizziamo che le variabili siano incorrelate, e che quindi si ha la seguente probabilità congiunta:

$$p(x_1, x_2) = \vartheta^2 e^{-\vartheta x_1 - \vartheta x_2} = \vartheta^2 e^{-\vartheta(x_1 - x_2)}$$

$* = -\vartheta(\delta_1 + \delta_2)$

La funzione di verosimiglianza è: $L(\vartheta) = \vartheta^2 e^{-\vartheta(\delta_1 + \delta_2)}$.
A questo punto il valore ϑ che massimizza la funzione di verosimiglianza è lo stimatore cercato. Quindi: $\frac{dL(\vartheta)}{d\vartheta} = [2\vartheta - (\delta_1 + \delta_2)]e^{*}$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

6) Si consideri il processo MA(2)

$S: \; v(t) = e(t) + c^{\circ} e(t-2)$, $e \sim WN(0,1)$

dove $|c^{\circ}| < 1$. Si considerino poi i due modelli:

$M_1: \; v(t) = a\,v(t-1) + \xi(t)$ con $\xi(t) \sim WN(0, \lambda^2)$
$M_2: \; v(t) = \xi(t) + c\,\xi(t-1)$

Questi modelli vengono identificati con un metodo ad identificazione a minimizzazione dell'errore di predizione, con un numero di dati molto elevato.

- Calcolare il valore che si identifica per il parametro a di M_1
- Si analizzi l'errore di predizione del modello M_1 corrispondente al valore $\hat{a}$ identificato. Dall'analisi della funzione di correlazione dire come è possibile appurare che il modello identificato non può descrivere il meccanismo di generazione dei dati.
- Calcolare il valore che si identifica per il parametro c di M_2.

6) - Posto $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t+1|t) \Rightarrow \varepsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t+1|t) = v(t) - a\,v(t-1)$, visto che $\hat{v}(t+1|t) = a\,v(t-1)$
Quindi:

$$J(a) = E[(v(t) - \hat{v}(t+1|t))^2] \Rightarrow \lim J(a) = \lim E[(v(t) - a\,v(t-1))^2] =$$
$$= \lim E[(v(t)^2 + a^2 v(t-1)^2 - 2a\,v(t)v(t-1))] =$$
$$= \lim E[v(t)^2] + E[a^2 v(t-1)^2] - 2a\,E[v(t)v(t-1)]$$
$$= \gamma_v(0) + a^2 \gamma_v(0) - 2a\,\gamma(1)$$

Perciò posto: $\begin{cases} \gamma(0) = 1 + c^{\circ 2} \\ \gamma(1) = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$$J(a) = 1 + c^{\circ 2} + a^2(1 + c^{\circ 2}) =$$
$$= 1 + c^{\circ 2} + a^2 + a^2 c^{\circ 2} \Rightarrow \frac{dJ(a)}{da} = 2a + 2a\,c^{\circ 2} = 0 \Rightarrow a(2 + c^{\circ 2} \cdot 2) = 0$$

$\Downarrow$

$a = 0$

- Posto $\hat{a} = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) = v(t) - \hat{a}\,v(t-1) = v(t)$. Si noti che S ha $\gamma(1) = 0$, mentre per un modello AR(1), $\gamma(1)$ deve essere diverso da zero. Quindi il modello identificato non può descrivere il sistema S.

