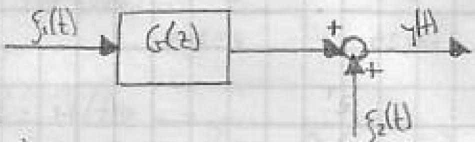
(REALIZZAZIONE D)

Per il quinto processo si ha: $G(z)=\dfrac{z^2}{z^2+0,4z-0,55}$ e confrontando lo spettro si nota una prevalenza delle componenti ad alta frequenza. (REALIZZAZIONE C)

Infine al primo processo viene associata la realizzazione E.

3) Si consideri il seguente schema a blocchi:



dove $G(z)=\dfrac{z}{z-1/4}$

e con $\xi_1 \sim WN(0,1)$.

Si calcolino il valore atteso e lo spettro del processo $y(\cdot)$ nei seguenti casi:

a) $\xi_2(\cdot)=0 \ \forall t$

b) $\xi_2(\cdot)\sim WN(0,1)$ indipendente da $\xi_1(\cdot)$

c) $\xi_2(t)=\xi_1(t), \ \forall t$.

3) a) Nel dominio del tempo $y(t)$ può essere così rappresentato:

$y(t)=\frac14 y(t-1)+\xi_1(t)+\xi_2(t)$. Infatti: $y(t)(z-\frac14)=z e(t) \Rightarrow z y(t)-\frac14 y(t)=z e(t)$

$\Downarrow$

$y(t)=\frac14 y(t-1)+\cancel{e(t)}\ \xi_1(t)$

Siccome $\xi_2(t)=0 \Rightarrow y(t)=\frac14 y(t-1)+\xi_1(t) \Rightarrow E[y(t)]=\frac14 E[y(t-1)]+0$

$\Downarrow$

$E[y(t)]=0$

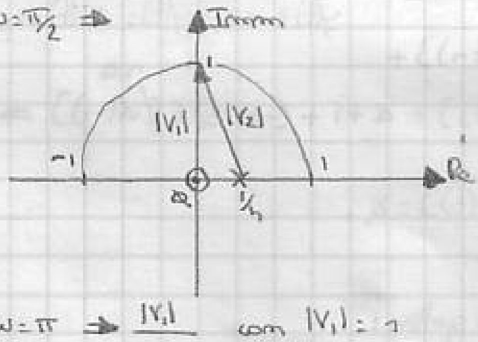
Calcoliamo lo spettro:

$$\Gamma(\omega)=\frac{|e^{j\omega}|^2}{|e^{j\omega}-\frac14|^2}\,Var[\xi_1(t)]$$

$\Downarrow$

• $\omega=0 \Rightarrow \dfrac{1}{3/4}=1,3$

• $\omega=\pi/2 \Rightarrow$



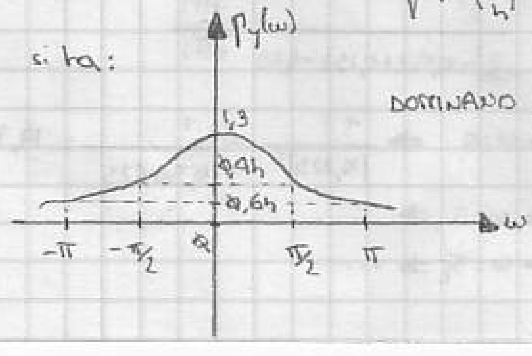
$\dfrac{|V_1|}{|V_2|}$ con $|V_1|=1$, $|V_2|=\sqrt{1^2+\frac14^2}=1,06$

$\Downarrow$

$\dfrac{|V_1|}{|V_2|}=\dfrac{1}{1,06}=0,94$.

