Calcoliamoci la varianza:

$$\gamma(0) = E[v(t)^2] = E\left[\left(\tfrac{1}{4} v(t-1) + \eta(t) + 2\eta(t-1)\right)^2\right] = E\left[\tfrac{1}{16} v(t-1)^2 + \eta(t)^2 + 4\eta(t-1)^2 + \tfrac{1}{2} v(t-1)\eta(t) + 4\eta(t)\eta(t-1) + v(t-1)\eta(t-1)\right] = \tfrac{1}{16} E[v(t-1)^2] + E[\eta(t)^2] + 4E[\eta(t-1)^2] + \tfrac{1}{2} E[v(t-1)\eta(t)] + 4E[\eta(t)\eta(t-1)] + E[v(t-1)\eta(t-1)] = \tfrac{1}{16}\gamma(0) + \tfrac{1}{4} + 1 + 0 + 1 + 0 = \tfrac{1}{16}\gamma(0) + \tfrac{3}{2} \Rightarrow \gamma(0) - \tfrac{1}{16}\gamma(0) = \tfrac{3}{2} \Rightarrow \gamma(0)\left(1-\tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma(0) = \frac{3/2}{\left(1-\frac{1}{16}\right)} = \frac{8}{5}$$

Calcoliamo la covarianza:

$$\gamma(1) = E[v(t)v(t-1)] = E\left[\left(\tfrac{1}{4} v(t-1) + \eta(t) + 2\eta(t-1)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4} v(t-2) + \eta(t-1) + 2\eta(t-2)\right)\right] = E\left[\left(\tfrac{1}{16} v(t-1)v(t-2) + \tfrac{1}{4} v(t-1)\eta(t-1) + \tfrac{1}{4} v(t-1)\, 2\eta(t-2) + \eta(t)\tfrac{1}{4} v(t-2) + \eta(t)\eta(t-1) + \eta(t)\, 2\eta(t-2) + 2\eta(t-1)\tfrac{1}{4} v(t-2) + 2\eta(t-1)\eta(t) + 2\eta(t-1)\, 2\eta(t-2)\right]\right]$$

oppure:

$$\gamma(1) = E\left[\left(\tfrac{1}{4} v(t-1) + \eta(t) + 2\eta(t-1)\right)\cdot v(t-1)\right] = \tfrac{1}{4}\gamma(0) + E[\eta(t)v(t-1)] + 2E[\eta(t-1)v(t-1)] = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$

- $W(z) = \dfrac{z+2}{z-\frac{1}{4}}$ non è in forma spettrale. Quindi: $\hat{W}(z) = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{4}}$, dove però l'ingresso è: $\xi(t) \sim WN(0,1)$.

Lunga divisione: $C(z) = z+\frac{1}{2}$, $A(z) = z - \frac{1}{4}$

Quindi:

$$\begin{array}{r|l} z+\frac{1}{2} & z-\frac{1}{4} \\ \hline -\left(z-\frac{1}{4}\right) & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \end{array} \Rightarrow \hat{W}_1(z) = 1 + \frac{3/4}{z-\frac{1}{4}} = 1 + z^{-1}\frac{\frac{3}{4}z}{z-\frac{1}{4}}$$

predittore ottimo ad un passo da $\xi(\cdot)$.

$$\hat{W}_1(z) = \frac{\hat{v}(t+1|t)}{v(t)} = \frac{\frac{3}{4}z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Infine:

$$\hat{v}(t+1|t) = \tfrac{3}{4} v(t) - \tfrac{1}{2}\hat{v}(t|t-1)$$

* Si noti che: $\hat{W}(z) = \dfrac{z+2}{z-\frac{1}{4}} \cdot \dfrac{z+\frac{1}{2}}{z+2} \cdot 4\eta(t)$

La regola di fattorizzazione canonica per $W(z)$.

