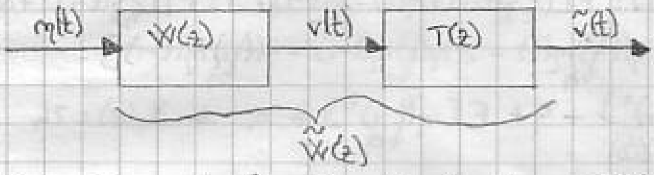
3) È possibile alterare zeri e poli di $W(z)$ senza alterare $\phi(z)$. Per fare ciò si usa un FILTRO PASSATUTTO. Se consideriamo una situazione del seguente tipo:



* Si noti che siccome i due blocchi sono in cascata, allora si ha: $\underline{\tilde{W}(z) = W(z)T(z)}$

Supponiamo inoltre che la funzione $T(z)$ sia tale che: $T(z) = \dfrac{p(z+q)}{(z+1/q)}$. Questo sistema ha una funzione di trasferimento con uno zero che è il reciproco di un polo. Si può facilmente notare che:

$$\underline{T(z)T(z^{-1}) = p^2 q^2}.$$

Infatti:

$$T(z)T(z^{-1}) = \frac{p(z+q)}{(z+1/q)} \cdot \frac{p(z^{-1}+q)}{(z^{-1}+1/q)} =$$

$$= \frac{p(z+q)}{(z+1/q)} \cdot \frac{p(1/z+q)}{(1/z+1/q)} = p^2 \frac{z+q}{\frac{zq+1}{q}} \cdot \frac{\frac{1+qz}{z}}{\frac{q+z}{zq}} = p^2 \frac{\cancel{z+q}}{\frac{zq+1}{q}} \cdot \frac{q(1+qz)}{\cancel{q+z}}$$

$$= p^2 \frac{q}{\cancel{zq+1}} \cdot q(\cancel{1+qz}) = \underline{p^2 q^2}.$$

Se si sceglie:

$p^2 = 1/q^2 \Rightarrow T(z)T(z^{-1}) = \frac{1}{\cancel{q^2}} \cancel{q^2} = 1$. Quindi l'uscita del sistema con funzione di trasferimento $T(z)$ ha lo spettro identico all'ingresso.

Per questo motivo viene chiamato FILTRO PASSATUTTO. Quindi se siamo nella precedente situazione, lo spettro del processo $\tilde{v}(t)$ viene a coincidere con lo spettro di $v(t)$. Facciamo un esempio:

→ per processi MA(1).

$W(z) = 1 + 0{,}5\, z^{-1}$
$\tilde{W}(z) = p(1 + 2z^{-1})$ e i corrispondenti spettri sono:

$$\phi(z) = (1+0{,}5z^{-1})(1+0{,}5z) = 1{,}25 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}5z$$

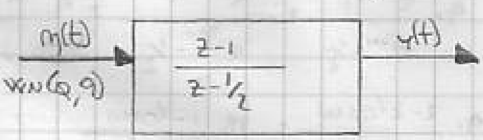
$$\tilde{\phi}(z) = p^2(1+2z^{-1})(1+2z) = p^2(5+2z+2z^{-1})$$

Come si può notare basta porre $p = 1/2$ per avere la coincidenza degli spettri. Questo non deve sorprendere in quanto $W(z)$ e $\tilde{W}(z)$ hanno zeri tra loro reciproci. Quindi:

$$\underline{T(z) = p\,\frac{(1+2z^{-1})}{(1+0{,}5z^{-1})}}$$

Prima di vedere effettivamente come si calcola lo spettro in un determinato esercizio, vediamo cosa si intende per numeratore e denominatore coprimi e monici. Ne abbiamo già parlato nel teorema della fattorizzazione spettrale.

