$$\bar P = \frac{\frac{81}{20}\bar P + \frac{19}{20}}{4\bar P + 1} \Rightarrow 4\bar P^2 + \bar P - \frac{81}{20}\bar P - \frac{19}{20} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\bar P - 1)(80\bar P + 19) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar P = 1 \\ \cancel{\bar P = -\frac{19}{80}} \end{cases}$$

Perciò: $\bar P = 1$ → sol. di regime. Ora ho due alternative:

1) Uso i teoremi asintotici. Quindi: 1° th: $F = \frac{1}{2}$ ⇒ sist. asintoticamente stabile

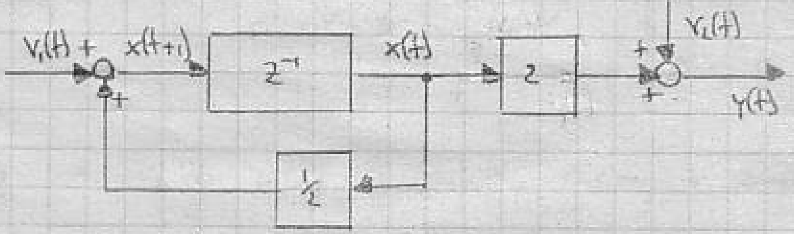
Questo si ha perché $V_{12} = 0$, altrimenti questo teorema non verrebbe preso nemmeno in considerazione.

(SOL è S.D.P)

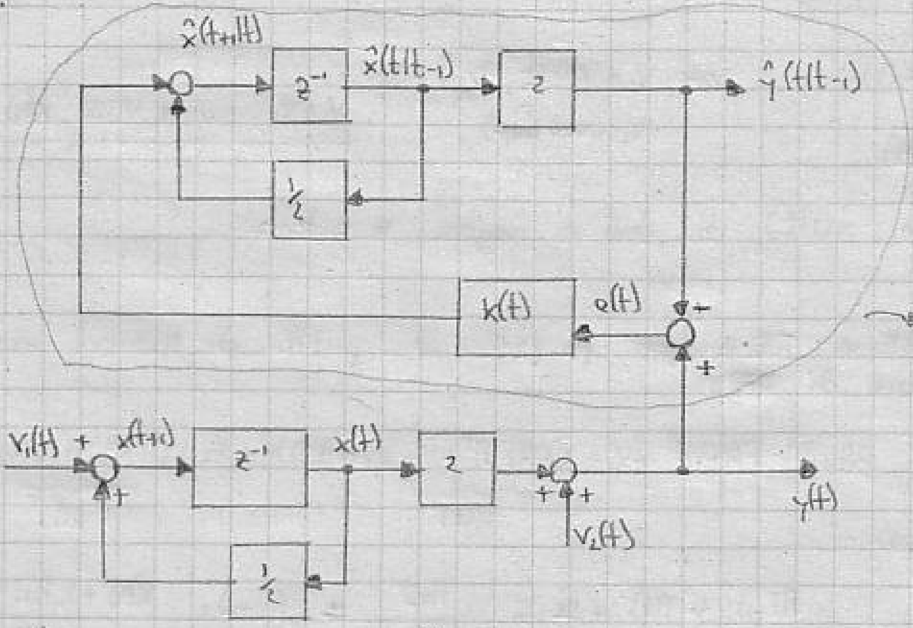
2° th: (SOL. D.P)

A questo punto si ha: $\bar P = 1 \Rightarrow \bar K = \frac{F\bar P H^T + V_{12}}{H\bar P H^T + V_2} = \frac{1}{5}$ → guadagno del filtro di Kalman.

Graficamente si ha:



Il filtro rispecchia la struttura del sistema ma non presenta rumori. Quindi:



→ FILTRO DI KALMAN.

