

(b)

Si come  $\gamma(t_1, t_2)$  con  $t_1 = t_2 = t$  altro non è che la varianza del processo, si ha:

$$\gamma(t, t) = \text{Var}[r(t)] = (c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2) \lambda^2, \text{ in quanto } \gamma(t, t) = (c_0 c_0 + c_1 c_1 + \dots + c_n c_n) \lambda^2.$$

Studiamo ora il processo IFA più semplice, e cioè il processo IFA(1). A tale proposito consideriamo il processo seguente:

$$r(t) = \eta(t) + c \eta(t-1)$$

Si noti subito che:

$$\gamma(j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{per } j \geq 2 \\ c^2 \sigma^2 & \text{per } j = 1 \\ (1+c^2) \sigma^2 & \text{per } j = 0 \end{cases} \text{ Infatti per } j \geq 2 \text{ c'è correlazione nulla. Per } j = 1 \text{ si ha che } t_2 - t_1 = 1 \Rightarrow j+1 = 2 \Rightarrow c_{j+1} = c.$$

Se invece abbiamo un processo IFA di ordine infinito (IFA( $\infty$ )), cioè un processo del seguente tipo:

$$r(t) = c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \eta(t-i)$$

possiamo osservare che la varianza del processo in questione deve essere:

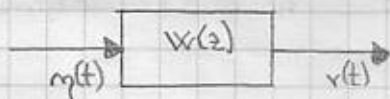
$$\text{Var}[r(t)] = \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \right) \lambda^2 < \infty, \text{ cioè la varianza deve essere limitata.}$$

An definizione se:  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 < \infty \Rightarrow$  il processo IFA( $\infty$ ) è un processo stazionario.

Vediamo ora di analizzare un processo  $r(t)$  così formato:

$$r(t) = a_1 r(t-1) + a_2 r(t-2) + \dots + a_m r(t-m) + \eta(t), \text{ con } \eta(t) \sim \text{Var}(\sigma, \lambda^2).$$

Questa equazione prende anche il nome di EQUAZIONE ALLE RICORRENZE. Se consideriamo il sistema fatto in questo modo:



abbiamo calcolare  $W(z)$ . Posto:  $z^{-1} r(t) = r(t-1)$

Quindi:

$$r(t) = (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) r(t) + \eta(t)$$

$$r(t) = a_1 z^{-1} r(t) + a_2 z^{-2} r(t) + \dots + a_m z^{-m} r(t) + \eta(t)$$

$$r(t) - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) r(t) = \eta(t) \Rightarrow r(t) (1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m})) = \eta(t)$$

In conclusione:

$$\frac{r(t)}{\eta(t)} = W(z) = \frac{1}{(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_m z^{-m})} = \frac{z^m}{z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m}$$

Dunque questa funzione di trasferimento ha  $m$  zeri nell'origine ed  $m$  poli disposti secondo i parametri  $a_i$  che caratterizzano tale processo. Se il sistema è stabile, cioè se i poli della funzione di trasferimento  $W(z)$  sono interni al cerchio di raggio unitario, allora il processo  $r(t)$  converge a un processo stazionario. Un processo costruito in questa maniera prende il nome di processo AUTOREGRESSIVO (AR). Come si può facilmente notare, contrariamente ad un processo IFA, un processo AR non è sempre stazionario. La stazionarietà dipende dal valore del parametro  $a$ . Quando  $|a| < 1$ , allora si ha un processo stazionario equivalente ad un IFA( $\infty$ ). Nei processi AR( $m$ ) esiste un metodo che ci consente rapidamente di calcolare la funzione di covarianza. Questo metodo fa uso delle equazioni di Yule-Walker. Supponiamo di avere un AR(1):

$$v(t) = a v(t-1) + \eta(t)$$

Possiamo scrivere la funzione di covarianza nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \gamma(j) &= E[v(t)v(t-j)] = E[(a v(t-1) + \eta(t))v(t-j)] = E[a v(t-1)v(t-j) + \eta(t)v(t-j)] = \\ &= E[a v(t-1)v(t-j)] + E[\eta(t)v(t-j)] = a E[v(t-1)v(t-j)] + 0 \end{aligned}$$