Due polinomi si dicono MONICI quando entrambi i coefficienti della potenza più elevata sono pari a 1. Il numeratore e il denominatore sono coprimi quando non hanno cancellazioni in comune. A questo punto vediamo un esempio del calcolo dello spettro di un determinato processo. Prendiamo in considerazione per esempio:



con $y(t) = \frac{1}{2}y(t-1) + \eta(t) - \eta(t-1)$

* Vogliamo calcolare $\Gamma_y(\omega)$.

Proviamo a usare la definizione:

$P_y(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_y(j) e^{-j\omega j} = \dots$. Dobbiamo però prima calcolare i vari $\gamma(j)$ di $y(t)$. Perciò:

$$\gamma(0) = Var[y(t)] = E[(\tfrac{1}{2} y(t-1) + \eta(t) - \eta(t-1))^2] = E[(\tfrac{1}{4} y(t-1)^2 + \eta(t)^2 +$$

$$+ \eta(t-1)^2 + \underbrace{y(t-1)\eta(t)}_{0} - 2\underbrace{\eta(t)\eta(t-1)}_{0} - \underbrace{y(t-1)\eta(t-1)}_{0}] =$$

NB: $E[y(t)] = 0$

$$= E[\tfrac{1}{4} \underbrace{y(t-1)^2}_{\gamma(0)}] + 9 + E[\underbrace{\eta(t-1)^2}_{9}] + 0 \Rightarrow \gamma_y(0) = 24$$

$$\gamma_y(1) = E[y(t)y(t-1)] = E[(\tfrac{1}{2} y(t-1) + \eta(t) - \eta(t-1)) \cdot (\tfrac{1}{2} y(t-2) + \eta(t-1) - \eta(t-2))] =$$

$$= E[(\tfrac{1}{4} y(t-1)y(t-2) + \tfrac{1}{2}\underbrace{y(t-1)\eta(t-1)}_{0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{y(t-1)\eta(t-2)}_{0} + \underbrace{\eta(t)\tfrac{1}{2}y(t-2)}_{0} + \underbrace{\eta(t)\eta(t-1)}_{0} -$$

$$- \underbrace{\eta(t)\eta(t-2)}_{0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{y(t-2)\eta(t-1)}_{0} - \underbrace{\eta(t-1)\eta(t-1)}_{\eta(t-1)^2} + \underbrace{\eta(t-1)\eta(t-2)}_{0})] =$$

$$= -9 = E[\eta(t-1)^2] = Var[\eta(t)].$$

Si possono calcolare infinite $\gamma_y(j)$, per ogni j. Per semplicità ci fermiamo qui. Si può ottenere una regola generale:

$$\gamma_y(j) = \frac{\gamma_y(j-1)}{2} - 3$$

Usando la definizione di spettro si ha:

$$P_y(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_y(j) e^{-j\omega j} = 24 - 9e^{j\omega} - 9e^{-j\omega} - \dots$$

Se supponiamo di avere un processo con $\gamma_y(0) = 12$, $\gamma_y(1) = -3$, $\gamma_y(2) = -3/2$, $\gamma_y(3) = -3/4$ possiamo scrivere:

$$P_y(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_y(j) e^{-j\omega j} = 12 - 3e^{-j\omega} - 3e^{+j\omega} - \tfrac{3}{2} e^{-j\omega 2} - \tfrac{3}{2} e^{+2j\omega} + \dots =$$

$$= 12 - 6(\tfrac{1}{2} e^{-j\omega} + \tfrac{1}{4} e^{-j\omega 2} + \tfrac{1}{8} e^{-j\omega 3} \dots + 1 - 1 \dots \tfrac{1}{2} e^{j\omega} + \tfrac{1}{4} e^{j\omega 2} + \tfrac{1}{8} e^{j\omega 3} + \dots + 1 - 1) = 12 - 6(-1-1) - 6\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} e^{-j\omega})^k +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} e^{j\omega})^k\right) = 24 - 6\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}\right) =$$

$$= 24 - 6 \frac{2 - \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})} = 24 - 6 \frac{2 - \cos\omega}{5/4 - \cos\omega}$$

$$= \frac{30 - 24\cos\omega - 12 + 6}{5/4 - \cos\omega} = \frac{18(1 - \cos\omega)}{5/4 - \cos\omega} = P_y(\omega)$$

Il procedimento risulta essere però assai oneroso. Possiamo usare la formula:

$$P_y(\omega) = |W(z)|^2 \cdot \lambda_{\eta(t)}$$ visto che $y(t)$ è un processo ARMA.