Formalmente:

$$\hat y(t|t-1) = \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)2}{1 + \frac{\frac{2}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}\, y(t) = \frac{\frac{2}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{2}{5}z^{-1}}\, y(t) =$$

$$= \frac{\frac{2}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{10}z^{-1}}\, y(t) \Rightarrow \hat y(t|t-1) = \frac{1}{10}\hat y(t-1|t-2) + \frac{2}{5}y(t-1)$$

Vediamo il filtro:

$\hat{x}(t|t) = F\hat{x}(t-1|t-1) + \bar{K}_0 e(t)$ con $\underline{\bar{K}_0 = (\bar{P}H^T)(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1}}$

$e(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$

Quindi: $\hat{x}(t|t) = \frac{1}{2}\hat{x}(t-1|t-1) + \frac{2}{5}(y(t) - \hat{y}(t|t-1))$

$\hat{x}(t|t) = \frac{1}{2}\hat{x}(t-1|t-1) + \frac{2}{5}(y(t) - 2\hat{x}(t|t-1))$ NB: $\underline{\hat{x}(t|t-1) = F\hat{x}(t-1|t-1)}$.

$\hat{x}(t|t) = \frac{1}{2}\hat{x}(t-1|t-1) + \frac{2}{5}(y(t) - 2\frac{1}{2}\hat{x}(t-1|t-1))$

$\Downarrow$

$\hat{x}(t|t) = \frac{1}{10}\hat{x}(t-1|t-1) + \frac{2}{5}y(t)$

5) consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + v_1(t) \\ y(t) = x(t) + v_2(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} v_1 \sim WN(0,4) \\ v_2 \sim WN(0,8) \end{matrix} \qquad v_1 \perp v_2$$

$\boxed{P_1 > 0}$

Trovare $\hat{x}(t|t-1)$? con $v_1 \perp v_2 \Rightarrow V_{12} = 0$

5) Innanzitutto controlliamo che $V_2 > 0$. La risposta è affermativa quindi:

ARE: $P(t+1) = P(t) + 4 - \frac{P(t)^2}{P(t)+8} = \frac{P(t)^2 + 8P(t) + 4P(t) + 32 - P(t)^2}{P(t)+8} =$ → deve sempre sparire.

$= \frac{12P(t) + 32}{P(t)+8}$

Quindi: $P(t+1) = \frac{12P(t)+32}{P(t)+8} \Rightarrow \bar{P} = \frac{12\bar{P}+32}{\bar{P}+8} = \dots = \begin{cases} \bar{P} = 8 \\ \cancel{\bar{P} = -4} \end{cases} \Rightarrow \underline{\bar{P} = 8}$

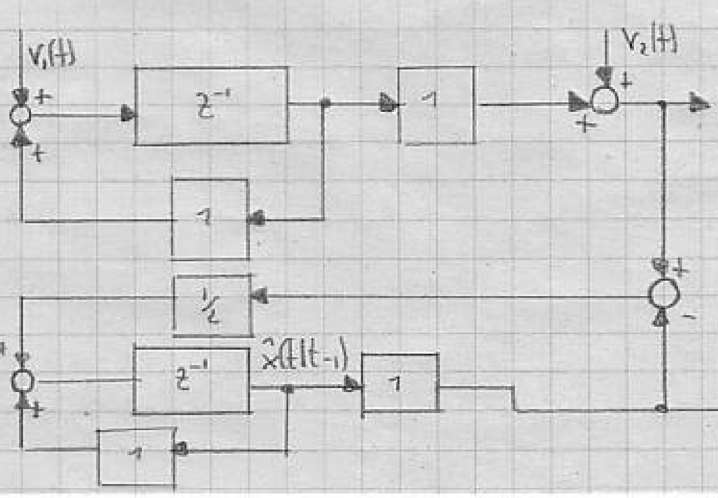
Però il primo teorema asintotico non si può usare in quanto $|F| = 1$. Analizziamo quindi il secondo teorema asintotico. Analizziamo la matrice di osservabilità.

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

, nel nostro caso $O = [H] = 1$, quindi il sistema è completamente osservabile.

$\bar{K} = \frac{8}{8+8} = \frac{1}{2}$

Schema generale:



$$\hat{x}(t|t-1) = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1 + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}}}\, y(t)$$

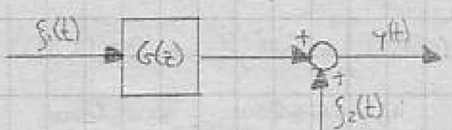
a) Sia:

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \quad \text{con } v(t) \sim WN(0,1)$$

Esiste un predittore di regime!

b)

1) $G(z) = \frac{z}{z - 1/4}$



con $\xi_1 \sim WN(0,1)$.
Calcolare valor medio e spettro di $y(\cdot)$ quando:
a) $\xi_2(\cdot) = 0, \ \forall t$
b) $\xi_2(\cdot) \sim WN(0,1)$ indipendente da $\xi_1(\cdot)$
c) $\xi_2(t) = \xi_1(t), \ \forall t$.