Siccome  $\gamma(j) = E[v(t)v(t-j)]$  si ha che:

$$\gamma(j-1) = E[v(t-1)v(t-j)] \Rightarrow \gamma(j) = a \gamma(j-1)$$

Quindi per  $j=0$  si ottiene:  $E[v(t)v(t)] = E[v(t)^2] =$

Siccome:

$$\begin{aligned} &= E[a^2 v(t-1)^2 + \eta^2(t) + 2\eta(t)a v(t-1)] = E[a^2 v(t-1)^2] + \\ &+ E[\eta^2(t)] + E[2\eta(t)a v(t-1)] = a^2 E[v(t-1)^2] + \lambda^2 + 0 \\ &= a^2 E[v(t)^2] + \lambda^2 \end{aligned}$$

$$E[v(t)^2] = \gamma(0) \text{ con } j=0$$

↓

$$\gamma(0) = a^2 \gamma(0) + \lambda^2 \Rightarrow \gamma(0) - a^2 \gamma(0) = \lambda^2 \Rightarrow \gamma(0)(1 - a^2) = \lambda^2 \Rightarrow \gamma(0) = E[v(t)^2] = \frac{\lambda^2}{(1-a^2)}$$

Facciamo gli stessi conti per  $j=1$ . Si ottiene:

Siccome:

$$j=1 \Rightarrow \gamma(1) = E[a v(t-1)v(t-1)] = E[a v(t-1)^2] =$$

$$= a E[v(t-1)^2] = a E[v(t)^2] = a \gamma(0)$$

Quindi:  $\gamma(1) = a \gamma(0)$ . Quindi abbiamo 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} \gamma(0) + a \gamma(1) + \lambda^2 \\ \gamma(1) = a \gamma(0) \end{cases} \text{ Sostituisco e ottengo: } \gamma(0) = \left(\frac{1}{1-a^2}\right) \lambda^2 \quad (*)$$

Si noti che la prima equazione del sistema è stata ottenuta risolvendo  $E[\eta(t)v(t)]$ . Ma per comodità è meglio risolvere  $\gamma(j)$  per  $j=0$ , ottenendo l'espressione (\*), e successivamente calcolare  $\gamma(j)$  per  $j$  successivi e sostituire come mostrato in seguito:

$$\gamma(0) = \left(\frac{1}{1-a^2}\right) \lambda^2, \quad \gamma(1) = a \gamma(0) = a \left(\frac{1}{1-a^2}\right) \lambda^2 = \frac{a \lambda^2}{1-a^2}$$

A questo punto è possibile scrivere una formula generale per le coppie di  $\gamma(j)$  in un modello AR(m). Tale formula è la seguente:

$$\gamma(j) = \frac{\lambda^2 a^{|j|}}{1-a^2}$$

Analizziamo ora i processi ARMA che altro non sono che una combinazione dei processi MA ed AR. I processi ARMA sono quei processi così scritti:

$$v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_m v(t-m) + \zeta_0 \eta(t) + \zeta_1 \eta(t-1) + \dots + \zeta_m \eta(t-m)$$

Si noti che i processi ARMA sono scomponibili in:

- PROCESSI AR:  $a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_m v(t-m)$ .
- PROCESSI MA:  $\zeta_0 \eta(t) + \zeta_1 \eta(t-1) + \dots + \zeta_m \eta(t-m)$ .