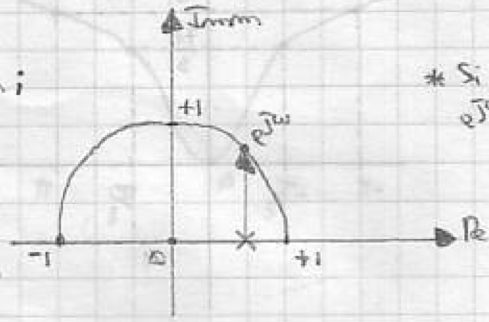
Scriviamo:

$$P_y(\omega) = \left|\frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}\right|^2_{z=e^{j\omega}} \cdot \underbrace{P_\eta(\omega)}_{Var[\eta(t)] = \lambda_{\eta(t)}} = 9 \cdot \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-j\omega} - 1}{e^{-j\omega} - \frac{1}{2}} = 9 \cdot \frac{1 + 1 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})} =$$

$$= 9 \cdot \frac{2 - 2\cos\omega}{5/4 - \cos\omega} = 18 \frac{1 - \cos\omega}{5/4 - \cos\omega}$$

Se si desidera invece tracciare lo spettro, si può procedere nel seguente modo:

$P_y(\omega) = \left|\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}\right| \cdot 9 = \frac{|e^{j\omega}-1|}{|e^{j\omega}-\frac{1}{2}|} \cdot 9$. Disegniamo il seguente piano complesso:



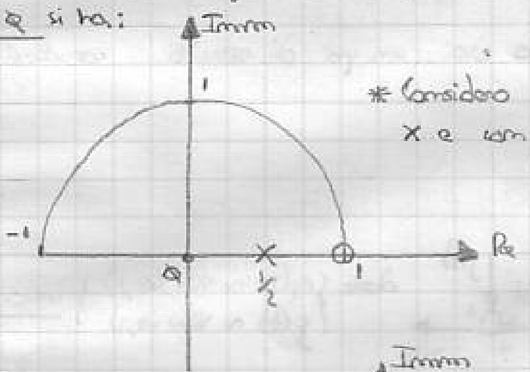
* Si noti che $e^{j\omega}-1$ ed $e^{j\omega}-\frac{1}{2}$ sono dei vettori

Proviamo a ragionare in questa maniera;
Fisso:

- $\omega = 0$
- $\omega = \pi/2$
- $\omega = \pi$

cioè considero le pulsazioni fondamentali.

Per $\underline{\omega = 0}$ si ha:

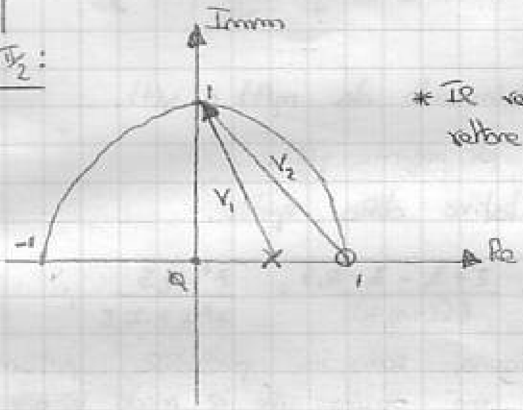


* Considero i poli e gli zeri che rappresento rispettivamente con un X e con un O. Quindi: $\begin{cases} O = \text{zero} \\ X = \text{polo} \end{cases}$

