Noi abbiamo visto che un sistema può essere descritto tramite le sue equazioni alle differenze:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

La teoria di Kalman è valida anche quando le matrici F ed H dipendono dal tempo. In particolare togliendo le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} E[x(1)] = x_1 \\ Var[x(1)] = P_1 \end{cases}$$

La teoria di Kalman vale comunque. Questo vale anche quando v_1 e v_2 sono correlati all'istante sincrono. Ora possiamo analizzare il problema del filtraggio alla Kalman. Innanzitutto vogliamo stimare $x(N)$ partendo dai dati $y(N), y(N-1), \dots$ e quindi:

$$\underline{\hat{x}(N|N) = ?}$$

In particolare: $\hat{x}(N|N) = E[x(N)|y^N] = E[x(N)|y^{N-1}, y(N)] = FE[x(N)|Y^N] + \underbrace{E[v_1(N)|y^N]}_{?}$

Noi vogliamo calcolare l'ultimo addendo. Si noti che:

$$\hat{x}(N|N) = E[x(N)|y^N] = E[x(N)|y^{N-1}, y(N)] = E[x(N)|y^{N-1}] + E[x(N)|e(N)]$$

$$= \hat{x}(N|N-1) + \Lambda_{x(N)e(N)} \Lambda^{-1}_{e(N)e(N)} e(N)$$

Quindi:

$$\Lambda_{x(N)e(N)} = E[(x(N))(H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N))^T] =$$

$$= E[(x(N) - \hat{x}(N|N-1) + \hat{x}(N|N-1)) \cdot (H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N))^T] =$$

$$= E[(x(N) - \hat{x}(N|N-1))(x(N) - \hat{x}(N|N-1))^T]H^T + E[(x(N) - \hat{x}(N|N-1))v_2(N)^T] +$$

$$+ E[(\hat{x}(N|N-1))(x(N) - \hat{x}(N|N-1))^T] + E[(\hat{x}(N|N-1)v_2(N)^T]$$

(NB: il secondo addendo è nullo.)

$$\Downarrow$$

$$\underline{\Lambda_{x(N)e(N)} = P(N)H^T}$$

Si noti che $\underline{\Lambda_{e(N)e(N)}}$ è già stata precedentemente calcolata. A questo punto si ottiene:

$$\hat{x}(N|N) = \hat{x}(N|N-1) + P(N)H^T \cdot (HP(N)H^T + V_2)e(N) \Rightarrow \underline{\hat{x}(N|N) = \hat{x}(N|N-1) + K_0(N)e(N)}$$

con $\underline{K_0 = P(N)H^T(HP(N)H^T + V_2)^{-1}}$

$K_0(N)$ viene detto GUADAGNO DEL FILTRO DI KALMAN. Abbiamo così trovato il guadagno del filtro di Kalman. Ora ci chiediamo se tale guadagno converge ad un valore costante. Quindi:

$$\lim_{N\to\infty} K(N) = \bar{K}$$ * $\bar{K}$ viene detto GUADAGNO DI REGIME.

Il corrispondente predittore prenderà il nome di PREDITTORE DI REGIME. Si può facilmente notare che la variabilità di $K(N)$ è dovuta alla variabilità di $P(N)$. Se:

$$\lim_{N\to\infty} P(N) = \bar{P} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} K(N) = \bar{K}$$

Quest'ultimo è un fatto molto importante. Si noti che se dovesse avvenire una convergenza di questo tipo vorrebbe dire che $\bar{P}$ sarebbe semidefinita positivamente. Ponendo nella DRE:

$$P(N+1) = P(N) = P$$

$$\Downarrow$$

$$P = FPF^T + V_1 - FPH^T(HPH^T + V_2)^{-1}HPF^T$$

Quest'ultima equazione prende il nome di EQUAZIONE ALGEBRICA DI RICCATI (ARE). Quindi se si vuole realizzare il predittore di regime, si cercherà la soluzione semidefinita della ARE, e con questa si calcolerà il guadagno a regime nel seguente modo:

$$\bar{K} = F\bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1}$$

Si noti che il predittore così trovato deve risultare stabile. Infatti se il predittore non è stabile, un disturbo di qualsiasi natura produrrebbe divergenza della predizione effettiva da quella ottima. Si noti che una soluzione della ARE è STABILIZZANTE se il corrispondente predittore risulta stabile. L'importanza della convergenza dell'equazione di Riccati sta nel fatto che la soluzione di tale equazione è la matrice varianza dell'errore di predizione dello stato, e quindi la convergenza di tale matrice indica la capacità del predittore di fornire delle predizioni delle variabili di stato con un errore di entità limitata. Per verificare tale convergenza sussiste il seguente teorema.

