Otteniamo quindi: $\tilde{S}: \ \tilde{A}(z)\tilde{y}(t+k) = \tilde{B}(z)u(t) + \tilde{C}(z)e(t+k)$ con $\begin{cases} \tilde{A}(z) = A(z)P_D(z) \\ \tilde{B}(z) = B(z)P_N(z) \\ \tilde{C}(z) = C(z)P_N(z) \end{cases}$

Quindi possiamo tranquillamente scrivere:

$$\underline{\hat{\tilde{y}}(t+k) = \tilde{y}^o(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\tilde{C}: \ \tilde{C}(z)\tilde{y}^o(t) = \tilde{F}(z)\tilde{y}(t) + \tilde{B}(z)E(z)u(t)}$$

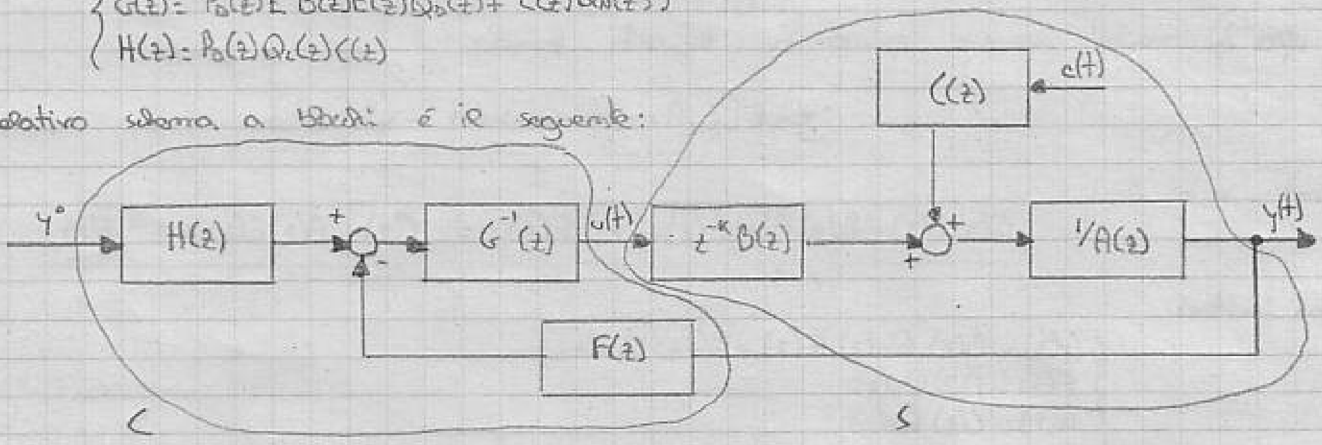
Anche qui abbiamo utilizzato l'equazione Diofantina nella "forte": $\underline{\tilde{C}(z) = \tilde{A}(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)}$.

Ricordandosi che: $\begin{cases} \tilde{y}^o(t) = y^o(t) - Qu(t) \\ \tilde{y}(t) = Py(t) \end{cases} \Rightarrow C(z)P_N(z) = A(z)P_D(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)$ → controllore ottimo generalizzato.

Quindi:

$$\begin{cases} F(z) = Q_D\tilde{F}(z) \\ G(z) = P_D(z)[B(z)E(z)Q_D(z) + C(z)Q_N(z)] \\ H(z) = P_D(z)Q_D(z)C(z) \end{cases}$$

Il relativo schema a blocchi è il seguente:



Si parla di PROGETTO A MODELLO DI RIFERIMENTO quando nell'approccio a minima varianza generalizzata si pone $Q_N(z) = 0$ e $Q_D(z) = 1 \Rightarrow \underline{Q(z) = 0}$. In questo modo la variabile $u(t)$ non da alcun peso nella cifra di merito. Quest'ultima diviene:

$$\underline{J = E[(P(z)y(t+k) - y^o(t))^2]}$$

Corrispondentemente si ha: $\begin{array}{l} G(z) = P_D(z)B(z)E(z) \\ H(z) = C(z)P_D(z) \\ F(z) = \tilde{F}(z) \end{array} \Rightarrow$ polinomio caratteristico: $\underline{\Delta(z) = B(z)C(z)P_N(z)}$

Scriviamo anche la funzione di trasferimento da y^o a y:

$$\underline{S(z) = z^{-k}P(z)^{-1}}$$

Ma noi vogliamo che l'uscita fluttui attorno al valore di ingresso, e che $S(z) \simeq 1$.