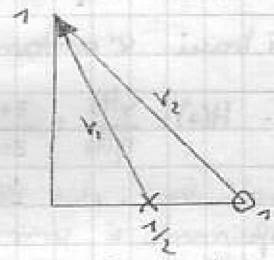
$\left|\frac{e^{j0}-1}{e^{j0}-\frac{1}{2}}\right|^2 \Rightarrow |e^{j0}-1|^2 = 0$

$|e^{j0}-\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow P_y(0) = \frac{0}{1/4} \cdot 9 = 0$

Vediamo per $\underline{\omega = \frac{\pi}{2}}$:

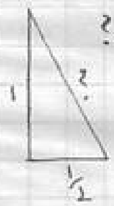


* Il vettore V_1 è il vettore del polo, mentre il vettore V_2 è il vettore dello zero. Quindi:



Siccome voglio trovare la lunghezza di V_1 e V_2 uso il teorema di Pitagora:

V_1:



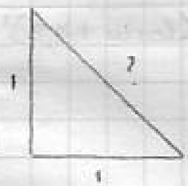
$? = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Siccome bisogna poi fare il quadrato del modulo di V_1, in quanto:

$V_1 = |e^{j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}|$

$\Downarrow$

$? = 5/4$

V_2:

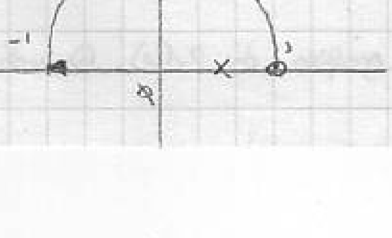


$? = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow ? = 2$ per gli stessi motivi di V_1.

*Quindi:

$P_y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{5/4} \cdot 9 = \frac{72}{5}$

Infine vediamo il caso di $\underline{\omega = \pi}$:



$|V_1| = \sqrt{\frac{3}{2}^2 + 0} = (\frac{3}{2})^2$

$|V_2| = \sqrt{2^2 + 0} = 2^2$

$\Downarrow$

$P_y(\pi) = 9 \cdot \frac{4}{9/4} = 16$

Quindi graficamente si ha:

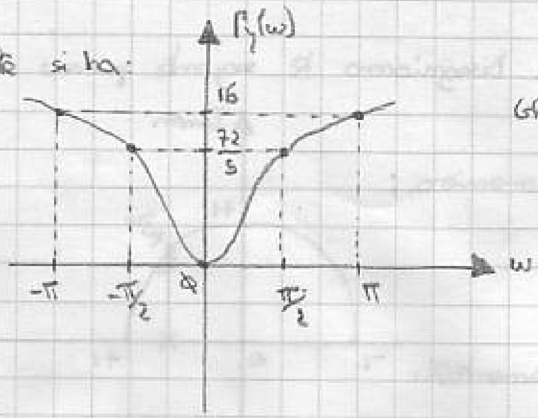
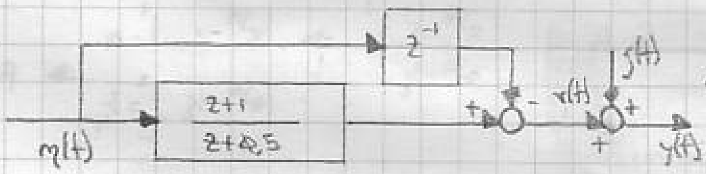


GRAFICO DELLO SPETTRO DEL PROCESSO $y(t)$.

Si noti che terminiamo le cose seguente. Vediamo ora un po' di esercizi conclusivi di questa prima parte del corso:

1) Si consideri il seguente schema a blocchi:



dove $\begin{cases} \eta(t) \sim WN(0,1) \\ \xi(t) \sim WN(0,1) \end{cases}$ incorrelati.

- Calcolare la funzione di trasferimento da $\eta(t)$ a $y(t)$.
- Si calcoli lo spettro del processo di regime $y(t)$.
- Si tracci l'andamento qualitativo dello spettro.