Ma possiamo riscrivere il processo  $v(t)$  (processo ARMA) utilizzando l'operatore  $z$  (operatore di ritardo). Quindi:

$$v(t) = a_1 z^{-1} v(t) + a_2 z^{-2} v(t) + \dots + a_m z^{-m} v(t) + c_0 \eta(t) + c_1 z^{-1} \eta(t) + \dots + c_m z^{-m} \eta(t)$$

$$\downarrow$$

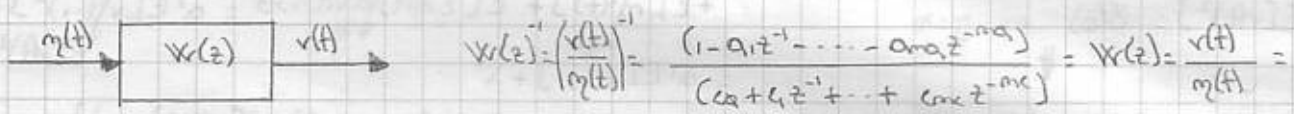
$$v(t) = (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) v(t) + (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}) \eta(t)$$

Quindi:

$$v(t) - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) v(t) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}) \eta(t)$$

$$\downarrow$$

$$v(t) (1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m}) = \eta(t) (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m})$$



Posto:  $\begin{cases} N(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} \\ A(z) = (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_m z^{-m}) \end{cases} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}}{(1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m})}$

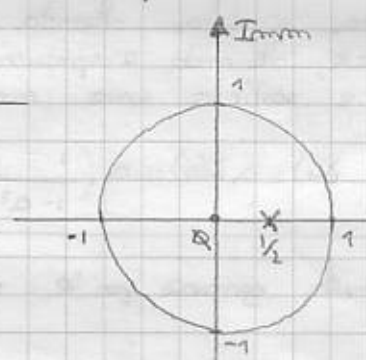
$$\downarrow$$

$$V(z) = \frac{N(z)}{A(z)}$$

\* Come si può notare  $V(z)$  ha  $m_c$  zeri e  $m_a$  poli disposti secondo i parametri  $a_i$  e  $c_i$ .

Il modello ARMA può generare processi stazionari e non stazionari. Esso genera un processo stazionario quando  $V(z)$  è stabile. Si ricordi che un generico sistema a tempo discreto (come quelli da noi consideriamo) è stabile quando la sua funzione di trasferimento  $V(z)$  è stabile. La funzione  $V(z)$  è stabile quando i suoi poli sono all'interno del cerchio unitario, cioè sono interni alla circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine. Prendiamo in esame un esempio:

$$V(z) = \frac{z}{z - 1/2}$$



La funzione di trasferimento ha un polo. Infatti:

$$z - 1/2 = 0 \Rightarrow z = 1/2 \rightarrow \text{POLO.}$$

\* Si noti che si considera la parte reale del polo e si verifica se è interna al cerchio.

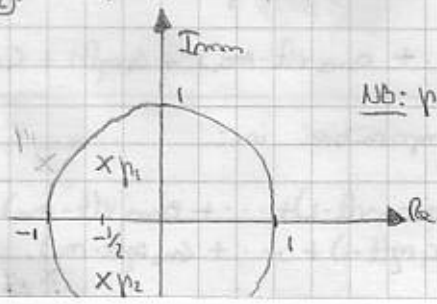
Quindi se per esempio abbiamo:

$$V(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1} \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0 \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

La parte reale del polo è  $(-1/2)$ , e quindi è dentro alla circonferenza.

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

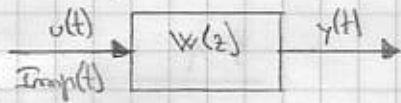
$\downarrow$   
 $V(z)$  è STABILE.



NB: propri come i poli in questione.