1) a) Analizziamo la funzione di trasferimento $G(z)$.
Si ha:
$$G(z) = \frac{z}{z - 1/4} = \frac{y(t)}{\xi_1(t)} \Rightarrow y(t) = G(z)\xi_1(t) \Rightarrow y(t) = \frac{z}{z-1/4}\xi_1(t)$$
, visto che $\xi_2(t) = 0, \ \forall t$.

Quindi:
$$y(t)(z - 1/4) = z\xi_1(t)$$
Siccome z è l'operatore ritardo si ha: $z^{-1}y(t) = y(t-1)$
$z^{-2}y(t) = y(t-2)$
$\vdots$
$z^{-m}y(t) = y(t-m)$

$$\Rightarrow zy(t) - \tfrac{1}{4}y(t) = z\xi_1(t)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t+1) - \tfrac{1}{4}y(t) = \xi_1(t+1)$$

Concludendo si ottiene l'equazione:
$$y(t+1) = \tfrac{1}{4}y(t) + \xi_1(t+1) \Rightarrow \underline{y(t) = \tfrac{1}{4}y(t-1) + \xi_1(t)}$$

Ovviamente se $\xi_2(t)$ fosse stato diverso da zero si sarebbe avuto:
$$\rightarrow \underline{y(t) = \tfrac{1}{4}y(t-1) + \xi_1(t) + \xi_2(t)}$$

Calcoliamoci il valore atteso:
$$E[y(t)] = E[\tfrac{1}{4}y(t-1) + \xi_1(t)] = E[\tfrac{1}{4}y(t-1)] + E[\xi_1(t)] = \tfrac{1}{4}E[y(t-1)] + 0 = \tfrac{1}{4}E[y(t-1)]$$

Si ricordi infatti che:
$$WN(\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \text{VALORE ATTESO} \\ \beta = \text{VARIANZA} \end{cases}$$

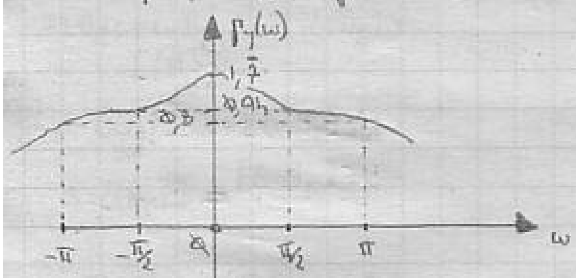
* Siccome $E[y(t)] = E[y(t-1)] \Rightarrow E[y(t)] - \tfrac{1}{4}E[y(t-1)] = 0$
$$\Downarrow$$
$$\underline{E[y(t)] = 0}$$

Calcoliamoci lo spettro:
$G(z) = \frac{z}{z - 1/4}$, ma usando la trasformata di campionamento si ha:
$$z = e^{j\omega} \Rightarrow G(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1/4}$$
. Siccome lo spettro $\Gamma_y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \cdot \underbrace{\sigma^2}_{\sigma \cdot \text{Var}\,\xi_1(t)}$, si ha:
$$\Gamma_y(\omega) = \left|\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1/4}\right|^2 \cdot 1$$

Quindi:
$$\Gamma_y(\omega) = \left|\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1/4}\right|^2 \cdot 1 = \left|\frac{\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega}{\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega - 1/4}\right|^2 =$$
$$= \frac{|\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega|^2}{|\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega - 1/4|^2} = \frac{\cos^2\omega + \text{Sen}^2\omega}{\underbrace{\cos^2\omega + \text{Sen}^2\omega}_{1} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}(\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega)} = \frac{1}{1 + 1/16 - \frac{1}{2}(\cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega)} =$$
$$= \frac{1}{\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos\omega} = \frac{16}{17 - 8\cos\omega}$$