1) • Sia: $H(z) = \frac{y(t)}{\eta(t)} = \frac{z+1}{z+0,5} - \frac{1}{z} = \frac{z^2 + \cancel{z} - \cancel{z} - 0,5}{z(z+0,5)} = \frac{z^2 - 0,5}{z^2 + z \cdot 0,5}$;

Si noti che i due blocchi di figura sono in parallelo pertanto le loro funzioni di trasferimento si sommano. Si noti però anche che il nodo finale è un nodo sottrattore e quindi in realtà si esegue una sottrazione.

- Si noti che $\eta(t)$ è incorrelato da $\xi(t)$. Quindi $y(t)$ ha uno spettro che è dato dalla somma dello spettro di $v(t)$ e dello spettro $\xi(t)$. Perciò:

$$\Gamma_\xi(\omega) = Var[\xi(t)] = 1$$

$$\Gamma_v(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \cdot Var[\eta(t)] = \left| \frac{e^{2j\omega} - 0,5}{e^{2j\omega} + 0,5 e^{j\omega}} \right|^2 \cdot 1 =$$

$$= \left| \frac{e^{2j\omega} - 0,5}{e^{j\omega}(e^{j\omega} + 0,5)} \right|^2 = \frac{\left| e^{2j\omega} - 0,5 \right|^2}{\left| e^{j\omega}(e^{j\omega} + 0,5) \right|^2} = \frac{(\cos(2\omega) - 0,5)^2 + \sin^2(2\omega)}{(\cos\omega + 0,5)^2 + \sin^2\omega} =$$

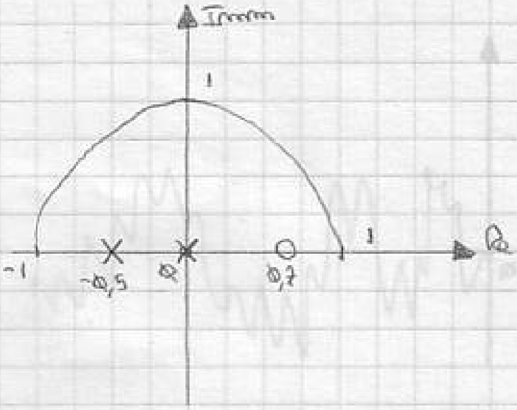
$$= \frac{1,25 - \cos(2\omega)}{1,25 + \cos\omega}$$

Alla fine si ottiene:

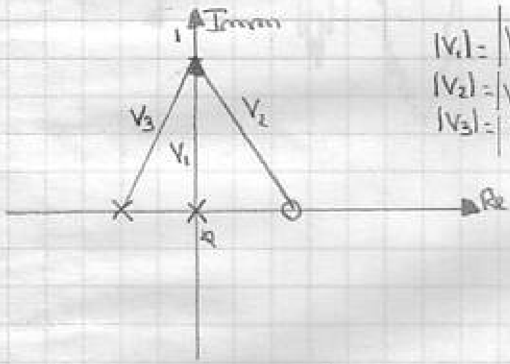
$$\Gamma_y(\omega) = \Gamma_\xi(\omega) + \Gamma_v(\omega) = 1 + \frac{1,25 - \cos(2\omega)}{1,25 + \cos\omega} = \frac{2,5 + \cos\omega - \cos(2\omega)}{1,25 + \cos\omega}$$

- Disegniamo prima il grafico di $\Gamma_v(\omega)$. Quindi si considera: $\frac{\left| e^{2j\omega} - 0,5 \right|^2}{\left| e^{j\omega} \right|^2 \left| e^{j\omega} + 0,5 \right|^2}$

• Per $\omega = 0 \Rightarrow \dfrac{|e^{0} - 0,5|^2}{|1|^2 \cdot |e^{0} + 0,5|^2} = \dfrac{1/4}{2,25} = 0,1$



• Per $\omega = \pi/2$ si analizzano i moduli sul grafico dei relativi vettori.