• $\omega=\pi \Rightarrow \dfrac{|V_1|}{|V_2|}$ con $|V_1|=1$, $|V_2|=\sqrt{0^2+(\frac54)^2}=\frac{25}{16}=1,56 \Rightarrow \dfrac{|V_1|}{|V_2|}=\dfrac{1}{1,56}=0,64$

Graficamente si ha:

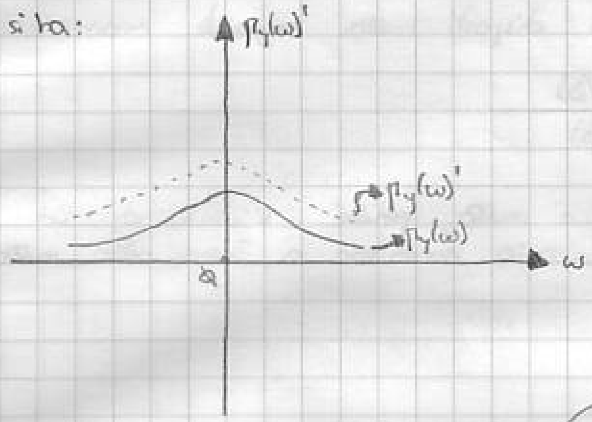


DOMINANO LE BASSE FREQUENZE.

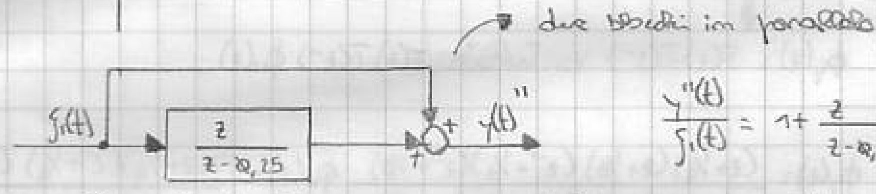
b) $E[y(t)'] = E[y(t)] + E[\xi_2(t)] = 0$, in quanto $E[y(t)] = 0$.
Dato che $\xi_1(\cdot)$ ed $\xi_2(\cdot)$ sono incorrelati, si ha:

$$\Gamma_y(\omega)' = \Gamma_y(\omega) + \Gamma_{\xi_2}(\omega) = \Gamma_y(\omega) + \overbrace{Var[\xi_2(t)]}^{1} = \Gamma_y(\omega) + 1$$

Graficamente si ha:



c) $\xi_2(\cdot) = \xi_1(\cdot)$, $\forall t$ $\Rightarrow$



$$\frac{y''(t)}{\xi_1(t)} = 1 + \frac{z}{z-0,25}$$

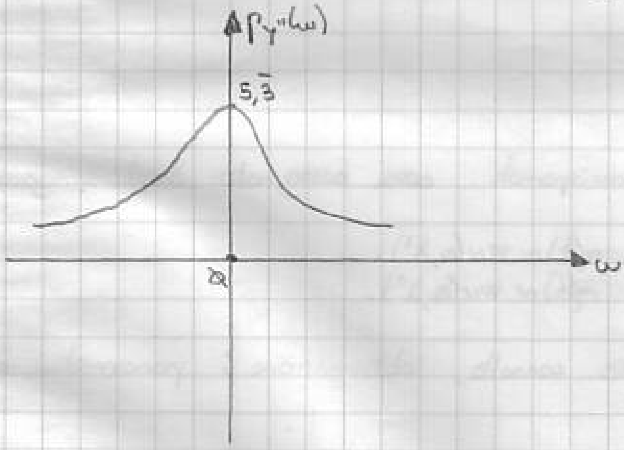
Si noti che sulla linea "senza" blocchi è come se ci fosse in realtà un blocco con funzione di trasferimento pari a 1. Quindi:

$$y(t)'' = 0,25\, y''(t-1) + 2\xi_1(t) - 0,25\, \xi_1(t-1)$$

Tale processo è un processo ARMA (1,1) stabile e si ha inoltre: $E[y(t)''] = 0$
Lo spettro è:

$$\Gamma_{y''}(\omega) = \frac{\left|2e^{j\omega} - \frac{1}{4}\right|^2}{\left|e^{j\omega} - \frac{1}{4}\right|^2} \Rightarrow$$

- $\omega = 0 \Rightarrow \frac{3}{0,5625} = 5,\bar{3}$
- $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dots$
- $\omega = \pi \Rightarrow \dots$



d) Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto asintoticamente stabile, con due poli e due zeri:

i) si dica come devono essere disposti nel piano complesso poli e zeri affinché il sistema sia un filtro passa-alto;

2) Si alimenti il filtro passa tutto con un processo stazionario $u(\cdot)$ a valor atteso nullo, $E[u(t)]=0$, e spettro $\Gamma_u(\omega)$ e si consideri il processo stazionario $y(\cdot)$ di uscita. Si dica quanto vale il valore atteso e lo spettro di $y(\cdot)$.