- Varianza errore di predizione a un passo:

$$Var[\hat{v}(t+1|t) - v(t+1)] = Var[\xi(t)] = 1$$

- Divisione:

$$\begin{array}{r|l} z+\frac{1}{2} & z-\frac{1}{4} \\ \hline -\left(z-\frac{1}{4}\right) & 1+\frac{3}{4}z^{-1} \\ \hline \frac{3}{4} & \\ -\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{16}z^{-1}\right) & \\ \hline \frac{3}{16}z^{-1} & \end{array} \Rightarrow \hat{W}_2(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + z^{-2}\frac{\frac{3}{16}z}{z-\frac{1}{4}}$$

Quindi:

$$\hat{W}_2(z) = \frac{\hat{v}(t+2|t)}{v(t)} = \frac{\frac{3}{16}z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{16}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{v}(t+2|t) = -\tfrac{1}{2}\hat{v}(t+1|t-1) + \tfrac{3}{16} v(t)$$

- La varianza è: $\mathrm{Var}[\hat{y}(t+2|t) - y(t+2)] = \mathrm{Var}[\xi(t)](1^2 + (\frac{3}{4})^2) = \frac{25}{16}$

2) Si consideri il processo stazionario $y(\cdot)$ generato dal sistema:

$$e(t) \longrightarrow \boxed{W(z)} \xrightarrow{\;y(t)\;}$$

dove $e \sim WN(0,1)$ e $W(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

- Si ricavi il predittore ottimo di $y(t)$ basato sulle misure $y(t-1), y(t-2), \ldots$
- Si calcoli la varianza dell'errore di predizione associato al predittore calcolato.
- Si faccia ancora riferimento al processo. Questa volta si supponga $e(t)$ misurabile. Si calcoli il predittore ottimo ad un passo basato sulle misure di $e(t)$, e si calcoli la varianza dell'errore di predizione.

2) • $W(z)$ non è in forma canonica. Per porla sotto tale forma bisogna premoltiplicare $W(z)$ per la funzione di trasferimento del filtro passatutto $(T(z))$.

Quindi:

$$\hat{W}(z) = T(z)W(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\cancel{2z^{-1}}} \cdot \frac{1+\cancel{2z^{-1}}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \cdot (4e(t))$$

necessario in modo che $\Phi_{\hat{W}} = \Phi_y$.

$$\hat{W}(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

Il sistema con funzione di trasferimento $\hat{W}(z)$ verrà alimentato da un rumore bianco con varianza 4 e valore atteso nullo. Quindi:

$$\xi(t) \longrightarrow \boxed{\hat{W}(z)} \xrightarrow{\;y(t)\;} \quad \text{con } \xi(t) \sim WN(0,4).$$

A questo punto si può effettuare la lunga divisione.

$$\begin{array}{l|l} 1+\frac{1}{2}z^{-1} & (1-\frac{1}{2}z^{-1}) \cdot \ldots \\ - \;\ldots & \ldots \\ \hline \ldots & \end{array}$$

oppure più semplicemente $\Rightarrow$

$$\begin{cases} C(z) = 1+\frac{1}{2}z^{-1} \\ A(z) = (1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1}) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A(z)y(t) = C(z)\xi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$A(z)y(t) + C(z)y(t) - C(z)y(t) = C(z)\xi(t)$$

Quindi: $y(t) = \dfrac{C(z)-A(z)}{C(z)}y(t) + \xi(t) \Rightarrow \hat{y}(t|t-1) = \dfrac{z(C(z)-A(z))}{C(z)}y(t-1)$. Si noti che $\xi(t)$ è totalmente impredicibile.