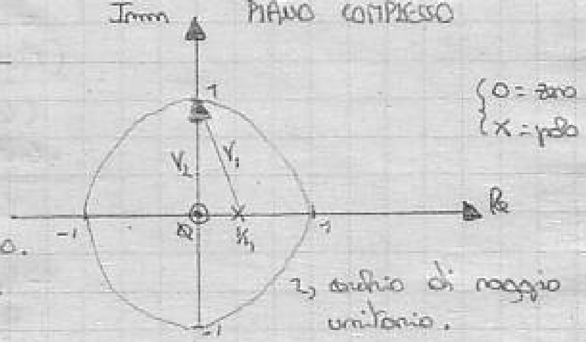
. Si noti che lo spettro è reale e quindi $j\,\text{Sen}\,\omega$ viene eliminato (componente immaginaria). Inoltre è stata usata la formula di Eulero:
$$\underline{e^{j\omega} = \cos\omega + j\,\text{Sen}\,\omega}$$

Graficamente lo spettro assume la seguente forma:



Per $\omega = 0 \Rightarrow \frac{|e^{j0}|^2}{|e^{j0} - 1/4|^2} = \frac{1}{9/16} = \frac{16}{9} \simeq 1,\bar{7}$

Per $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{|e^{j\pi/2}|^2}{|e^{j\pi/2} - 1/4|^2}$



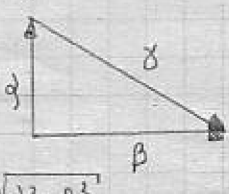
$\rightarrow$ cerchio di raggio unitario.

NB: La funzione di trasferimento $G(z)$ è asintoticamente stabile e quindi il processo di uscita $y(\cdot)$ è stazionario. Ecco perché è stato possibile calcolare il valor medio.

Per $\omega = \pi \Rightarrow \frac{|e^{j\pi}|^2}{|e^{j\pi} - 1/4|^2} \Rightarrow \Gamma_y(\pi) = \left|\frac{\sqrt{1^2 + 0^2}}{\sqrt{\frac{5}{4}^2 + 0^2}}\right|^2 = \frac{1}{1,25} \simeq 0,8$

Per $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Gamma_y(\frac{\pi}{2}) = \left|\frac{\sqrt{1^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + \frac{1}{4}^2}}\right|^2 = \frac{1}{17/16} \simeq 0,94$

NB: Ho usato il teorema di Pitagora:



$$\underline{\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

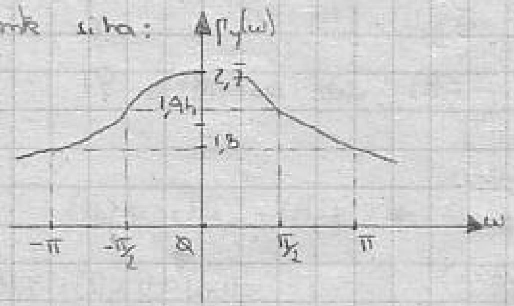
Come si può notare dal grafico dominano le basse frequenze.

b) $\xi_2(t) \sim WN(0,1) \Rightarrow y(t) = \tfrac{1}{4}y(t-1) + \xi_1(t) + \xi_2(t)$ e quindi:
$$E[y(t)] = E[\tfrac{1}{4}y(t-1) + \xi_1(t) + \xi_2(t)] = E[\tfrac{1}{4}y(t-1)] + \underbrace{E[\xi_1(t)]}_{0} + \underbrace{E[\xi_2(t)]}_{0} = E[\tfrac{1}{4}y(t-1)]$$

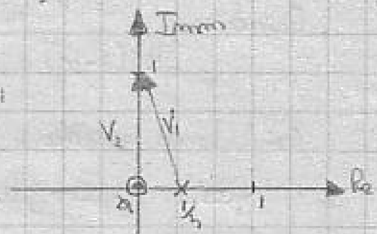
Quindi: $E[y(t)] = 0$. Calcoliamoci lo spettro: $\Gamma_y(\omega) = \left|G(e^{j\omega})\right|^2 \cdot Var(\xi_1(t)) + Var(\xi_2(t))$, perché $\xi_1(t)$ ed $\xi_2(t)$ sono indipendenti.