4) 1) I poli e gli zeri devono essere disposti nella seguente maniera:

$$T(z)=\frac{(z+1/\alpha)(z+1/\beta)}{(z+\alpha)(z+\beta)}$$

2) Il valore atteso del processo $y(\cdot)$ è nullo, perché è l'uscita di un sistema stabile alimentato da un processo stazionario anch'esso a valore atteso nullo. Inoltre:

$$\underline{\Gamma_u(\omega)=Var[u(t)]}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_y(z)=T(z)T(z^{-1})\,Var[u(t)]=T(z)T(z^{-1})\,\phi_u(z)$$

Quindi:

$$\phi_y(z)=\frac{(z+1/\alpha)(z+1/\beta)(z^{-1}+1/\alpha)(z^{-1}+1/\beta)}{(z+\alpha)(z+\beta)(z^{-1}+\alpha)(z^{-1}+\beta)}\phi_u(z)=\frac{(z+1/\alpha)(z^{-1}+1/\alpha)(z+1/\beta)(z^{-1}+1/\beta)}{(z+\alpha)(z^{-1}+\alpha)(z+\beta)(z^{-1}+\beta)}\phi_u(z)=$$

$$=\frac{1+1/\alpha^2+1/\alpha(z+z^{-1})1+1/\beta^2+1/\beta(z+z^{-1})}{1+\alpha^2+\alpha(z+z^{-1})+\beta^2+\beta(z+z^{-1})}\phi_u(z)=\alpha^2\beta^2\phi_u(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\Gamma_y(\omega)=\alpha^2\beta^2\Gamma_u(\omega)}$$

5) È dato un processo stocastico stazionario $v(t)$ con la seguente funzione di covarianza $\gamma(\tau)$:

$\gamma(0)=2{,}5$
$\gamma(-1)=\gamma(1)=1$
$\gamma(\tau)=0 \quad, \forall|\tau|>1.$

1) Dire quale fra i seguenti modelli corrisponde alla assegnata $\gamma(\tau)$ spiegando il perché:

$AR(1):\ v(t)=\alpha v(t-1)+\eta(t) \quad$ con $\eta(t)\sim WN(0,\lambda^2)$.
$MA(1):\ v(t)=\eta(t)+\alpha\eta(t-1) \quad$ con $\eta(t)\sim WN(0,\lambda^2)$.

2) Dopo aver individuato il modello corretto, determinare i parametri α e λ^2.

5) 1) Il modello corretto è il modello AR(1), perché è l'unico in cui $\gamma(\tau)=0, \forall|\tau|>1$.

2) Calcoliamoci la varianza: $Var[v(t)]=\gamma(0)=E[v(t)^2]=E[(\eta(t)+\alpha\eta(t-1))^2]=$

$$=E[\eta(t)^2]+\alpha^2E[\eta(t-1)^2]+2\alpha E[\eta(t)\eta(t-1)]=$$

$$=\lambda^2+\alpha^2\lambda^2=\lambda^2(1+\alpha^2)$$

Calcoliamoci $\gamma(1)$:

$$\gamma(1) = E[v(t)v(t-1)] = E[(\eta(t) + d\eta(t-1))(\eta(t-1) + d\eta(t-2))] =$$
$$= d\,E[\eta(t-1)^2] = d\lambda^2.$$

Siccome per ipotesi, $\gamma(0) = 2,5$ e $\gamma(1) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases}(1+d^2)\lambda^2 = 2,5 \\ d\lambda^2 = 1\end{cases} \Rightarrow$ Sol: $\begin{cases}\lambda^2 = 0,5 \\ d = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda^2 = 2 \\ d = 0,5\end{cases}$

* LA STIMA:

Uno stimatore è una funzione $f(\cdot)$ generica che associa ai dati un valore del parametro da stimare. Quindi formalmente si scrive:

$\underline{\vartheta(t) = f(d)}$, con ϑ che è il parametro da stimare, e d è il dato.