$|V_1| = \left|\sqrt{0^2 + 1^2}\right| = 1$

$|V_2| = \left|\sqrt{0,7^2 + 1^2}\right| = 1,49$

$|V_3| = \left|\sqrt{0,5^2 + 1^2}\right| = 1,25$

$\Downarrow$

Quindi: $\dfrac{|V_2|}{|V_1||V_3|} = \dfrac{1,49}{1 \cdot 1,25} = \dfrac{1,49}{1,25} = 1,2$

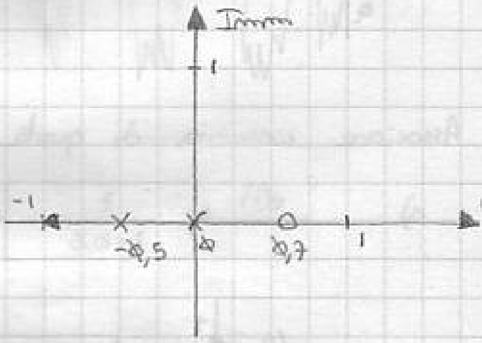
• Per $\omega = \pi$ si fa lo stesso lavoro:

$|V_2| = \left|\sqrt{0^2 + 1,7^2}\right| = 2,89$

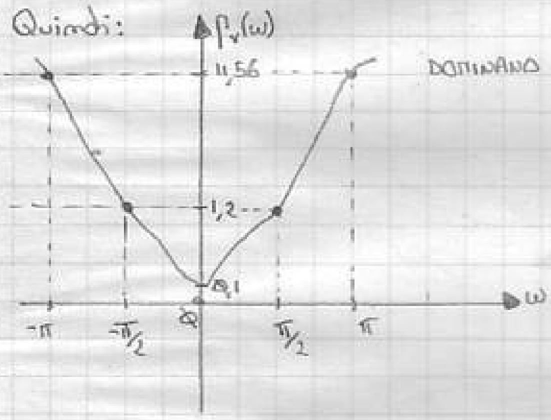
$|V_1| = \left|\sqrt{0^2 + 1^2}\right| = 1$

$|V_3| = \left|\sqrt{0^2 + 0,5^2}\right| = 1/4$

$\dfrac{|V_2|}{|V_1||V_3|} = \dfrac{2,89}{1/4} = 11,56$



Quindi:

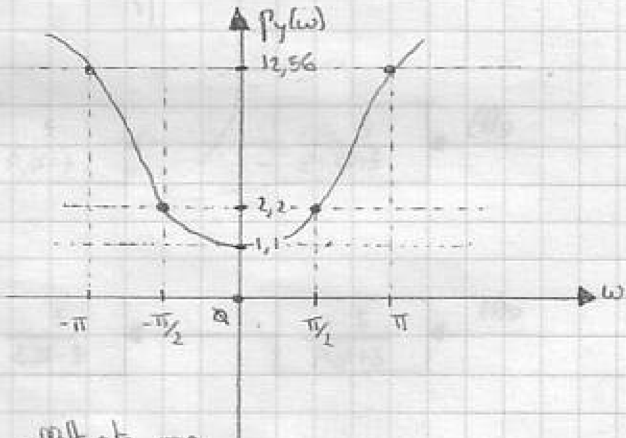


DOMINANO LE ALTE FREQUENZE

* Per ottenere lo spettro di y si ha:

$\Phi_y(\omega) = 1 + \Phi_v(\omega)$

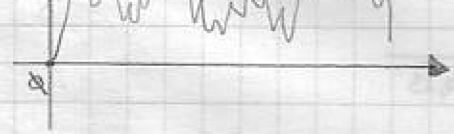
$\Downarrow$



* Ho quindi effettuato una semplice traslazione verso l'alto di un'unità.