Quindi:

$S(1) = 1 \Rightarrow P(1) = 1$, così $S(z)$ ha un guadagno unitario. Scegliamo poi P_N e P_D con singolarità "stabili".

Quindi si ottiene:

$$y(t) = z^{-k}P(z)^{-1}y^o(t)$$

↳ $\Pi(z)$ = modello di riferimento del progetto.

NB: $P(1) \Rightarrow \underbrace{1/\Pi(1)}_{\text{condizione importante}}$ perché $\underline{y(t) \simeq y^o(t)}$.

Noi dobbiamo scegliere $P(z)$ in modo che $J = E[(P(z)y(t+k) - y^o(t))^2]$ sia minimo. Scelte tipiche di $P(z)$ sono:

$$P(z) = (1 - dz^{-1})^m (1-d)^{-m} \Rightarrow \Pi(z) = \frac{\cdots\cdots}{(1-dz^{-1})^m}$$ (m poli coincidenti in $d = z$)

Quindi in questa tecnica abbiamo ipotizzato che le singolarità di $P(z)$ siano interne al cerchio di raggio unitario. Vediamo ora invece una tecnica per zeri anche esterni al cerchio di raggio unitario. Tale tecnica prende il nome di PROGETTO A CONTROLLO PENALIZZATO. Si ricordi che nei progetti a minima varianza o a modello di riferimento, il sistema in anello chiuso non risulta asintoticamente stabile se il sistema è a sfasamento non minimo. Si ricordi inoltre che un sistema è a SFASAMENTO MINIMO quando non ha zeri nella sua funzione di trasferimento, oppure ha zeri tutti stabili. Nel progetto a controllo penalizzato si pone:

$$\begin{cases} P_N(z) = 1 \\ P_D(z) = 1 \end{cases}$$ mentre $Q(z)$ è a scelta del progettista.

La cifra di merito assume quindi la seguente forma:

$$J = E[(y(t+k) + Q(z)u(t) - y^o(t))^2]$$

Quindi si ha che:

$$P_N(z)C(z) = P_D(z)A(z)E(z) + z^{-k}\hat{F}(z) \;\;=\;\; C(z) = A(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)$$

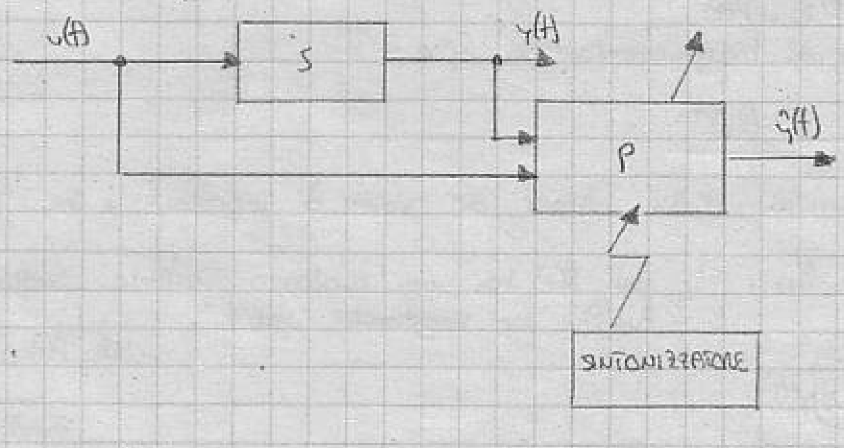
Si ha inoltre:

$$\begin{cases} G(z) = B(z)Q_D(z)E(z) + C(z)Q_N(z) \\ F(z) = \tilde{F}(z)Q_D(z) \\ H(z) = C(z)Q_D(z) \end{cases}$$

Quindi il polinomio caratteristico: $\Delta(z) = C(z)(B(z)Q_D(z) + A(z)Q_N(z))$, mentre la f.d.t da y^o a y è:

$$S(z) = \frac{z^{-k}}{1 + Q(z)\frac{A(z)}{B(z)}}$$

Quando abbiamo a che fare con un generico sistema, può succedere che le sue caratteristiche siano soggette a variazioni imprevedibili. Per fronteggiare questo problema si usano schemi ADATTATIVI. In questo contesto, il filtro, il predittore, o quant'altro non sono fissi bensì variano progressivamente alla luce del comportamento effettivo del sistema. Il componente che permette "l'aggiustamento" viene detto SINTONIZZATORE. Per esempio:



I metodi di identificazione visti precedentemente si prestano bene quando i parametri del sistema sono costanti. Riconsideriamo quindi tali criteri partendo dal più semplice. Consideriamo la seguente cifra di merito:

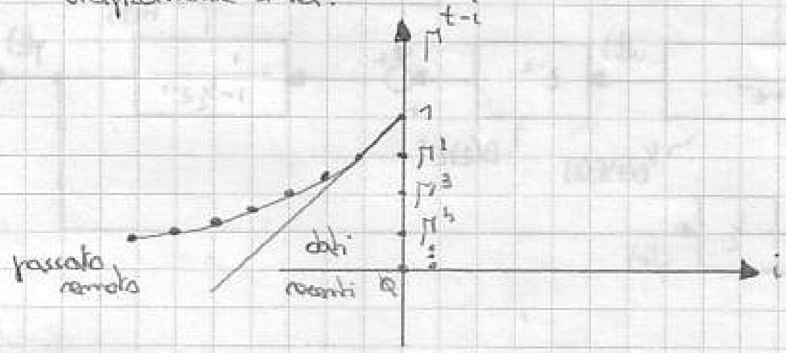
$$J = (1/t) \sum_{i=1}^{t} \varepsilon(i)^2$$

Anche qui viene data identica importanza al dato t-esimo. Se si vuole dare importanza sempre minore ai dati più "vecchi" a favore ovviamente dei più recenti, si può effettuare la seguente modifica alla precedente cifra di merito:

$$J = (1/t) \sum_{1}^{t} \mu^{t-i} \varepsilon(i)^2$$

dove μ è un coefficiente noto come COEFFICIENTE D'OBLIO, ed è compreso tra 0 e 1. Così si attribuisce un peso variabile ai dati.

Graficamente si ha:



* Si noti che anche l'algoritmo non cambia, ma cambia solo il comportamento asintotico di quest'ultimo.

Vediamo ora un po' di esercizi.

1) Si consideri il seguente processo:

$$y(t) = \frac{1}{2} y(t-1) + u(t-2) + e(t) + 2e(t-2) \quad \text{con } e(t) \sim WN(0,1)$$

Svolgere l'analisi completa con il controllo a minima varianza.

1) Il processo può essere riscritto nella seguente maniera:

$$y(t) - \frac{1}{2} y(t-1) = u(t-2) + e(t) + 2e(t-2) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} u(t-2) + \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} e(t)$$

Non siamo in forma canonica.

Per porre la $W(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ in forma canonica basta fare:

$$\tilde{W}(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow \text{nuovo WN: } \eta(t) \sim WN(0,4)$$

NB: $G(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ è invece in forma canonica.

NB: $y(t) = G(z)\,u(t-2) + W(z)\,e(t)$

Quindi:
$B(z) = 1$
$A(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$
$C(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$

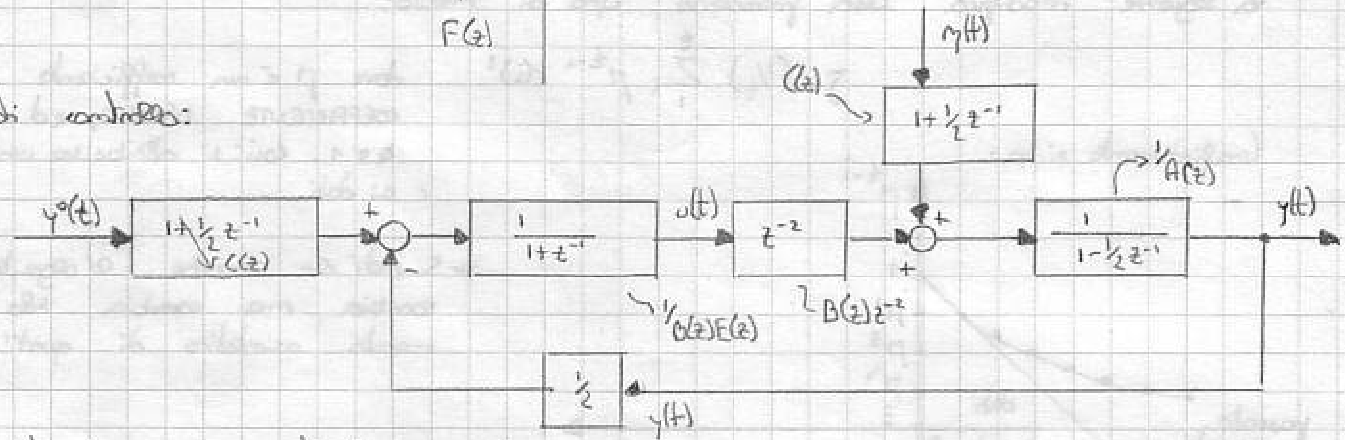
$\Rightarrow$ eq. diofantina: $C(z) = A(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)$

$\Downarrow$

Divisione di $C(z)$ per $A(z)$:

$$
\begin{array}{r|l}
1+\frac{1}{2}z^{-1} & 1-\frac{1}{2}z^{-1} \\
-\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) & \overline{1+z^{-1}} \rightarrow E(z) \\
\hline
z^{-1} & \\
-\left(z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right) & \\
\hline
+\frac{1}{2}z^{-2} \rightarrow F(z) &
\end{array}
$$

Schema di controllo:



Ora noi ci interessiamo a seguenti funzioni di trasferimento:

$$
\left.\begin{array}{l} y^o \rightarrow y(t) \Rightarrow \\ \eta(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow \end{array}\right\} \text{prestazioni.}
$$
$$
y^o \rightarrow u(t) \Rightarrow \text{stabilità.}
$$

Quindi:

$$
y^o \rightarrow y(t) \Rightarrow \frac{\dfrac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})\cdot z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}{1+\dfrac{\frac{1}{2}z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}} = \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})\,z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})\,z^{-2}}{\cancel{\frac{1}{2}z^{-2}}+1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-1}-\cancel{\frac{1}{2}z^{-2}}} = \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})\,z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = z^{-2}
$$

Perciò: $\underline{y(t) = y^o(t-2)}$. Vediamo ora la funzione di trasferimento da $\eta(t)$ a $y(t)$. cioè:

$$
\eta(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow \frac{\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{1+\dfrac{\frac{1}{2}z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}} = \frac{\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}}{\dfrac{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})+\frac{1}{2}z^{-2}}{(1+z^{-1})\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}} =
$$
$$
= \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}{\underbrace{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})+\frac{1}{2}z^{-2}}_{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{\cancel{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}(1+z^{-1})}{\cancel{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} = \underline{1+z^{-1}}
$$

Infine rimane:

$$
y^o(t) \rightarrow u(t) \Rightarrow \frac{\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+z^{-1})}}{1+\dfrac{\frac{1}{2}z^{-2}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}} =
$$
$$
= \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})+\frac{1}{2}z^{-2}} = 1-\frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2z-1}{2z} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z}
$$

Si noti che il controllore ha una funzione di trasferimento stabile, e quindi anche il sistema di controllo è intrinsecamente stabile. Inoltre:

$$J = E[(y(t) - y^\circ(t))^2] \Rightarrow \text{bisogna imporre che } \underline{y^\circ(t) = \hat{y}(t+2|t)}.$$

2) Si consideri il sistema ARX:

$$S: \quad y(t+2) = 0{,}5\,y(t+1) + u(t) + 0{,}9\,u(t-1) + e(t+2)$$

dove $e(t)$ è un rumore bianco a valore atteso nullo. Per fare in modo che la variabile y si avvicini il più possibile ad un segnale di riferimento y°, si ricorre ad un controllore che minimizzi la cifra di merito:

$$J = E[(y(t+2) + Q(z)u(t) - y^\circ(t))^2]$$

con $Q(z) = \beta$

- Si determini il controllore per $\beta = 0$ (controllore a minima varianza) e si trovino i poli dell'anello di retroazione.
- Si determini poi il controllore per $\beta \neq 0$, (progetto a controllo penalizzato) e si disegni nel piano complesso il luogo descritto dai poli dell'anello di retroazione al variare di β. Per quali valori di β il sistema è stabile?
- Nell'ipotesi che sia il segnale di riferimento sia il disturbo siano costanti si trovi il valore dell'errore $\bar{y} - \bar{y}^\circ$ a regime per $\beta = 0$, e $\beta \neq 0$.
- Anche alla luce di quanto trovato si discuta brevemente come cambiano le prestazioni del sistema di controllo al variare di β.

2) • Poniamo: $y^\circ(t) = \hat{y}(t+2|t)$. Possiamo scrivere:

$$\underline{y(t)(z^2 - 0{,}5\,z^1) = u(t)(1 + 0{,}9\,z^{-1}) + z^{+2}\,e(t)}$$

$\Downarrow$

La parte AR è stabile $\Rightarrow$ $y(\cdot)$ è stazionario e quindi si può applicare tutta la teoria. In particolare:

$$y(t+2) = 0{,}5\,(0{,}5\,y(t) + u(t-1) + 0{,}9\,u(t-2) + e(t+1)) + u(t) + 0{,}9\,u(t-1) + e(t+2) =$$

$$= 0{,}25\,y(t) + 0{,}5\,u(t-1) + 0{,}45\,u(t-2) + 0{,}5\,e(t+1) + u(t) + 0{,}9\,u(t-1) + e(t+2)$$

$\Downarrow$

Predittore ottimo:

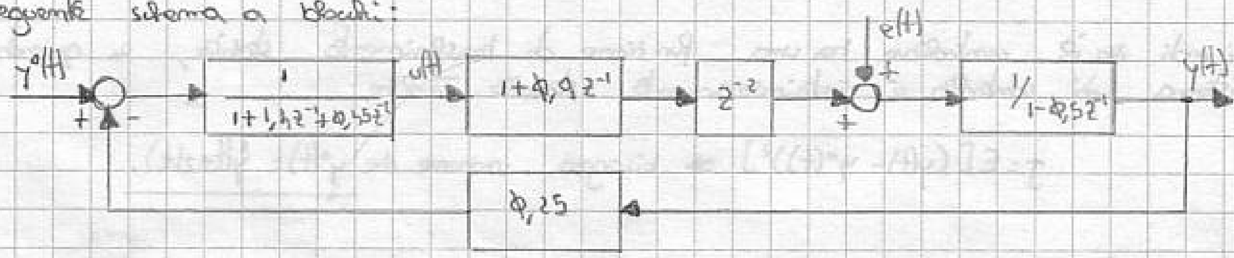
$$\hat{y}(t+2) = 0{,}25\,y(t) + 0{,}5\,u(t-1) + 0{,}45\,u(t-2) + u(t) + 0{,}9\,u(t-1)$$

Quindi:

$$u(t) = y^\circ(t) - 0{,}25\,y(t) - 1{,}4\,u(t-1) - 0{,}45\,u(t-2) \quad \text{oppure:} \quad (1 + 1{,}4z^{-1} + 0{,}45z^{-2})u(t) =$$

$$= y^\circ(t) - 0{,}25\,y(t)$$

Si ha il seguente schema a blocchi:



Funzione di trasferimento d'anello $L(z)$:

$$L(z)=\frac{0,25(1+0,9z^{-1})z^{-2}}{(1+1,4z^{-1}+0,45z^{-2})(1-0,5z^{-1})}=\frac{0,25(z+0,9)}{(z+0,9)(z+0,5)(z-0,5)}$$

Poli dell'anello di retroazione:

$$\Delta=1+L(z)=0 \Rightarrow (z+0,9)(z+0,5)(z-0,5)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_1=-0,9 \\ p_2=0 \end{array}\right\} \text{poli stabili.}$$

- In questo caso si ha:

$$\underline{J=E[(y(t+2)+\beta u(t)-y^o(t))^2]}$$

$$\Downarrow$$

Legge di controllo:

$$u(t)=\frac{1}{1+\beta}\left(y^o(t)-0,25y(t)-1,4u(t-1)-0,45u(t-2)\right)$$

Quindi: $u(t)(1+\beta+1,4z^{-1}+0,45z^{-2})=y^o(t)-0,25y(t)$

$$\Downarrow$$

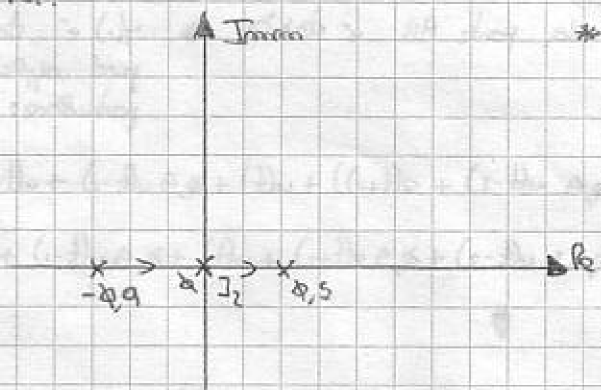
$$L(z)=\frac{0,25(z+0,9)}{((1+\beta)z^2+1,4z+0,45)(z-0,5)}$$