Quindi noi partiremo sempre con i dati d $(v(t), v(t-1), \ldots)$ e l'incognita ϑ che rappresenta ciò che vogliamo stimare. La stima più semplice che considereremo sarà la stima lineare, cioè una stima del seguente tipo:

$\underline{\vartheta(t) = f(d)}$, con f che è una funzione lineare.

Per stima si intende il valore assunto dallo stimatore in corrispondenza a particolari dati osservati. Noi considereremo solo i problemi di stima associati a modelli dinamici. Considereremo per ipotesi che il tempo sia discreto. Il problema della stima su modelli dinamici, può essere:

1) IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA, che si ha quando $\vartheta(t)$ è costante nel tempo;

2) NORMALE STIMA, quando $\vartheta(t)$ varia nel tempo, e quindi lo stimatore viene indicato con $\hat{\vartheta}(t|N)$, dove N indica l'insieme degli istanti di osservazione.

Quando $\underline{t > t_N}$, allora si parla di predizione. Più precisamente si desidera stimare $\vartheta(t)$, in un istante successivo all'ultima osservazione. Quando $\underline{t = t_N}$ si ha il problema del filtraggio, mentre se $t < t_N$, e più precisamente:

$\underline{t_1 < t < t_N}$ $\Rightarrow$ problema di regolarizzazione.

Per poter comprendere meglio la stima dobbiamo introdurre il primo caso cioè dobbiamo introdurre il problema della predizione. Prendiamo in esame una serie temporale. Consideriamo una sequenza di osservazioni $y(1), y(2), \ldots$ di una data variabile $y(\cdot)$. Vogliamo valutare $y(t+1)$, con t che è l'ultimo istante di osservazione della variabile y. Vogliamo quindi determinare un buon predittore $\hat{y}(t+1|t)$ tale che:

$$\underline{\hat{y}(t+1|t) = f(y(t), y(t-1), \ldots\ldots, y(1))}$$

Ovviamente il predittore si dice lineare quando è funzione lineare dei dati, e cioè:

$$\underline{\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + \ldots\ldots + a_t(t)y(1)}$$

Si noti però che a volte i dati lontani non rivestono una grande importanza nel determinare $y(t+1)$. Quindi consideriamo solo gli ultimi m dati ottenendo un PREDITTORE A MEMORIA FINITA.

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) + \dots + a_m(t)y(t-m+1)$$

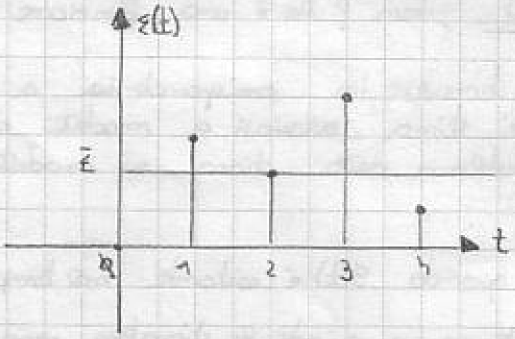
Se i coefficienti $a_i(t)$ sono costanti nel tempo si ha:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1 y(t) + a_2 y(t-1) + \dots + a_m y(t-m+1)$$

Quindi in generale un buon predittore è individuato dal vettore di parametri $\vartheta = [a_1\ a_2 \dots a_m]^T$
Quindi un problema di predizione è stato ricondotto ad un problema di identificazione.
Possiamo valutare l'accuratezza della nostra predizione usando il concetto di ERRORE DI PREDIZIONE definito come:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$$

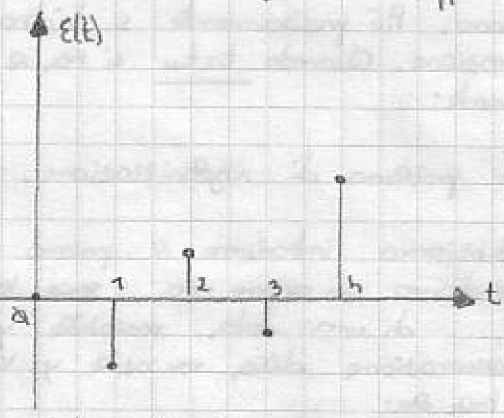
Perciò dobbiamo trovare il vettore ϑ in modo che $\varepsilon(t)$ sia il più piccolo possibile. Quindi possiamo tranquillamente affermare che la bontà di un modello dipende dall'errore di predizione. Consideriamo ora il seguente andamento di $\varepsilon(t)$:



dove $\bar{\varepsilon}$ è l'errore sistematico che costringe il predittore a fornire un valore sempre maggiore di quello reale.
Si può anche valutare l'entità media dell'errore di predizione utilizzando la CIFRA DI MERITO:

$$J(\vartheta) = \sum_{m=1}^{t} \varepsilon(t)^2$$

Il miglior predittore è quindi quello con J minimo. Ma noi non ci accontentiamo di avere $\varepsilon(t)$ mediamente nullo. Infatti se supponiamo di avere la seguente situazione:



* Come si può facilmente notare $\varepsilon(\cdot)$ cambia di segno ad ogni passo, e quindi si può prevedere che se per $t=3$ è negativo, per $t=4$ lo stesso sarà positivo.

Quindi si può concludere dicendo che un predittore è buono nella misura in cui l'errore commesso non contiene elementi regolari, cioè è completamente aleatorio. Il segnale del tutto casuale per eccellenza è il rumore bianco. Riprendiamo ora in mano le precedenti equazioni:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1 y(t) + a_2 y(t-1) + \dots + a_m y(t-m), \quad \varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t+1|t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_m y(t-m) + \varepsilon(t)$$

Usando l'operatore z ottengo:

$$z^{-1}y(t)=y(t-1)$$
$$z^{-2}y(t)=y(t-2)$$
$$\vdots$$
$$z^{-m}y(t)=y(t-m)$$

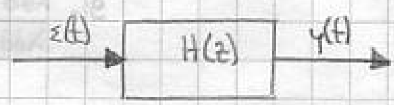
$$\Longrightarrow\quad y(t)=(a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots+a_mz^{-m})\,y(t)+\varepsilon(t)$$

Raccogliendo si ha:

$$(1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}-\dots-a_mz^{-m})\,y(t)=\varepsilon(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=\frac{1}{1-a_1z^{-1}-\dots-a_mz^{-m}}\,\varepsilon(t)$$



Si nota quindi che $H(z)=\frac{y(t)}{\varepsilon(t)}=\frac{z^m}{z^m-a_1z^{m-1}-\dots-a_m}$. $H(z)$ è in questo caso la funzione di trasferimento del sistema disegnato. Ma come abbiamo detto, perché un modello sia un buon modello bisogna che abbia come ingresso un rumore bianco. Quindi il sistema diventa un sistema lineare a tempo invariante alimentato dal rumore bianco. Sistemi alimentati da ingressi di questo tipo vengono detti SISTEMI STOCASTICI. Quindi il problema originario di predizione si ha portato allo studio di un sistema stocastico. Torniamo adesso al problema della stima. Indicheremo con $\hat g$ un generico stimatore. Chiameremo STIMATORE IDEALE il seguente stimatore:

$$\hat g=\alpha d+\beta$$

Ma quale valore dobbiamo attribuire ad α e β per avere un ottimo stimatore? Siano rispettivamente:

λ_{gg} = varianza di g
λ_{dd} = varianza di d , con g e d variabili casuali con valor medio nullo.

Inoltre:

$$\lambda_{gd}=E[gd]\ ,\ \lambda_{gg}=E[g^2]\ ,\ \lambda_{dd}=E[d^2]\ ,\ E[d]=E[g]=0$$

Vogliamo stimare g a partire dai dati d mediante uno stimatore lineare. Noi vogliamo α, e β in modo che l'ERRORE QUADRATICO DI STIMA J sia minimo, e cioè:

$$\operatorname{Min} J=E[(g-\hat g)^2]=E[(g-\alpha d-\beta)^2]$$

Per fare ciò basta porre a zero le derivate di J rispetto ad α e a β. Quindi:

- $\frac{\partial J}{\partial\alpha}=2E[(g-\alpha d-\beta)(-d)]=-2\lambda_{gd}+2\alpha\lambda_{dd}-2\beta E[d]=2(-\lambda_{gd}+\alpha\lambda_{dd})$

- $\frac{dJ}{\partial\beta}=2E[(g-\alpha d-\beta)(-1)]=2(E[g]-\alpha E[d]-\beta)=-2\beta$

Gli α e β ottimi sono: $\begin{cases}\alpha=\frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}}\\ \beta=0\end{cases}$. Quindi si ottiene $\hat g=\frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}}d$ → STIMATORE OTTIMO oppure STIMATORE DI BAYES.