1° TEOREMA ASINTOTICO: Si supponga che il meccanismo di generazione dei dati sia stabile.

1) Se, qualunque sia la condizione iniziale semidefinita positivamente, l'equazione di Riccati converge, essa converge asintoticamente alla matrice $\bar{P}$.

2) Il predittore di regime è stabile.

Si noti però che la stabilità del meccanismo di generazione dei dati è condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza del predittore. Infatti può accadere che vi sia convergenza anche se il meccanismo di generazione dei dati è instabile. In questo caso bisogna introdurre il concetto di OSSERVABILITÀ. Si consideri per esempio il seguente sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

La coppia (F,H) è osservabile quando se non esistono due stati iniziali, differenti tra loro, tali che i corrispondenti uscite siano coincidenti tra loro. Quindi l'osservabilità è una condizione minima per poter stimare bene il sistema. L'osservabilità garantisce che la soluzione dell'ARE sia semidefinita positiva. Sia:

$$y^N = O_N^T x(1)$$

dove O_N viene detta MATRICE DI OSSERVABILITÀ. Tale matrice è così fatta:

$$O_N = [H^T F^T, H^T F^{T^2}, H^T F^{T^3}, \dots, H^T F^{T^{N-1}}, H^T]$$

Dunque il sistema è osservabile se, per ogni N, l'equazione $y^N = O_N^T x(1)$ ha un'unica soluzione. Questo equivale a dire che la matrice di osservabilità ha rango massimo. Quindi se la matrice O_N ha rango massimo, l'equazione $y^N = O_N^T x(1)$ ha un'unica soluzione e perciò la soluzione della ARE è unica ed è semidefinita positiva. Può però accadere che anche se la coppia (F, H) sia osservabile, la ARE ammetta più soluzioni semi-definite positive. Un modo per imporre che la ARE abbia un'unica soluzione è che il rumore che disturba ("sporca") lo stato del sistema lo sporchi per intero. Si giunge, dopo una serie di passi logici, alla conclusione che il massimo insieme dello spazio di stato influenzato dal rumore è:

$$R[G_v \; FG_v \; F^2G_v \; F^3G_v \dots F^{m-1}G_v]$$

Perché l'intero spazio di stato sia influenzato dal rumore è necessario che questo insieme coincida con lo spazio di stato, e per fare ciò è necessario che la matrice R nota come MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ abbia rango massimo. Si consideri il seguente sistema:

$$x(t+1) = Fx(t) + G_v \xi(t)$$

Si dice che (F, G_v) è raggiungibile se assegnato uno stato $\bar{x}$, esiste una opportuna sequenza $\xi(\cdot)$ che produca un'evoluzione $x(\cdot)$ dello stato tale che $x(N) = \bar{x}$, per un certo N. Quindi (F, G_v) è raggiungibile se e solo se R ha rango massimo.

2° TEOREMA DI CONVERGENZA ASINTOTICO: Si supponga che il meccanismo di generazione dei dati sia tale che la coppia (F, H) sia osservabile, e che (F, G_v) sia raggiungibile. Allora:

1) Qualunque sia la condizione iniziale semidefinita positiva, la soluzione dell'equazione di Riccati converge asintoticamente a $\bar{P}$.

2) La matrice $\bar{P}$ è definita positivamente;

3) Il predittore di regime è stabile.

In generale quando viene a mancare la proprietà di raggiungibilità l'insieme degli stati per i quali esiste un $v(\cdot)$ in grado di far andare il sistema dall'origine dello spazio di stato a quel punto è un sottospazio, e precisamente:

$$R[G_v \; FG_v \dots]$$

Questo sottospazio prende il nome di SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ. Il sottospazio ortogonale prende il nome di SOTTOSPAZIO DI NON RAGGIUNGIBILITÀ. Quindi un sistema è composto sempre in una parte raggiungibile e in una parte non raggiungibile. Un sistema si dice STABILIZZABILE quando la sua parte non raggiungibile è stabile. Un sistema invece si dice RIVELABILE se la sua parte non osservabile è stabile. Infatti un sistema può essere decomposto anche in una parte osservabile e non osservabile.