Perciò:
$$\Gamma_y(\omega) = \left|\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1/4}\right|^2 \cdot 1 + 1 = \frac{16}{17 - 8\cos\omega} + 1 = \frac{16 + 17 - 8\cos\omega}{17 - 8\cos\omega} = \frac{33 - 8\cos\omega}{17 - 8\cos\omega}$$

Graficamente si ha:

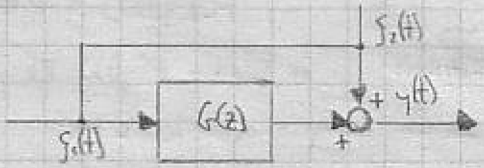


- Per $\omega = 0 \Rightarrow \dfrac{|e^{j0}|^2}{|e^{j0} - \frac{1}{4}|^2} + 1 = 1,\bar{7} + 1 = 2,\bar{7}$
- Per $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{4})^2}} = 0,94 + 1 = 1,94$
- Per $\omega = \pi \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2}} = 0,8 + 1 = 1,8$



Anche qui dominano le basse frequenze. Si noti che questo spettro altro non è che lo spettro calcolato nel punto a traslato di un'unità.

c) Posto $\xi_1(t) = \xi_2(t) \Rightarrow$



Quindi

Si hanno due blocchi in parallelo, uno con funzione di trasferimento 1 e l'altro con funzione di trasferimento $G(z)$.

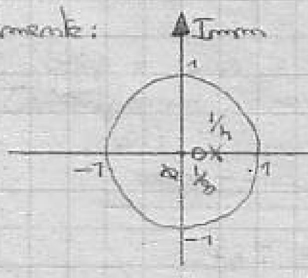
Perciò: $W(z) = G(z) + 1 =$
$$= \frac{z}{z - 1/4} + 1 = \frac{z + z - 1/4}{z - 1/4} = \frac{2z - 1/4}{z - 1/4} \Rightarrow W(z) = \frac{2z - 1/4}{z - 1/4}$$

Vediamo se è stabile. Sì lo è perché il polo è $z = 1/4$ interno al cerchio di raggio unitario. Inoltre è a fase minima perché anche gli zeri sono interni a tale cerchio. Infatti: $2z - 1/4 = 0 \Rightarrow z = 1/8$

Dunque:
$$W(z) = \frac{y(t)}{\xi_1(t)} = \frac{2z - 1/4}{z - 1/4} \Rightarrow y(t)(z - 1/4) = (2z - 1/4)\xi_1(t)$$
$$\Downarrow$$
$$z y(t) - \tfrac{1}{4} y(t) = 2z\xi_1(t) - \tfrac{1}{4}\xi_1(t)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t+1) - \tfrac{1}{4} y(t) = 2\xi_1(t+1) - \tfrac{1}{4}\xi_1(t)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t) = \tfrac{1}{4} y(t-1) + 2\xi_1(t) - \tfrac{1}{4}\xi_1(t) \Rightarrow \text{Valore atteso:}$$

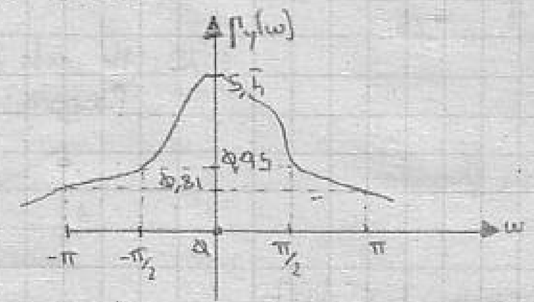
$$E[y(t)] = E[\tfrac{1}{4} y(t-1) + 2\xi_1(t) - \tfrac{1}{4}\xi_1(t)] =$$
$$= \tfrac{1}{4} E[y(t-1)] + 2\underbrace{E[\xi_1(t)]}_{0} - \tfrac{1}{4}\underbrace{E[\xi_1(t)]}_{0}$$
$$= \tfrac{1}{4} E[y(t-1)] \Rightarrow E[y(t)] = 0$$

Graficamente:



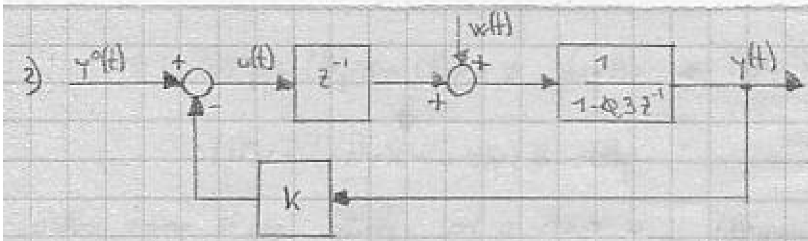
Calcoliamoci lo spettro:
$$\Gamma_y(\omega) = \left|\frac{2e^{j\omega} - 1/4}{e^{j\omega} - 1/4}\right|^2 =$$
$$= \frac{(2(\cos\omega + j\sin\omega) - \frac{1}{4})^2}{(\cos\omega + j\sin\omega - \frac{1}{4})^2} =$$
$$= \frac{4\cos^2\omega + \sin^2\omega + 1/16 - \cos\omega + j\sin\omega}{\underbrace{\cos^2\omega + \sin^2\omega}_{1} + 1/16 - \frac{1}{2}(\cos\omega + j\sin\omega)} = \frac{4 + 1/16 - \cos\omega}{\frac{17}{16} - 8\cos\omega} =$$
$$= \frac{65/16 - 16\cos\omega/16}{\frac{17}{16} - 8\cos\omega/16} = \frac{65 - 16\cos\omega}{17 - 8\cos\omega}$$

Graficamente si ha:



- Per $\omega = 0 \Rightarrow \dfrac{|2e^{j0} - \frac{1}{4}|^2}{|\frac{3}{4}|^2} = \dfrac{(\frac{7}{4})^2}{\frac{9}{16}} = \dfrac{49}{9} \cong 5,\bar{4}$
- Per $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{8})^2}}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{4})^2}} = \dfrac{1,015625}{1,0625} \cong 0,95$
- Per $\omega = \pi \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1,125^2}}{\sqrt{1,25^2}} \cong \dfrac{1,265625}{1,5625} \cong 0,81$

Dominano le basse frequenze.

2) 

con $w(t) \sim WN(0,1)$ e $y^o(t) = \bar{y}^o$.

1) Scrivere equazione del sistema di controllo.
2) Disegnare luogo dei poli in anello chiuso.
3) Per $K \in (K_1, K_2)$ si calcoli valore atteso di Δ (errore tra $y(t)$ e $\bar{y}^o$ a regime). Per quale K^*, tale valore è minimo?
4) Per $\bar{y}^o = 0 \Rightarrow Var[y(t)]$ e K^o per cui tale varianza è minima.
5) Progettare sistema di controllo a minima varianza.

2) 1) Si nota che: $y(t) = \frac{1}{1-0,3z^{-1}} I$, con $I = w(t) + z^{-1}u(t)$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{1-0,3z^{-1}}\right) w(t) + z^{-1}u(t)$$

Quindi: $(1-0,3z^{-1})y(t) = w(t) + z^{-1}u(t)$

$$\Downarrow$$

$$y(t) - 0,3z^{-1}y(t) = w(t) + z^{-1}u(t) \quad \text{con } z^{-1}u(t) = u(t-1)$$

$$\Downarrow$$

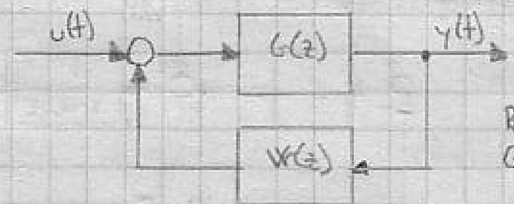
$$\underline{y(t) = 0,3y(t-1) + w(t) + u(t-1)}$$ → eq. alle ricorrenze.