- Per M_2 si ha la seguente forma predittiva:

$$\hat{v}(t+1|t) = \frac{cz^{-1}}{1+cz^{-1}} v(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t+1|t) = v(t) - \frac{cz^{-1}}{1+cz^{-1}} v(t) =$$
$$= v(t)\left(1 - \frac{cz^{-1}}{1+cz^{-1}}\right) = \frac{1}{1+cz^{-1}} v(t) = \frac{1+c^{\circ} z^{-2}}{1+cz^{-1}} e(t)$$

Quindi:

$$\underline{\varepsilon(t) = -c\,\varepsilon(t-1) + e(t) + c^{\circ} e(t-2)}$$

Indichiamo con J la varianza di $\varepsilon(t)$ $\Rightarrow$ $\underline{J = c^2 J + 1 + c^{\circ 2} - 2c^{\circ} c\, E[\varepsilon(t-1) e(t-2)]}$
Ma:

$$E[\varepsilon(t-1)e(t-2)] = E[(-c\,\varepsilon(t-2) + e(t-1) + c^{\circ} e(t-3))e(t-2)] = -c\,E[\varepsilon(t-2)e(t-2)] =$$
$$= -c\,E[(\varepsilon(t-3) + e(t-2) + c^{\circ} e(t-4))e(t-2)] = -c \Downarrow$$

Quindi $J = \dfrac{1+c^{o2}+2c^o c}{1-c^2}$, $\dfrac{dJ(c)}{dc} = 0 \Rightarrow \dfrac{(2c^o+2c)(1-c^2)+2c(1+c^{o2}+2c^o c)}{(1-c^2)^2} = 0$

$$\Downarrow$$

$$2c^o - 2c^o c^2 + 2c - 2c^3 + 2c + 2cc^{o2} + 4c^o c^2 =$$
$$= 4c^o c(1-c^2) + 2c(1+c^{o2}+2c^o c^2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{c = 0}$$

7) Si considerino delle variabili casuali $d(1)$, $d(2)$, gaussiane ed indipendenti, tali che:

$d(1) \sim G(m, 2)$
$d(2) \sim G(m, 4)$

Si vuole stimare m mediante una osservazione di $d(1)$ ed una osservazione di $d(2)$.

- Nella famiglia degli stimatori lineari, $\hat{m} = \alpha d(1) + \beta d(2)$, dire a quali condizioni devono soddisfare α e β affinché lo stimatore $\hat{m}$ non sia polarizzato.
- Dire, per quale scelta di α e β, lo stimatore $\hat{m}$, oltre a essere non polarizzato, è a varianza minima.
- Quanto vale la varianza dello stimatore a minima varianza?

7) • $E[\hat{m}] = m \Rightarrow E[\hat{m}] = \alpha E[d(1)] + \beta E[d(2)] = (\alpha+\beta)m$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\alpha+\beta = 1} \quad \underline{\text{(condizione)}}$$

• $\alpha+\beta = 1 \Rightarrow Var[\hat{m}] = E[(\hat{m}-m)^2] = E[((\alpha d(1)+\beta d(2)) - m)^2] =$

$= E[(\alpha d(1) + \beta d(2) - m(\alpha+\beta))^2] = \alpha^2 E[(d(1)-m)^2] + \beta^2 E[(d(2)-m)^2] =$

$= \alpha^2 Var(d(1)) + \beta^2 Var(d(2)) = 2\alpha^2 + 4\beta^2 = 6\alpha^2 - 8\alpha + 4$

Quindi $\dfrac{dVar[\hat{m}]}{d\alpha} = 12\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 8/12 = 2/3$ e quindi $\beta = 1/3$.

Perciò:

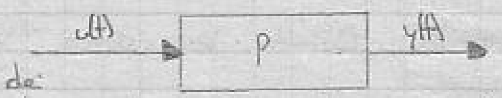
$$\underline{\hat{m} = \tfrac{2}{3} d(1) + \tfrac{1}{3} d(2)};$$

• $Var[\hat{m}] = Var[\tfrac{2}{3} d(1) + \tfrac{1}{3} d(2)] = E[(\hat{m}-m)^2] = E[(\tfrac{2}{3} d(1) + \tfrac{1}{3} d(2) - m)^2] =$

$= E[\,\dots\,] = 6\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 6\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\tfrac{2}{3}\right) + 4 = \underline{\tfrac{4}{3}}$.

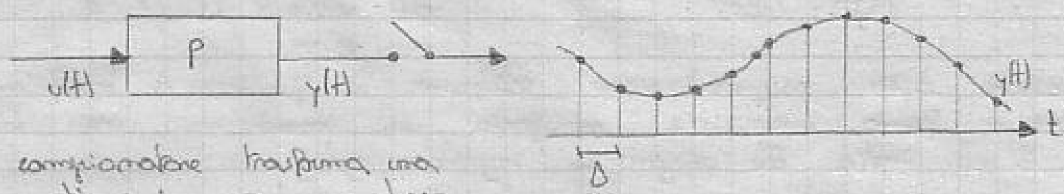
* CONTROLLO PREDITTIVO:

Quello che facciamo ora è studiare i sistemi a segnali campionati. Di solito noi abbiamo a che fare con sistemi a tempo continuo. Supponiamo di avere la seguente situazione:



dove t è continuo.

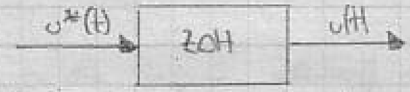
Possiamo utilizzare dei dispositivi che ci permettono di passare dal mondo continuo al mondo discreto e viceversa. Uno di questi dispositivi è il CAMPIONATORE. Esso è schematizzato di seguito:



In breve il campionatore trasforma una grandezza continua in una grandezza discreta (operazione di campionamento). Viceversa è possibile convertire una grandezza discreta in una grandezza continua. Questo può essere fatto grazie ad un MANTENITORE.

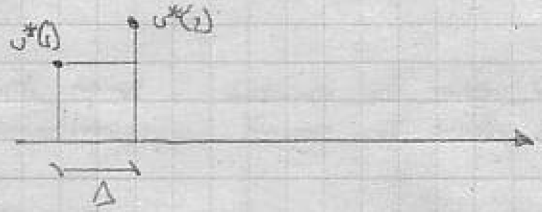
* Sia Δ l'intervallo di campionamento. t indica l'indice temporale discreto. Quindi si ha:

$$y(t) = y(t \cdot \Delta)$$



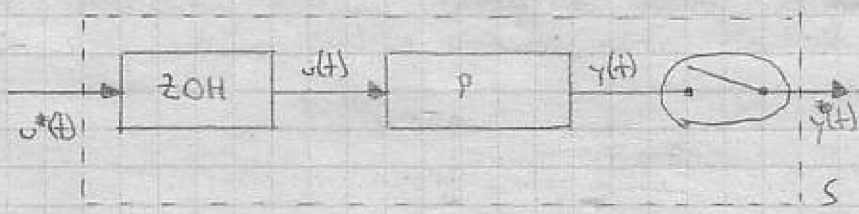
* ZOH: Zero Order Hold

Si noti che $u^*(t)$ è un segnale a tempo discreto. Il mantenitore più conosciuto è il mantenitore di ordine zero (ZOH) che funziona nel seguente modo:



* Rappresentazione del funzionamento di uno ZOH.

In breve l'ultimo valore letto della variabile u^* viene 'mantenuto' per un tempo pari a Δ. Quindi possiamo generalizzare il tutto attraverso il seguente schema:



dove P è il sistema SOTTO CONTROLLO.

Supponiamo per comodità che il sistema P abbia la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_h s^h}{\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_k s^k} \Rightarrow G(s) \text{ ha } h \text{ zeri e } k \text{ poli.}$$

Ovviamente il sistema è stabile se e solo se i k poli hanno parte reale negativa. Il sistema a segnali campionati S, avrà invece la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{\gamma(0) + \gamma(1) + \dots + \gamma(h) z^h}{\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_k z^k}$$

Una valida alternativa per rappresentare il sistema P è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}, \text{ dove } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{(per il sistema P che è continuo).}$$

Si noti che il sistema S invece è ancora lineare in quanto il campionamento e il