Perciò:

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\, y(t-1)$$

- Errore di predizione e sua varianza:

$$\mathrm{Var}[\varepsilon(t)] = \mathrm{Var}[\xi(t)] = 4 \quad \text{con } \varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1).$$

- In questo caso il rumore $\xi(t)$ può essere misurato e quindi non è necessario porre il predittore in forma canonica. Perciò:

$\tilde{C}(z) = 1 + 2z^{-1} \Rightarrow A(z)y(t) = \tilde{C}(z)e(t)$ e quindi $y(t) = \dfrac{\tilde{C}(z) - A(z)}{A(z)} e(t) + e(t)$

$$\Downarrow$$

$$\hat{y}(t) = \frac{\tilde{C}(z) - A(z)}{A(z)} e(t) \rightarrow \text{predittore.}$$

Sostituendo i dati ottengo: $\hat{y}(t|t-1) = \dfrac{17/6 - 1/6\, z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} e(t-1)$

$$\Downarrow$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{5}{6}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{1}{6}\hat{y}(t-2|t-3) + \frac{17}{6}e(t-1) - \frac{1}{6}e(t-2)$$

4) Si consideri il modello ARMA(1,1): $y(t) = \frac{1}{3}y(t-1) + e(t-1) + 2e(t-2)$ con $e \sim WN(0,2)$

- Si ricavi il predittore ottimo.
- Si calcoli la varianza dell'errore di predizione.

4) • Si noti che l'errore agisce sull'uscita $y(t)$ con un istante di ritardo. Quindi possiamo definire un nuovo errore $e'(t) = e(t-1)$ avente le stesse caratteristiche di $e(t)$.
Quindi:

$$y(t) = \tfrac{1}{3}y(t-1) + e'(t) + 2e'(t-1) \Rightarrow y(t) - \tfrac{1}{3}y(t-1) = e'(t) + 2e'(t-1)$$

$$\Downarrow$$

Perciò:

$$W(z) = \frac{y(t)}{e'(t)} = \frac{(1+2z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \qquad y(t)(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}) = e'(t)(1+2z^{-1})$$

$$= \frac{z+2/\cancel{z}}{z-\frac{1}{3}/\cancel{z}} = \frac{z+2}{z-\frac{1}{3}} \rightarrow \text{non è in forma canonica.}$$

zero da sostituire

Quindi: $\hat{W}(z) = \dfrac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{3}} \Rightarrow \xi(t) \sim WN(0,8)$ e $\underline{\hat{W}(z) = W(z)\cdot T(z) \cdot, e'(t)}$

A questo punto abbiamo:

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{C(z) - A(z)}{A(z)} \xi(t) \rightarrow \text{predittore a partire dal rumore.}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} y(t) \rightarrow \text{predittore ottimo a partire dai dati.}$$

- Varianza dell'errore di predizione:

$$\underline{Var[y(t) - \hat{y}(t|t-1)] = Var[\xi(t)] = 8.}$$

5) Supponiamo di avere x, y tali che: $\begin{cases} x \sim N(0,2) \\ y \sim N(0,3) \end{cases}$ e x e v_1 sono indipendenti.
Sia:

$y = x + v_1 \leftarrow$ dato

Vogliamo calcolare $\hat{x}^{\,1} = E[x|y_1]$;

5) Noi sappiamo che: $\lambda_{xy_1}\lambda_{y_1y_1}^{-1}y_1$ (STIMATORE DI BAYES). Dobbiamo calcolare λ_{xy_1}, $\lambda_{y_1y_1}$.

$$\lambda_{xy_1} = E[xy_1] = E[x(x+v_1)] = E[x^2 + xv_1] = E[x^2] + \underbrace{E[xv_1]}_{0} = 2$$

$$\lambda_{y_1y_1} = E[y_1y_1] = E[(x+v_1)(x+v_1)] = E[x^2 + \underbrace{xv_1}_{0} + \underbrace{v_1x}_{0} + v_1^2] = 2+3 = 5.$$

Quindi: $E[x|y_1] = \lambda_{xy_1}\cdot\lambda_{y_1y_1}^{-1}y_1 = \frac{2}{5}y_1$ → proiezione di x su y_1.

Inoltre

$$E[(x-\hat{x}')^2] = E[(x-\tfrac{2}{5}y_1)^2] = E[(x-\tfrac{2}{5}x-\tfrac{2}{5}v_1)^2] = \tfrac{9}{25}E[x^2] + \tfrac{4}{25}E[v_1^2] + 0 =$$

$$= \frac{30}{25}.$$

6) Supponiamo di avere un'altra misurazione: $y_1 = x+v_1$, $y_2 = x+v_2$ con $v_2 \sim N(0,1)$; x e v_1 sono sempre ind.
Vogliamo calcolare $\hat{x} = E[x|y]$ con $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

6) $\hat{x} = \lambda_{xy}\cdot\lambda_{yy}^{-1}y$ con:

- $\lambda_{xy} = E[xy^T] = E[\underbrace{(xy_1)}_{x(x+v_1)}\ \underbrace{(xy_2)}_{x(x+v_2)}] = [2\ 2]$

- $\lambda_{yy} = E[yy^T] = E[\binom{y_1}{y_2}(y_1\ y_2)]$;

Quindi:

$$E\begin{bmatrix} y_1^2 & y_1y_2 \\ y_2y_1 & y_2^2 \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} E[y_1] & E[y_1y_2] \\ E[y_2y_1] & E[y_2] \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} (x+v_1)^2 & (x+v_1)(x+v_2) \\ (x+v_2)(x+v_1) & (x+v_2)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{yy}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

A questo punto:

$$\hat{x} = \lambda_{xy}\cdot\lambda_{yy}^{-1}y = [2\ 2]\cdot\begin{bmatrix} 3/11 & -2/11 \\ -2/11 & 5/11 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{11}y_1 + \tfrac{6}{11}y_2$$

* IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI:

L'identificazione dei modelli riveste una grande importanza perché l'ingegneria lavora con modelli inerti. L'identificazione ha come obbiettivo quello di costruire modelli "pronti per l'uso". In questa disciplina ci tocca risalire dai dati al modello. Quindi si ha:

DATI → MODELLO

Spesso i modelli appartenenti ad una famiglia sono caratterizzati da alcuni parametri, e il problema della scelta degli stessi viene affrontato come un problema di IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA. Indichiamo con ϑ il vettore dei parametri, mentre il relativo modello della famiglia si indica con $m(\vartheta)$. Indichiamo con Θ l'insieme dei valori ammissibili dei parametri. Quindi:

$$M = \{ m(\vartheta) \mid \vartheta \in \Theta \}$$

o più semplicemente:

$$M = \{ m(\vartheta) \}$$

Indichiamo con S il sistema su cui si fanno le osservazioni. S viene detto MECCANISMO DI GENERAZIONE DEI DATI. Ci sono due tipi di meccanismi di generazione dei dati:

1) Quelli dove sono date le rilevazioni su un arco temporale di una variabile, e si vuole costruire un modello che ne descriva l'evoluzione.

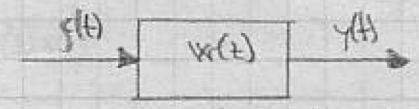
2) Quelli dove sono date le rilevazioni dell'ingresso e dell'uscita su un determinato arco temporale e si vuole costruire un modello dinamico che descriva l'azione della variabile di ingresso sulla variabile di uscita.

Quindi ci saranno due tipi distinti di modelli:

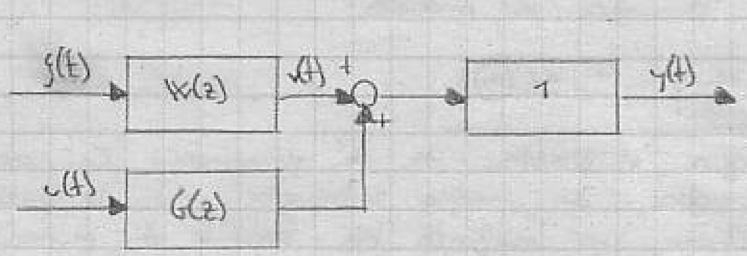
1) MODELLI CON RAPPRESENTAZIONE ESTERNA;