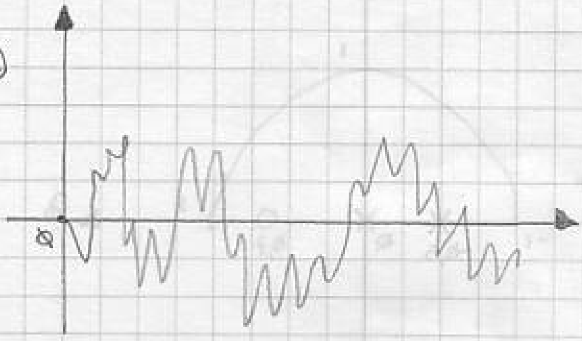
2) Si considerino le seguenti realizzazioni:

b)

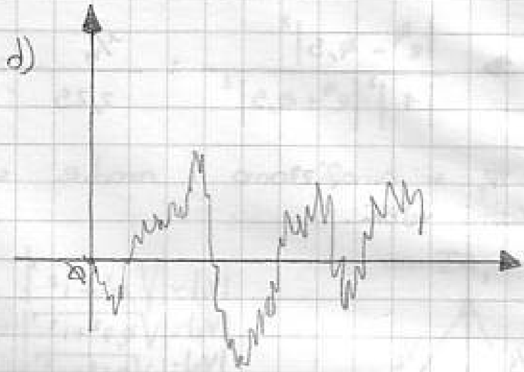


a)

c)



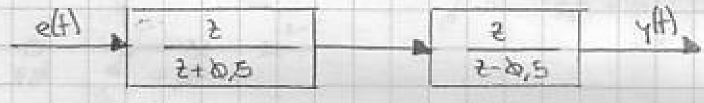
d)



e)

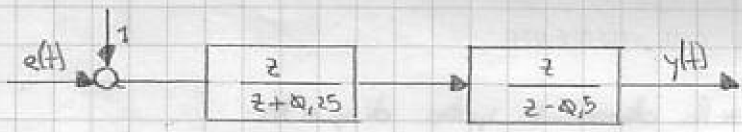
Associare ciascuna di queste realizzazioni ai sistemi qui sotto riportati:

a)

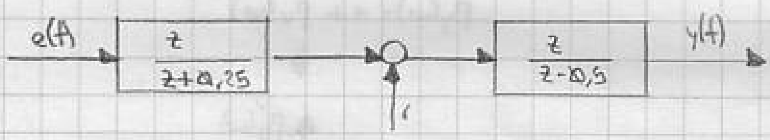


con $e \sim WN(0,1)$

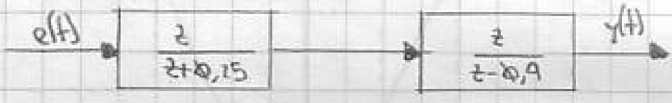
b)



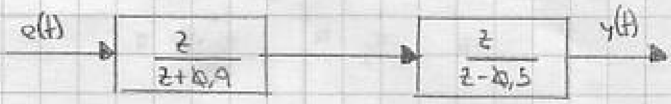
c)



d)



e)



2) a) Questo sistema ha due blocchi in cascata e quindi si fa il prodotto delle funzioni di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z}{z+0,5} \cdot \frac{z}{z-0,5} = \frac{z^2}{z^2 - \cancel{0,5z} + \cancel{0,5z} - 0,25} = \frac{z^2}{z^2 - 0,25}$$

Quindi: $y(t) = G(z)e(t) = \dfrac{z^2}{z^2 - 0,25}\, e(t)$

$\Downarrow$

$$y(t) = \frac{z^2}{z^2-0,25}\, e(t) \Rightarrow y(t)(z^2-0,25) = z^2 e(t) \Rightarrow z^2 y(t) - 0,25\, y(t) = z^2 e(t) \Rightarrow y(t+2) - 0,25\, y(t) = e(t+2)$$

Analizziamo valor medio di questo processo: $y(t) = 0,25\, y(t-2) + e(t)$ (spostamento di 2 passi).

Posto:

$$m_y = E[y(t)] \Rightarrow m_y = 0,25\, m_y + 0 \quad\Downarrow\quad \underline{m_y = 0}$$

$$E[y(t)] = E[0,25\, y(t-2)] + E[e(t)]$$

Analizziamo il secondo processo: $y(t) = \frac{z}{z+0,25} \cdot \frac{z}{z-0,5}\, e(t) + 1 =$

Quindi:

$$= \frac{z^2}{(z+0,25)(z-0,5)}\, e(t)+1 = \frac{z^2}{z^2-0,5z+0,25z-0,125}\, e(t)+1$$

$$= \frac{z^2}{z^2-0,25z-0,125}\, e(t)+1 \Rightarrow y(t)(z^2-0,25z-0,125) = e(t)z^2+1$$

$$z^2 y(t) - 0,25\, y(t) z - 0,125\, y(t) = z^2 e(t)+1$$

$$\Downarrow$$

$$y(t+2) - 0,25\, y(t+1) - 0,125\, y(t) = e(t+2)+1 \Rightarrow y(t) = 0,25\, y(t-1) - 0,125\, y(t-2) + e(t) + 1$$

Calcolo il valor medio:

$$E[y(t)] = E[0,25\, y(t-1)] - E[0,125\, y(t-2)] + E[e(t)] + 1 = 0,25\, E[y(t-1)] - 0,125\, E[y(t-2)] + 0 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$E[y(t)] = 0,25\, E[y(t)] - 0,125\, E[y(t)] + 1$$

Quindi: $E[y(t)] - 0,25\, E[y(t)] + 0,125\, E[y(t)] = 1$

$$\Downarrow$$

$$E[y(t)](1-0,25+0,125) = 1 \Rightarrow E[y(t)] = \frac{1}{0,875} = 1,6 \quad \text{(REALIZZAZIONE A)}.$$

Per il terzo processo: $v(t) = \frac{z}{z+0,25}\, e(t) \Rightarrow v(t)(z+0,25) = z e(t) \Rightarrow z v(t) + 0,25\, v(t) = z e(t)$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = -0,25\, v(t-1) + e(t)$$

Inoltre:

$$y(t) = \frac{z}{z-0,5}(v(t)) + 1 \Rightarrow y(t)(z-0,5) = z v(t) + 1$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) z - 0,5\, y(t) = z v(t) + 1 \Rightarrow \underline{y(t) = 0,5\, y(t-1) + v(t) + 1}$$

Quindi:

$$E[y(t)] = E[0,5\, y(t-1)] + E[-0,25\, v(t-1)] + E[e(t)] + 1 = 0,5\, E[y(t)] + 0 + 1 + (-0,25)\, \overset{=0}{\cancel{E[v(t-1)]}} \Rightarrow E[y(t)](1-0,5) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$E[y(t)] = 2$$

(REALIZZAZIONE B)

Ma:

$$E[v(t)] = -0,25\, E[v(t-1)] + 0 \Rightarrow E[v(t)] = 0.$$

Analizziamo il processo h; calcoliamo lo spettro:

$$G(z) = \frac{z}{z+0,25} \cdot \frac{z}{z-0,9} = \frac{z^2}{z^2-0,9z+0,25z-0,225} = \frac{y(t)}{e(t)}$$

Quindi:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{|e^{j\omega}|^2}{|e^{2j\omega} - 0,65\, e^{j\omega} - 0,225|^2} \Rightarrow \bullet\ \omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{|0,225|^2} = \frac{1}{0,50625} = 19,75$$

- $\omega = \pi \Rightarrow \ldots$
- $\omega = \pi/2 \Rightarrow \ldots$

Alla fine si nota che nello spettro prevalgono le componenti a bassa frequenza.