(11)

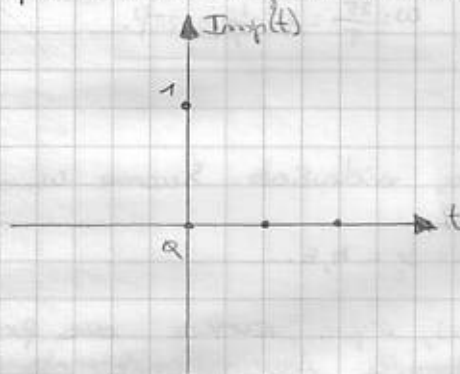
Prendiamo ora in esame la concetto di risposta impulsiva. Innanzitutto un impulso è un tipo di segnale. Supponiamo di essere nella seguente situazione:



Definiamo il segnale di impulso nel seguente modo:

$$u(t) = \text{Imp}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Graficamente un impulso viene così rappresentato:



\* Se scriviamo  $y(t) = W(z)u(t)$  e supponiamo che  $W(z)$  sia scomponibile nel seguente modo:

$$W(z) = W_0 + W_1 z^{-1} + \dots + W_m z^{-m}$$

allora possiamo scrivere:

$$y(t) = (W_0 + W_1 z^{-1} + \dots) u(t)$$

I coefficienti  $W_0, W_1, \dots, W_m$  vengono detti COEFFICIENTI DELLA RISPOSTA IMPULSIVA. Quindi se per ipotesi siamo che  $u(t) = \text{Imp}(t)$ , allora si ha:

$$y(0) = W_0 u(0) + W_1 u(-1) + \dots$$

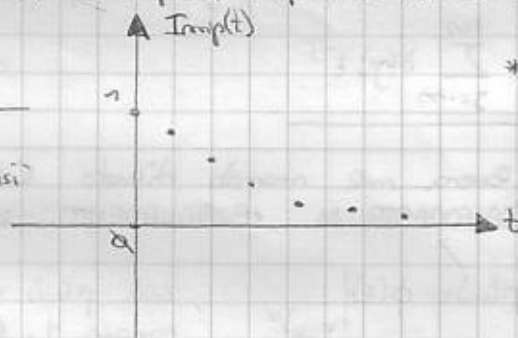
$$y(1) = W_0 u(1) + W_1 u(0) + \dots$$

$$y(2) = W_0 u(2) + W_1 u(1) + W_2 u(0) + \dots$$

⋮

Quota è stata possibile scrivere grazie al fatto che  $y(t) = W_0 u(t) + W_1 u(t-1) + \dots$ . Se la funzione di trasferimento è stabile, allora la risposta impulsiva va a zero nella seguente maniera:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |W_i|^2 < \infty$$



\* Si noti che la risposta impulsiva soddisfa sempre tale proprietà.

Si noti anche che il processo così ottenuto è un processo RAC.

Consideriamo ora un processo stazionario  $x(t)$  con funzione di autocorrelazione  $\delta(\tau)$ . Consideriamo la trasformata di Fourier di  $\delta(\tau)$  così definita:

$$p(\omega) = \mathcal{F}[\delta(\tau)]$$

dove con  $\mathcal{F}$  indichiamo la trasformata di Fourier di  $\delta(\tau)$ . Per definizione la trasformata di Fourier di  $\delta(\tau)$  è:

$$\mathcal{F}[\delta(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Chiamiamo  $p(\omega)$  lo SPETTRO della funzione di autocorrelazione  $\delta(\tau)$ . Tale spettro ha le seguenti proprietà:

- 1)  $p(\omega)$  è reale
- 2)  $p(\omega) \geq 0$  sempre

3)  $f(-\omega) = f(\omega)$

\* Si ricordi che la frequenza è definita come l'inverso del periodo, e:

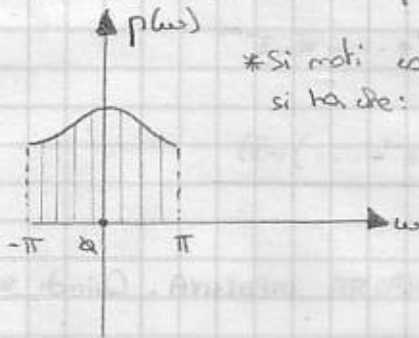
4)  $f(\omega)$  è periodica di periodo  $T = 2\pi$ .