2) Scriviamo la funzione di trasferimento d'anello. Quindi: $L(z) = z^{-1} \cdot K \cdot \frac{1}{1-0,3z^{-1}} = z^{-1}\frac{K}{1-0,3z^{-1}} = \frac{K}{z-0,3}$

Da tale funzione si ricava:

$F(z) = \frac{B(z)}{1+L(z)}$ = funzione di trasferimento da $y(t)$ a $y^o(t)$, con $B(z) = z^{-1}\frac{1}{1-0,3z^{-1}}$

Si nota che:



$\frac{y(t)}{u(t)} = H(z) = \frac{G(z)}{1+W(z)G(z)}$ con $L(z) = W(z)G(z)$

Perciò: $1 + L(z) = 0 \Rightarrow 1 + W(z)G(z) = 0 \Rightarrow$ nel nostro caso:

Quindi:

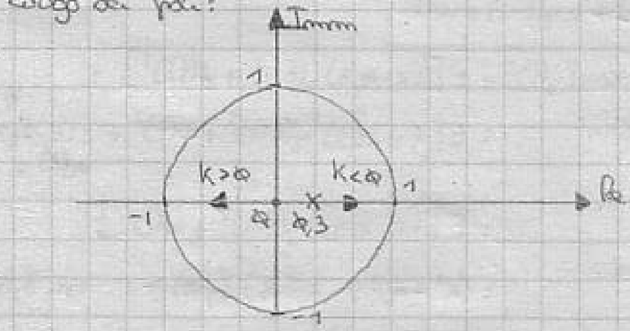
$$1 + \frac{K}{z-0,3} = 0$$

$$\frac{z-0,3+K}{z-0,3} = 0 \Rightarrow z - 0,3 + K = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z = 0,3 - K$$

Luogo dei poli:



Si nota che il sistema è asintoticamente stabile quando:

$$|z| = |0,3-K| < 1 \Rightarrow \underline{-0,7 \le K \le 1,3}$$

3) Si ha: $\bar{\Delta} = \left| E[(y(t) - \bar{y}^o)] \right|$ → Dobbiamo prima calcolarci la funzione di trasferimento da y^o a y.

Quindi:

$$y(t) = \frac{\frac{z^{-1}}{1-0,3z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-0,3z^{-1}}K} y^o(t) + \frac{\frac{1}{1-0,3z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-0,3z^{-1}}} w(t) =$$

$$= \frac{\frac{z^{-1}}{1-0,3z^{-1}}}{\frac{1-0,3z^{-1}+z^{-1}K}{1-0,3z^{-1}}} y^o(t) + \frac{\frac{1}{1-0,3z^{-1}}}{\frac{1-0,3z^{-1}+z^{-1}}{1-0,3z^{-1}}} w(t) =$$

$$= \frac{z^{-1}}{1-0,3z^{-1}+Kz^{-1}} y^o(t) + \frac{1}{1-0,3z^{-1}+z^{-1}} w(t) =$$

$$= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}(0,3+K)} y^o(t) + \frac{1}{1-z^{-1}(-0,3+1)} w(t) =$$

$$= \frac{1/z}{1-\frac{1}{z}(0,3+K)} y^o(t) + \frac{1}{1-\frac{1}{z}(-0,3+K)} w(t) =$$

$$= \frac{1}{z-0,3+K} y^o(t) + \frac{z}{z+0,3-K} w(t)$$

Dato che $w(t)$ ha valore atteso nullo si ha:

$$E[y(t)] = \frac{1}{1-0,3+K}\bar{y}^o$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\Delta} = \left| E[y(t) - \bar{y}^o] \right| = \left| E[y(t)] - \bar{y}^o \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\Delta} = \left| \frac{1}{1-0,3+K}\bar{y}^o - \bar{y}^o \right|$$

visto che $E[y(t)] = \frac{1}{1-0,3+K}\bar{y}^o$

Infatti:

$$y(t) = \frac{1}{z-0,3+K} y^o(t) \Rightarrow$$

$y(t)(z-0{,}3+K) = y^o(t) \Rightarrow zy(t) - 0{,}3y(t) + Ky(t) = y^o(t) \Rightarrow y(t+1) = 0{,}3y(t) - ky(t) + y^o(t)$

Quindi:

$$y(t) - 0{,}3y(t-1) + Ky(t-1) = y^o(t) \qquad\qquad \Downarrow \quad y(t) = 0{,}3y(t-1) - Ky(t-1) + y^o(t)$$

$$\Downarrow$$

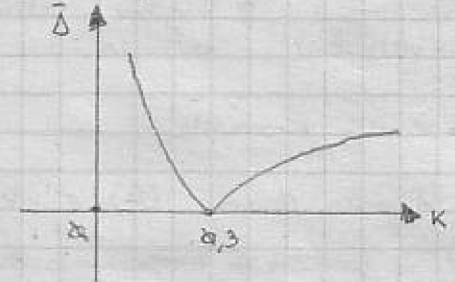
$$y(t)(1-0{,}3+K) = y^o(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-0{,}3+K}\, y^o(t)$$