Vogliamo ora trovare la VARIANZA dell'errore di stima; quindi abbiamo:

$$E[(g-\hat g)^2]=E\left[\left(g-\frac{\lambda_{gd}\cdot d}{\lambda_{dd}}\right)^2\right]=E[g^2]+\frac{\lambda^2_{gd}}{\lambda_{dd}^2}E[d^2]-2\frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}}E[gd]=$$

$$= \lambda_{gg} + \frac{\lambda_{gd}^2}{\lambda_{dd}^{\cancel{2}}} \cancel{\lambda_{dd}} - 2\frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}}\lambda_{gd} = \lambda_{gg} - \frac{\lambda_{gd}^2}{\lambda_{dd}}$$

Si noti che in assenza di osservazioni si ha che la varianza della stima banale ($\hat{g} = 0$) è:

$$Var = \lambda_{gg}$$

Si ha in breve la così detta STIMA A PRIORI, cioè quella stima priva di ogni misura. In questo caso le uniche informazioni disponibili sull'incognita sono il suo valore atteso e la sua varianza. Nella STIMA A POSTERIORI, invece si ha:

$$\hat{g} = \frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}} d$$, e se λ_{dd} è molto alto, allora si ha un dato incerto e quindi $\hat{g} \to 0$.

Quindi in questa stima sono presenti anche le osservazioni. Notiamo inoltre che:

$$E[(g-\hat{g})^2] = \lambda_{gg}\left(1 - \frac{\lambda_{gd}^2}{\lambda_{dd}\lambda_{gg}}\right) \leq \lambda_{gg}$$

In breve $\frac{\lambda_{gd}^2}{\lambda_{gg}\lambda_{dd}}$ è il coefficiente di correlazione ρ. Tale coefficiente indica quanto è informativo il dato rispetto all'incognita. Infatti:

$$\begin{cases} \rho = 0 \Rightarrow E[(g-\hat{g})^2] = \lambda_{gg} \\ \rho = \pm 1 \Rightarrow E[(g-\hat{g})^2] = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che d, g siano sempre scalari, ma che abbiano valore atteso non nullo. Per ipotesi quindi si ha:

$$E[g] = g_m \quad , \quad E[d] = d_m$$

Lo stimatore diventa è:

$$\hat{g} = g_m + \frac{\lambda_{gd}}{\lambda_{dd}}(d - d_m) \qquad \text{STIMATORE OTTIMO.}$$

e la varianza è: $Var[(g-\hat{g})] = \lambda_{gg} - \frac{\lambda_{gd}^2}{\lambda_{dd}}$. Se invece g e d sono vettoriali, con un generico valore atteso $E[d] = d_m$, $E[g] = g_m$, si ha la seguente matrice varianza:

$$Var\begin{bmatrix} d \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{dg} \\ \Lambda_{gd} & \Lambda_{gg} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{gd} = \Lambda_{dg}$$

* Si noti che Λ_{dd} è una matrice quadrata delle stesse dimensioni del vettore d, Λ_{gg} è una matrice quadrata delle stesse dimensioni del vettore g.

Inoltre si ha:

$$\hat{g} = g_m + \Lambda_{gd}\Lambda_{dd}^{-1}(d - d_m)$$
$$Var[g - \hat{g}] = \Lambda_{gg} - \Lambda_{gd}\Lambda_{dd}^{-1}\Lambda_{dg}$$

La stima di Bayes ammette un'interpretazione geometrica che è molto utile. Questa richiede la definizione di SPAZIO VETTORIALE. Quest'ultimo lo indichiamo, per comodità con la lettera G. Prendiamo in esame quelle variabili casuali dove:

$$\begin{cases} E[v] = 0 \\ Var[v] = \lambda^2 \end{cases}$$

Su tale insieme di variabili aleatorie definiamo le operazioni di somma e prodotto.