$f = \frac{1}{T}$

Inoltre, la periodicità  $\omega$  è data da:

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f$

Quindi in breve, invece di descrivere il processo come una funzione del tempo, lo descriviamo in funzione della frequenza. Cioè perché abbiamo introdotto il concetto di spettro. Quindi  $f(\omega)$  è lo spettro di  $x(t)$  e viene detta anche DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA. Vediamo ora come si comporta graficamente lo spettro:



\* Si noti come  $f(\omega)$  rispetti le proprietà sopra enunciate. Siccome  $\omega_{max} = \pi$ , si ha che:

$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0,5$

Dato la densità spettrale  $f(\omega)$ , si può risalire alla funzione di correlazione attraverso la formula dell'inversa trasformata che è la seguente:

$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$

Si noti che  $\frac{1}{2\pi}$  prende il nome di COEFFICIENTE DI NORMALIZZAZIONE. Si noti che per  $\tau = 0$  si ha:

Si noti però  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$  sotto il segno di integrale rappresenta l'area sotto

dello spettro  $f(\omega)$ . Quindi possiamo affermare che la risonanza del generico processo altro non è che l'area sotto lo spettro per un opportuno coefficiente di normalizzazione. Si definisce invece SPETTRO DEL PROCESSO la seguente espressione:

$\phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} R(\tau) z^{-j}$

In breve lo spettro complesso lavora nel mondo discreto (lo si spiega dall'uso dell'operatore  $z$ ). Utilizzando la TRASFORMATA DI CAMPIONAMENTO:  $z = e^{j\omega}$  si può anche scrivere:

$f(\omega) = \phi(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

con  $f(\omega)$  valutata sulla circonferenza di raggio 1. Quindi  $\phi(z)$  gode delle stesse proprietà viste per  $f(\omega)$ .

Prendiamo in esame il seguente esempio:

$x(t) = m(t) + c \cos(\omega_c t - t)$  con  $m(t) \sim \text{WGN}(\omega_c, \lambda^2)$

Abbiamo già visto come si comporta questo processo. In particolare, sappiamo che:

$R(\tau) = \begin{cases} \lambda^2 & \tau > 1 \\ c \lambda^2 & \tau = \pm 1 \\ (1+c^2)\lambda^2 & \tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} R(\tau) z^{-j} = (1+c^2)\lambda^2 z^{-0} + c\lambda^2 z^{-1} + c\lambda^2 z^{+1} = (1+c^2)\lambda^2 + c\lambda^2 z^{-1} + c\lambda^2 z^{+1}$

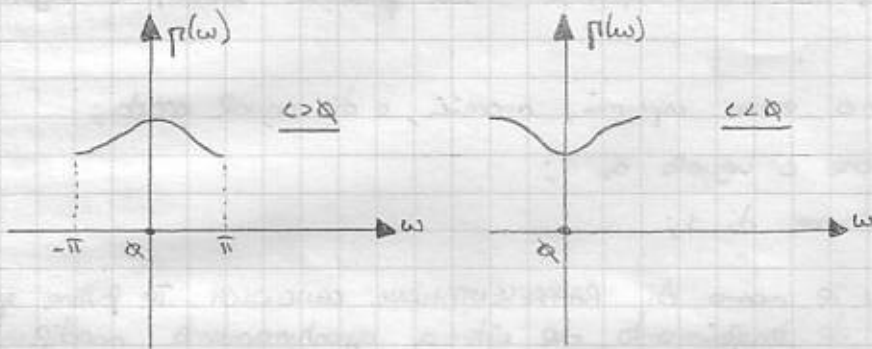
Si noti che  $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ . Questa formula è nota come FORMULA DI EULERO. Quindi:

$c\lambda^2 (e^{-j\omega} + e^{j\omega}) = c\lambda^2 (\cos \omega - j \sin \omega + \cos \omega + j \sin \omega) = c\lambda^2 (2 \cos \omega) = 2c\lambda^2 \cos \omega$