Poli di $L(z)$: $\Delta=((1+\beta)z^2+1,4z+0,45)(z-0,5)=0$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_1=-0,9 \\ p_{2,3}=0 \end{array}\right.$$

Graficamente si ha:



* In particolare:

$$\Delta=C[B(z)Q_D(z)+A(z)Q_N(z)]$$

Infatti:

f.d.t $y^o \to y$: $S(z)=\dfrac{z^{-k}}{1+Q(z)\dfrac{A(z)}{B(z)}}$

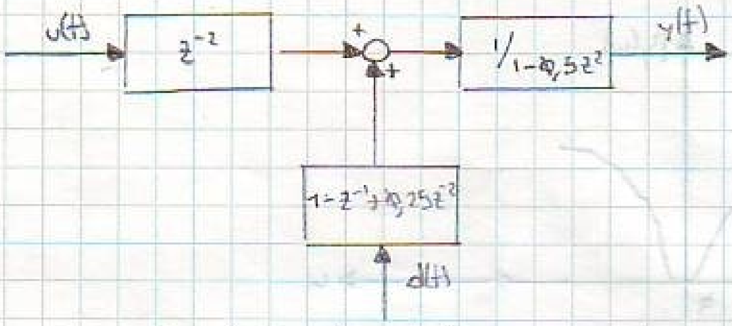
NB: $Q(z)=\dfrac{Q_N(z)}{Q_D(z)}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\Delta=[Q_D(z)B(z)+Q_N(z)A(z)]C(z)}$$

- Si osservi che nel caso che $e(t)=0$, e $\beta\neq 0$ allora l'errore di regolazione a regime è nullo, mentre se $\beta=0$ si ha la vicinanza di un polo al cerchio di raggio unitario. L'azione di controllo avrà quindi un turbamento più o meno intenso.

3) Si consideri:



- Scrivere l'equazione che descrive il sistema nel tempo
- Progettare un controllore in retroazione in modo tale che la varianza di y(·) sia minima.
- Rappresentare lo spettro del processo ottenuto a controllore inserito.

3) • Dallo schema si ha:

$$z^{-2}u(t) + d(t)(1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}) = y(t)(1 - 0,5z^{-2})$$
$$\Downarrow$$
$$y(t) = 0,5y(t-2) + u(t-2) + d(t) + (-)d(t-1) + 0,25d(t-2)$$

- L'equazione del punto precedente può essere così riscritta:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + C(z)d(t) \quad \text{con:} \begin{cases} A(z) = (1 - 0,5z^{-2}) \\ B(z) = z^{-2} \\ C(z) = 1 - z^{-1} + 0,25z^{-2} \end{cases}$$

NB: k=2.

A questo punto posso fare la divisione di C(z) per A(z), visto che il polinomio C(z) ha gli zeri interni al cerchio di raggio unitario. Quindi:

$$\begin{array}{l|l} 1 - z^{-1} + 0,25z^{-2} & (1 - 0,5z^{-2}) \\ -(1 - 0,5z^{-2}) & \overline{1 - z^{-1}} \\ \hline \quad -z^{-1} + 0,75z^{-2} & \\ \quad -(-z^{-1} + 0,5z^{-3}) & \\ \hline \quad\quad +0,75z^{-2} - 0,5z^{-3} & \end{array}$$

$$\Rightarrow C(z) = A(z)E(z) + \tilde{F}(z)z^{-k} \quad \text{con:} \begin{cases} E(z) = 1 - z^{-1} \\ \tilde{F}(z) = 0,75z^{-2} - 0,5z^{-3} \end{cases}$$

Legge di controllo:

$$C(z)y^{o}(t) = B(z)E(z)u(t) + \tilde{F}(z)y(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Posto } y^{o} = 0 \Rightarrow B(z)E(z)u(t) = -\tilde{F}(z)y(t)$$
$$\Downarrow$$
$$u(t) = \frac{-0,75 + 0,5z^{-1}}{1 - z^{-1}}y(t)$$