2) MODELLI CON RAPPRESENTAZIONE INTERNA;

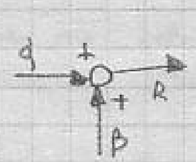
Prendiamo in considerazione il primo tipo di modello. Consideriamo la seguente situazione:



Questo schema rappresenta la situazione base. Se però interviene una variabile esogena (proveniente cioè dall'esterno) che chiamiamo per comodità $u(t)$, si ha:



NB:



$\alpha + \beta = R$

NODO SOMMATORE

Analiticamente si ha: $y(t) = W(z)\xi(t) + G(z)u(t)$. Analizziamo ora alcuni modelli:

1) MODELLO ARX così definito: $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{na} y(t-na) + b_1 u(t-1) +$
$+ b_2 u(t-2) + \dots + b_{nb} u(t-nb) + \xi(t)$

con $\xi(t) \sim WN(0, \lambda^2)$.

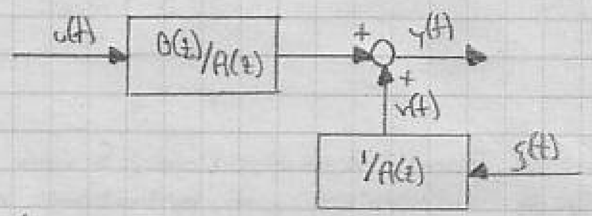
Usando l'operatore ritardo (z^{-1}) si ha:
$$\begin{cases} A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{na} z^{-na} \\ B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$A(z)\,y(t) = B(z)\,u(t-1) + \xi(t)$$

Si noti che:

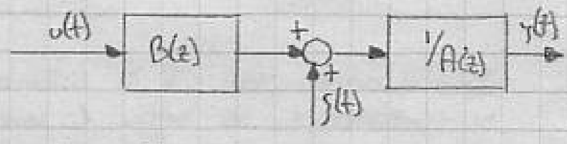
$\frac{B(z)}{A(z)}$ = funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.

Quindi $\frac{B(z)}{A(z)} = G(z)$. Inoltre: $1/A(z) = W(z)$

Graficamente si ha:



oppure:

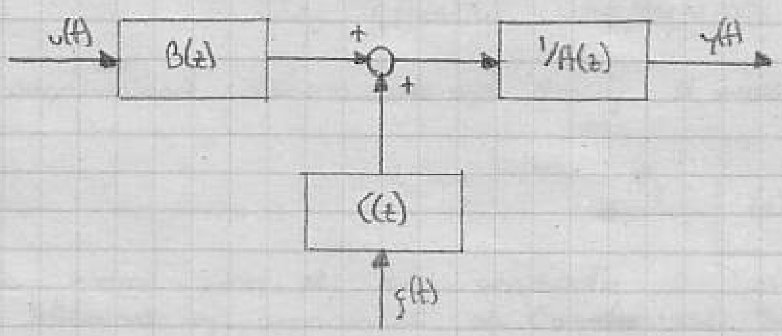


Ovviamente se la variabile esogena $u(t)$ è assente, si avrebbe:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_{na} y(t-na)$$ che è un modello AR.

2) MODELLO ARMAX:
$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{na} y(t-na) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{nb} u(t-nb) + \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + \dots + c_{nc} \xi(t-n_c)$$

Con la scrittura in forma compatta si ha: $A(z)y(t) = B(z)\,u(t-1) + C(z)\,\xi(t)$
In assenza della variabile esogena si ha il modello ARMA.
Graficamente si ha:



con: $\begin{cases} G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \\ W(z) = \frac{C(z)}{A(z)} \end{cases}$

Si consideri ora una generica famiglia di modelli:
$$M = \{ m(\theta) \mid \theta \in \Theta \}$$

Ogni modello della famiglia è fissato da dei parametri. Noi vogliamo identificare un modello nella sua famiglia, che meglio interpreta i dati. Il problema di fondo è essenzialmente quello di effettuare un confronto tra sequenze di numeri (dati) e sequenze di variabili (uscite). Per risolvere questo problema si usa l'approccio predittivo. Un modello è buono se l'errore di predizione è buono. Associamo al modello $m(\theta)$ il suo corrispondente predittore, $\hat{m}(\theta)$. Una volta a disposizione l'intera sequenza di $\varepsilon(t)$, si può valutare l'entità media dell'errore. Ciò viene fatto con la seguente CIFRA DI MERITO:
$$J = (1/N) \sum_{1}^{N}{}_{t}\, \varepsilon(t)^2$$

Il funzionale J dipenderà dal vettore ϑ dei parametri. Si ha quindi $J = J(\vartheta)$. Il modello ottimo nella famiglia sarà quello corrispondente al J minimo, al variare di ϑ in Θ. Si consideri il seguente modello:

$$m(\vartheta): \; y(t) = G(z)u(t-1) + W(z)\xi(t)$$

Ovviamente perché il modello descriva il legame ingresso-uscita del sistema dato, è necessario che $W(z)\xi(t)$ sia un segnale di entità limitata. Si può ottenere ciò ipotizzando che $v(t)$ sia un processo stazionario. Il predittore associato al modello è il seguente:

$$y(t) = [1 - (1/W(z))]\,y(t) + G(z)/W(z)\,u(t-1) + \xi(t)$$

In breve ho diviso i due membri per $W(z)$. Quindi: $\frac{y(t)}{W(z)} = \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t)$, dopo di che ho sommato e sottratto $y(t)$:

$$y(t) + \frac{y(t)}{W(z)} = \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t) + y(t) \Rightarrow y(t) = -\frac{y(t)}{W(z)} + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + y(t) + \xi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{W(z)}\right)y(t) + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Siccome: $1/W(z) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots$ ne consegue che il termine $(1 - 1/W(z))\,y(t)$ non dipenderà da $y(t)$ bensì da $y(t-1), y(t-2), \dots$. Analogamente il termine: $\frac{G(z)}{W(z)}u(t-1)$ non dipenderà altro che da $u(t-1), \dots, u(t-z)$. Quindi:

$$y(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{W(z)}\right)y(t) + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1)}_{\text{PARTE PREDICIBILE}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{PARTE IMPREDICIBILE}}$$

Ne consegue che il predittore ottimo del modello dato è il seguente:

$$\hat{y}(t) = \left(1 - \frac{1}{W(z)}\right)y(t) + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1)$$

, perché il rumore bianco $\xi(t)$ è completamente imprevedibile.

Utilizziamo il procedimento appena visto per trovare il predittore dei seguenti modelli:

1) MODELLO ARX: $m(\vartheta): \; A(z)y(t) = B(z)u(t-1) + \xi(t)$

Questo modello l'abbiamo già incontrato. Posto:

$$\begin{cases} G(z) = B(z)/A(z) \\ W(z) = 1/A(z) \end{cases} \Rightarrow \hat{m}(\vartheta): \; \hat{y}(t) = [1 - A(z)]\,y(t) + B(z)\,u(t-1)$$

Tale predittore è stabile indifferentemente dal fatto che $A(z)$ e $B(z)$ non lo siano. Questo avviene perché il predittore è una combinazione lineare dei valori passati dell'ingresso e dell'uscita ma non dipende da predizioni passate.

2) MODELLO ARMAX: $m(\vartheta): \; A(z)y(t) = B(z)u(t-1) + C(z)\xi(t)$

In questo modello si ha:

$$\begin{cases} G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \\ W(z) = C(z)/A(z) \end{cases} \Rightarrow \hat{m}(\vartheta): \; \hat{y}(t) = \left[1 - \frac{A(z)}{C(z)}\right]y(t) + \frac{B(z)}{A(z)}u(t-1)$$