Infatti:  $f(\omega) = (1+c^2)\lambda^2 + c\lambda^2 e^{-j\omega} + c\lambda^2 e^{j\omega} = (1+c^2)\lambda^2 + 2c\lambda^2 \cos \omega$ , e questa dipende dalla precedente

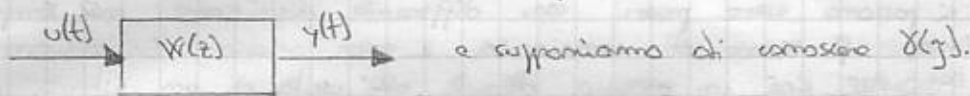
13

espressione. Quindi graficamente si ha:



\* Come si può facilmente notare, per  $C > 0$  predominano le basse frequenze, mentre per  $C < 0$  predominano le alte frequenze, e quindi il segnale a R si realizza oscillando.

Se consideriamo un processo ARMA, c'è un meccanismo per calcolare lo spettro senza usare la definizione. Supponiamo che  $u(t)$  sia un processo stazionario.



Se consideriamo per  $u(t)$  la relativa funzione di covarianza:  $\delta_{uu}(\gamma)$ . Vogliamo trovare le caratteristiche di  $y(t)$ . Innanzitutto se  $W(z)$  è stabile, allora  $y(t)$  è un processo stazionario. Quindi ci concentriamo sulla  $y(t)$  a regime. Quindi possiamo scrivere:  $\delta_{yy}(\gamma)$ . Sfruttando la definizione di spettro complesso si ha:

$$\phi_{uu}(z) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \delta_{uu}(\gamma) z^{-\gamma}$$

$$\phi_{yy}(z) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \delta_{yy}(\gamma) z^{-\gamma}$$

$$\phi_{uy}(z) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \delta_{uy}(\gamma) z^{-\gamma}$$

⇒ confrontando queste espressioni con la definizione di densità spettrale di potenza di un processo si ottiene:

$$\underline{P_{uu}(\omega) = \phi_{uu}(e^{j\omega})}$$

Quindi notando che  $P_{yy}(\omega)$  e  $P_{uu}(\omega)$  sono reali si ha che  $P_{uy}(\omega) = \phi_{uy}(e^{j\omega})$  è complessa.  $P_{uy}(\omega)$  è la densità spettrale ingresso-uscita. Immette:  $\delta_{uy}(\gamma) = \delta_{yu}(\gamma)$ . Questo implica il seguente fatto:

$$\underline{\phi_{yu}(z) = \phi_{uy}(z^{-1})} \Rightarrow P_{yu}(\omega) = P_{uy}(\omega)^* \text{ dove } * \text{ indica il complesso coniugato.}$$

Siccome:

$$\phi_{uy}(z) = W(z) \phi_{uu}(z) \text{ e } \phi_{yy}(z) = W(z) \phi_{yu}(z) \Rightarrow \underline{\phi_{yy}(z) = W(z) W(z^{-1}) \phi_{uu}(z^{-1})}$$

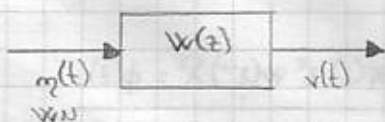
Per trovare quest'ultima espressione abbiamo usato la proprietà  $\phi_{uy}(z) = \phi_{yu}(z^{-1})$ . Si verifica immediatamente che  $\phi_{uu}(z^{-1}) = \phi_{uu}(z)$ , e si perviene alla formula:

$$\underline{\phi_{yy}(z) = W(z) W(z^{-1}) \phi_{uu}(z)}$$

Da questa segue che:

$$\underline{P_{yy}(\omega) = |W(e^{j\omega})|^2 P_{uu}(\omega)}$$

Si noti che quest'ultima relazione è più generale. Nel caso particolare di un processo ARMA, si ha:



$P_{vv}(\omega) = |W(e^{j\omega})|^2 \lambda^2$ , dove  $\lambda^2$  è la varianza di  $\eta(t)$   
o guarda caso:

$$P_{vv}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\gamma) e^{-j\omega\gamma} = \delta(0) = \lambda^2.$$

Consideriamo ora un generico processo stazionario  $v(t)$ . Noi vogliamo che esista una e una sola rappresentazione come uscita di un sistema dinamico alimentato dal rumore bianco. Perché avvenga ciò è necessario che la funzione di trasferimento del sistema soddisfi le seguenti condizioni:

- 1) Numeratore e denominatore devono essere coprimi, monici, e di ugual grado;
- 2) Tutti gli zeri hanno modulo minore o uguale a 1;
- 3) Tutti i poli hanno modulo minore di 1;

La rappresentazione che ne esce prende il nome di RAPPRESENTAZIONE CANONICA. Il polinomio spettro  $\phi(z)$  da un altro nome è che la funzione di trasferimento del sistema opportunamente modificata, prende il nome di FATTORE SPETTRALE CANONICO e viene indicato con  $\tilde{W}(z)$ . Grazie al fattore spettrale canonico è possibile risolvere il problema della predizione in maniera semplice. Abbiamo visto che ci possono essere processi con differente descrizione nel tempo ma che forniscono la medesima funzione di covarianza e valori medio. Consideriamo ora un PROCESSO A SPETTRO RAZIONALE cioè un processo ottenuto all'uscita di un sistema dinamico con funzione di trasferimento  $W(z)$  e ingresso un rumore bianco. Ci si chiede se esiste un altro sistema con funzione di trasferimento  $\tilde{W}(z)$  che alimentato dal rumore bianco  $\tilde{w}(t)$ , produce un processo con identica funzione di covarianza del precedente. Se ciò avviene, come abbiamo visto, allora si hanno differenti rappresentazioni del medesimo processo. In breve un dato processo può essere visto come l'uscita di diversi sistemi dinamici. Ma come sono legate le funzioni di trasferimento delle varie rappresentazioni, ed esiste una rappresentazione privilegiata? Invece di  $\tilde{W}(z)$  possiamo usare  $\phi(z)$  per descrivere il processo (descrizione nel dominio della frequenza). Possiamo riformulare il problema nel seguente modo: dato lo spettro complesso  $\phi(z)$ , trovare tutte le funzioni di trasferimento  $W(z)$  e le relative  $\lambda^2$  che soddisfanno:

$$\phi(z) = W(z)W(z^{-1})\lambda^2$$

Questo problema è noto come PROBLEMA DELLA FATTORIZZAZIONE SPETTRALE. Il problema può essere impostato in vari modi:

- 1) si può imporre il vincolo di stabilità ossia  $W(z)$  necessanda così a sole soluzioni (rappresentazioni) stabili.
- 2) Non si pongono vincoli e si risolve il problema in tutta la sua generalità.

Vediamo ora alcuni modi di ottenere la rappresentazione razionale del processo, senza mutarne lo spettro:

- 1) Moltiplichiamo  $W(z)$  per una costante  $(\frac{1}{q})$ , e si modifica la varianza del rumore di ingresso in questo modo:

$$\begin{cases} \tilde{W}(z) = \frac{1}{q} W(z) \\ \tilde{\lambda}^2 = q^2 \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{\phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = \left(\frac{1}{q^2}\right) W(z)W(z^{-1})q^2\lambda^2 = \phi(z)$$

- 2) Se si porre:  $\tilde{W}(z) = z^{-k} W(z)$  e  $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 \Rightarrow \tilde{\phi}(z) = z^{-k} W(z) z^k W(z^{-1}) \lambda^2 = \phi(z)$

Immaginare si ha:  $(W(z), \lambda^2) \rightarrow v(t)$

$(\tilde{W}(z), \tilde{\lambda}^2) \rightarrow v(t-k) \Rightarrow$  la transizione temporale non altera le caratteristiche temporali del processo.