, e questo si ha perché per il valore atteso y oppure y(t-1) non ha alcuna importanza

Perciò: $\bar{\Delta} = \left| \frac{1}{1-0{,}3+K}\,\bar{y}^o - \bar{y}^o \right| = \left| \frac{0{,}3-K}{0{,}7-K}\,\bar{y}^o \right|$

$$\Downarrow$$

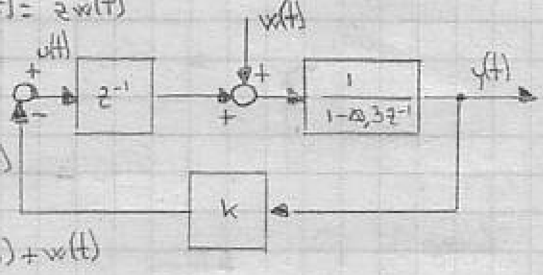
Per K^* il valore atteso appena calcolato è minimo. Questo K^* è $\underline{0{,}3}$. Graficamente:



ANDAMENTO QUALITATIVO.

4) Posto $\bar{y}^o = 0 \Rightarrow$ siccome: $y(t) = \frac{z}{z+0{,}3-K}\, w(t) \Rightarrow (z+0{,}3-K)y(t) = zw(t)$

Infatti solo la funzione di trasferimento da w(t) a y(t) rimane valida. Graficamente:



Quindi:

$$zy(t) + 0{,}3y(t) - ky(t) = zw(t) \Rightarrow y(t+1) + 0{,}3y(t) - ky(t) = zw(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t+1) = -0{,}3y(t) + ky(t) + zw(t) \Rightarrow \underline{y(t) = -0{,}3y(t-1) + Ky(t-1) + w(t)}$$

A questo punto calcoliamo la varianza di y(t): $Var[y(t)] = E[((K-0{,}3)y(t-1) + w(t))^2] =$

Questo accade perché:

$$E[y(t)] = E[(K-0{,}3)y(t-1)] + E[\cancel{w(t)}] = E[(K-0{,}3)y(t-1)]$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{E[y(t)] = 0}$$

$$= E[(K-0{,}3)^2 y(t-1)^2 + w(t)^2 + 2(K-\overset{0}{\cancel{0{,}3)y(t-1)}}\cancel{w(t)}] =$$

$$= E[(K-0{,}3)^2 y(t-1)^2 + w(t)^2] =$$

$$= (K^2 + 0{,}09 - 0{,}6K)\gamma_y(0) + 1 \quad \text{con } \underline{\gamma_y(0) = Var.}$$

Quindi: $\gamma_y(0) - (K^2 + 0{,}09 - 0{,}6K)\gamma_y(0) = 1 \Rightarrow \gamma_y(0)(1 - (K^2 + 0{,}09 - 0{,}6K)) = 1$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\gamma_y(0) = \frac{1}{(1-(K^2+0{,}09-0{,}6K))}}$$

La varianza appena trovata è minima quando $\gamma_y(0) = 1$, cioè $K^2 + 0{,}09 - 0{,}6K = 0 \Rightarrow \underline{K = 0{,}3}$

Infatti:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}6)^2 - 4\cdot 1\cdot 0{,}09 = 0{,}36 - 0{,}36 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K_{1,2} = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{0}}{2} = \underline{0{,}3}$$

Quindi:

$$\underline{K = 0{,}3 = K^o}$$

5) Il controllo a minima varianza prevede che: $J = E[(y(t+1) - y^o)^2]$ sia minimo. Essa è tale se $\hat{y}(t+1|t) = y^o(t)$ ovvero $\hat{y}(t+1|t) = 0{,}3y(t) + u(t) \Rightarrow 0{,}3y(t) + u(t) = \bar{y}^o$ e quindi: $\underline{u(t) = y^o(t) - 0{,}3y(t)}$.