3° TEOREMA DI CONVERGENZA ASINTOTICO: Sia:

$$x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$
$$y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

con $v_1 \sim WN(0, V_1)$ e $v_2 \sim WN(0, V_2)$, tra loro incorrelati. Si supponga che (F, H) sia rivelabile, (F, G_v) stabilizzabile. Allora:

1) Qualunque sia la condizione iniziale semidefinita positiva, la soluzione dell'equazione di Riccati converge a $\bar{P}$.

2) Il predittore di regime è stabile.

Vediamo ora qualche esercizio:

1) Si consideri il sistema dinamico:

$$x(t) = 0{,}5\,x(t-1) + v_1(t)$$
$$y(t) = x(t) + v_2(t)$$

dove $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono rumori bianchi a valore atteso nullo e varianza 1. Questi due rumore sono incorrelati. Si dica quanto vale la varianza dell'errore di predizione commesso quando si desidera stimare $x(t+1)$ a partire dalle osservazioni $y(t), y(t-1), \ldots$
Posto cioè:

$$\hat{x}(t+1|t) = E[\,x(t+1)\,|\,y(t), y(t-1), \ldots\,]$$

si dica quanto vale $Var[\hat{x}(t+1|t) - x(t+1)]$.

1) Si noti che $F = 0{,}5$, $V_1 = 1$, $V_2 = 1$, $V_{12} = 0$ $\Rightarrow$ $|F| < 1$ $\Rightarrow$ il sistema è stabile e quindi si può applicare il primo 'teorema' della convergenza asintotica il quale afferma che la varianza dell'errore di predizione a regime è la radice semidefinita positiva della ARE. Quindi:

ARE: $\underline{P = FPF^T + V_1 - FPH^T(HPH^T + V_2)^{-1}HPF^T}$

NB: $\begin{cases} V_1 = Var[v_1] \\ V_2 = Var[v_2] \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\bar{P} = 0{,}5\bar{P}0{,}5 + 1 - 0{,}5\bar{P}1(\bar{P}+1)^{-1}\bar{P}\cdot 0{,}5 = 0{,}5\bar{P}\cdot 0{,}5 + 1 - \frac{0{,}5\bar{P}}{(\bar{P}+1)}(\bar{P}+1)\frac{\bar{P}\cdot 0{,}5}{(\bar{P}+1)}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\bar{P} = \frac{\bar{P}}{4} + 1 - \frac{\bar{P}^2}{4(1+\bar{P})}} \Rightarrow 4\bar{P}^2 - \bar{P} - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}_1 = \cancel{\dfrac{1-\sqrt{65}}{8}} \rightarrow \bar{P} < 0 \text{ (da scartare)} \\ \bar{P}_2 = \dfrac{1+\sqrt{65}}{8} \end{cases}$$

Quindi: $\underline{Var[\hat{x}(t+1|t) - x(t+1)] = \frac{1+\sqrt{65}}{8}}$

2) Si consideri il modello seguente:

$$x(t+1) = 0,5\,x(t) + e(t)$$
$$y(t) = x(t) + 5\,x(t-1)$$

1) Si imposti il problema della predizione con la teoria di Kalman. Si scriva cioè il modello nella forma normale a cui applicare la teoria di Kalman:

$$x(t) = Fx(t-1) + v_1(t)$$
$$y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

2) Descrivere per sommi capi come si può risolvere il problema della predizione di regime a due passi in avanti con la teoria di Kalman. Qual è la difficoltà nello sviluppo dei conti.

2) 1) Possiamo scrivere:

$$y(t) = 0,5\,y(t-1) + e(t-1) + 5e(t-2)$$

Generalizzando si ha:

$$y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \dots + \alpha_m y(t-m) = \beta_0 e(t) + \beta_1 e(t-1) + \dots + \beta_m e(t-m)$$

Dato che $\beta_0 = 0 \Rightarrow$ la realizzazione minima è propria. Quindi:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_m \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad G = \begin{bmatrix} \beta_m \\ \beta_{m-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ.

$$H = [\,0\ 0\ \dots\ 1\,] \quad \Rightarrow \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = [\,0\ \ 1\,]\,x(t)$$

Perciò:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad H = [\,0\ \ 1\,]$$

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

2) Una volta costruito il predittore di Kalman ad 1° passo del tipo:

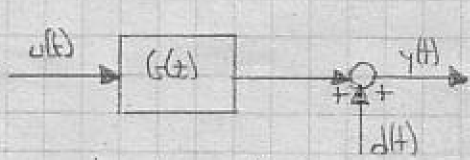
$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - \hat{y}(t|t-1))$$
$$\hat{y}(t+1|t) = H\hat{x}(t|t-1)$$

Il predittore a due passi viene ricavato con:

$$\underline{\hat{x}(t+2|t) = F\hat{x}(t+1|t)}$$

Tale predittore è risolvibile risolvendo la ARE. Qui ci sono i calcoli più impegnativi.

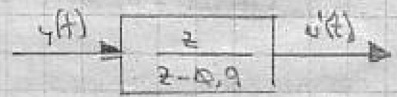
3) Si consideri il seguente sistema:



con $G(z) = \frac{z-0,9}{z}$

dove d(t) è un processo stocastico stazionario e $d(\cdot) \sim WN(0,1)$. Al fine di ricostruire il segnale u(t) a partire dalle misure di y(t) si filtra quest'ultimo segnale in questa maniera:

$$G(z)^{-1} = \frac{z}{z-0,9}$$



- Si calcoli la varianza dell'errore fra il segnale u(t) e il segnale u'(t).
- Si supponga che $u(t) \sim WN(0, \delta^2)$, indipendente da $d(t) \sim WN(0, \delta^2)$. Posto:

$x_1(t) = u(t)$

$x_2(t) = u(t-1)$ ⇒ Si imposti il problema della ricostruzione di $u(\cdot)$ come un problema di filtraggio.

3) • Si osservi che: $\underline{u'(t) = G(z)^{-1}(G(z)u(t) + d(t)) = u(t) + G(z)^{-1}dt}$.

⇓

Posto $\Delta u(t) = u(t)' - u(t) \Rightarrow \Delta u(t) = G(z)^{-1}d(t) = \frac{z}{z-0,9}d(t) = \frac{1}{1-0,9z^{-1}}d(t)$

Siccome: $z^{-1} \to$ ritardo $\Rightarrow \Delta u(t) = 0,9\Delta(u(t-1)) + d(t)$

⇓

$$Var[\Delta u(t)] = 0,81\, Var[\Delta u(t-1)] + Var[d(t)].$$

Quindi:

$$\underline{Var[\Delta u(t)] \cong 5,26}$$

- Rappresentiamo nel dominio del tempo il sistema con $G(z)^{-1}$. Abbiamo:

$$y(t) = u(t) - 0{,}9\, u(t-1) + d(t)$$

Quindi: $x_1(t+1) = v(t)$
$x_2(t+1) = x_1(t)$
$y(t) = x_1(t) - 0{,}9\, x_2(t) + d(t)$ con $v(t) = u(t+1) \sim WN(0, \delta^2)$

Si può dunque scrivere:

$$x(t+1) = F x(t) + v(t) \quad e \quad y(t) = H x(t) + d(t)$$

con: $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $H = [1 \quad -0{,}9]$

$V_1 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = 1$ e $V_{12} = 0$

Per questo sistema è possibile scrivere il filtro di Kalman ad un passo.

4) Dato:

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2} x(t) + v_1(t) \\ y(t) = 2x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

con $v_1 \sim WN(0, \frac{19}{20})$
$v_2 \sim WN(0, 1)$

$v_1 \perp v_2$ e $v_1, v_2 \perp x(0)$

calcolare $\hat{y}(t|t-1)$ e $\hat{x}(t|t)$ dai dati a regime se esistono.

4) Analizziamo il sistema. Tutte le ipotesi per parlare di predittore di Kalman sono verificate.
Scriviamo l'equazione di ARE:

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 - \underbrace{(FP(t)H^T + V_{12})(HP(t)H^T + V_2)^{-1}}_{K(t)}\underbrace{(FP(t)H^T + V_{12})^T}_{K(t)^T}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$P(t+1) = \frac{1}{4} P(t) + \frac{19}{20} - \frac{P(t)^2}{4P(t)+1} \Rightarrow P(t+1) = \frac{\cancel{P(t)^2} + \frac{1}{4}P(t) + \frac{19}{5}P(t) + \frac{19}{20} - \cancel{P(t)^2}}{4P(t)+1}$$

$$\Downarrow$$

$$P(t+1) = \frac{81/20\, P(t) + \frac{19}{20}}{4P(t)+1}$$

Si noti che $V_{12} = 0$. Inoltre:

$$\begin{cases} F = 1/2 \\ H = 2 \end{cases}$$

Quindi se esiste una soluzione questa deve essere una soluzione della ARE.
Quindi: