Consideriamo un fenomeno casuale (aleatorio). Possiamo osservare tale fenomeno effettuando quello che si dice un esperimento. Tale esperimento è ovviamente aleatorio, perchè i possibili esiti sono aleatori. Tutti i possibili risultati di questo esperimento vengono quindi detti ESITI. Indichiamo con S l'insieme di questi esiti, che prende il nome di SPAZIO DEGLI ESITI. Se per esempio l'esperimento in questione è il lancio di un dado, quest'ultimo è un esperimento casuale. Lo spazio degli esiti sarà:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

A volte capita che il risultato di un esperimento aleatorio non sia un singolo esito, bensì rappresenti un insieme di possibili esiti. Questo insieme prende il nome di EVENTO. Quindi un evento è un sottoinsieme dello spazio degli esiti S. Ad esempio: $E=\{1,3,5\}$ è un possibile evento.
Si può facilmente notare che E rappresenta l'evento: "ESCE NUMERO DISPARI". Un singolo esito viene anche detto EVENTO ELEMENTARE, mentre l'insieme vuoto (Φ) viene detto EVENTO IMPOSSIBILE. L'evento che equivale allo spazio degli esiti S viene detto EVENTO CERTO. Introduciamo anche la nozione di PROBABILITÀ. Per probabilità si intende una funzione che associa ad ogni evento un numero reale compreso tra 0 e 1. Quindi se A è un generico evento si ha che:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Si noti che se A è l'evento impossibile, $P(A)=0$. Se A è l'evento certo si ha che $P(A)=1$, e quindi $P(S)=1$. Altrimenti se A è un generico evento si ha:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\text{esiti})}$$

, dove $n(A)$ è il numero di volte che "esce" l'evento A. Tale rapporto prende il nome di FREQUENZA RELATIVA dell'evento A.

In breve tale rapporto ci dice la probabilità esatta dell'evento A. Quindi possiamo dire che un generico esperimento aleatorio è caratterizzato dallo spazio degli esiti S, dall'insieme degli eventi di interesse F, e dalla funzione $P(\cdot)$. Quindi se E è un generico esperimento casuale si ha:

$$E=\{S, F, P(\cdot)\}$$

Definiamo VARIABILE CASUALE (ALEATORIA) una variabile che dipende dall'esito di un esperimento casuale. Ad esempio la vincita in un gioco di dadi è una variabile casuale perchè dipende dall'esito del lancio del dado. Quindi una variabile casuale sull'esperimento E è una variabile v i cui valori dipendono dall'esito s di E secondo una funzione $\varphi(\cdot)$ tale che:

$$v=\varphi(\cdot)$$

Quindi si ha:

$$\varphi(\cdot): S \rightarrow V_s$$ con V_s l'insieme dei valori che v può assumere.

Quando scriviamo:

$$Prob(v \in D) \quad \text{con } D \subset V_s$$

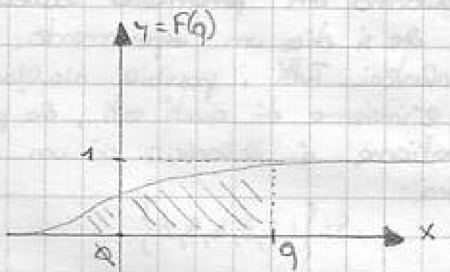
intendiamo dire che la probabilità che la variabile aleatoria v abbia un valore incluso in V_s ha un certo valore. Per esempio se:

$$V_s=\{\text{VINCI}, \text{PERDI}\} \quad e \quad \varphi(\cdot)=\begin{cases} \text{VINCI} & \text{per } s=4,5,6 \\ \text{PERDI} & \text{per } s=1,2,3 \end{cases}$$

Consideriamo ora una variabile reale $q \in \mathbb{R}$. Chiamiamo DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ della variabile casuale v la funzione: $F(q) = \mathrm{Prob}(v \leq q)$.

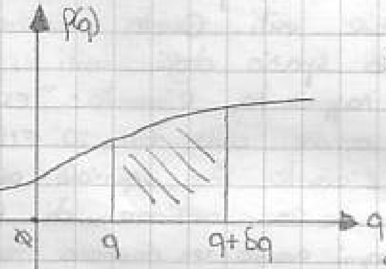
La funzione $F(q)$ gode delle seguenti proprietà:

1) $F(-\infty) = 0$
2) $F(+\infty) = 1$
3) $F(q)$ è monotona non decrescente.



Definiamo DENSITÀ DI PROBABILITÀ la funzione $p(q)$ così definita:

$$p(q) = \frac{dF(q)}{dq}$$



Quindi: $p(q)\,dq = dF(q)$

$$\Downarrow$$

$$\int_{q_0}^{q} p(q)\,dq = \int_{q_0}^{q} dF(q)$$

Secondo il grafico si ha:

$$\int_{q}^{q+\delta q} p(q)\,dq = \int_{q}^{q+\delta q} dF(q)$$

$$\Downarrow$$

$$F(q+\delta q) = F(q) + \int_{q}^{q+\delta q} p(q)\,dq$$

La funzione di distribuzione di probabilità gode o meglio possiede dei parametri medeli che la descrivono:

1) VALORE ATTESO: $E[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} q \cdot p(q)\,dq$

2) VARIANZA: $\mathrm{Var}[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - E[v])^2\, p(q)\,dq$

Invece si definisce DEVIAZIONE STANDARD e si indica con δ la seguente espressione: $\delta[v] = \sqrt{\mathrm{Var}[v]}$

Consideriamo ora le variabili casuali vettoriali. Consideriamo cioè un vettore di questo tipo:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

, dove V_i è la generica variabile casuale i-esima.

Qui la funzione di distribuzione di probabilità assume la seguente forma:

$$F(q_1, q_2, \dots, q_m) = \mathrm{Prob}(v_1 \leq q_1, v_2 \leq q_2, \dots, v_m \leq q_m)$$

Analogamente si ridefinisce la densità di probabilità (congiunta) come:

$$p(q_1, \dots, q_m) = \frac{\partial^m F(q_1 \dots q_m)}{\partial q_1\, \partial q_2 \cdots \partial q_m}$$

Siccome in questo caso stiamo parlando di vettori, anche il valor medio (valore atteso) e la varianza subiscono delle "modifiche". In particolare si ha:

$$E[v] = \begin{bmatrix} E[V_1] \\ E[V_2] \\ \vdots \\ E[V_m] \end{bmatrix}$$

oppure $E[v] = \left[E[V_1]\, E[V_2] \cdots E[V_m] \right]^{T}$ ⟶ trasposta.

* Si ricordi infatti che se B è un generico vettore (vettore riga) del tipo:

$$B = [\, \alpha\, \beta\, \gamma \dots z \,]$$

Trasponendo il vettore si ottiene un vettore colonna:

$$B^T = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \\ z \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda la varianza, le cose si fanno più complicate. Infatti per definizione si ha:

$\mathrm{Var}[v] = E\left[(v - E[v])^2 \right]$ e quindi:

$$\Downarrow$$

$$Var[v] = \begin{bmatrix} Var[v_{11}] & Var[v_{12}] \\ Var[v_{21}] & Var[v_{22}] \end{bmatrix}$$

, dove $Var[v]$ in questo caso è la MATRICE VARIANZA. Essa è quadrata. Qui il vettore v casuale è il seguente:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

. Si noti che $Var[v_{12}]$ prende il nome di VARIANZA INCROCIATA.

In generale se il vettore delle variabili casuali è un vettore di lunghezza m, si ha:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \Rightarrow Var[v] = \begin{bmatrix} Var[v_{11}] & Var[v_{12}] & \cdots & Var[v_{1m}] \\ Var[v_{21}] & Var[v_{22}] & \cdots & Var[v_{2m}] \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Var[v_{m1}] & \cdots & \cdots & Var[v_{mm}] \end{bmatrix}$$

dove $Var[v_{11}]$, $Var[v_{22}]$, ... sono gli elementi diagonali della matrice.

Quindi gli elementi diagonali della matrice varianza rappresentano le varianze delle singole variabili scalari v_i. Gli altri elementi sono invece le COVARIANZE definite nella seguente maniera:

$$\underline{Var[v_{ij}] = E[(v_i - E[v_i])(v_j - E[v_j])]}$$

Per esempio: $Var[v_{12}] = E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])]$. La matrice varianza è quindi una matrice quadrata di dimensioni $m \times m$ che gode delle seguenti proprietà:

1) è simmetrica;
2) è semidefinita positiva;
3) vale la seguente relazione: $\underline{E[vv^T] = Var[v] + E[v]E[v^T]}$

Siccome tale matrice è semidefinita positiva, si ha che il suo determinante ($\det Var[v]$) è maggiore o uguale a zero. Quindi:

$$Var[v] = \begin{bmatrix} Var[v_{11}] & \cdots & Var[v_{1m}] \\ \vdots & & \vdots \\ Var[v_{m1}] & \cdots & Var[v_{mm}] \end{bmatrix} \Rightarrow \det Var[v] \geq 0$$

se $Var[v] = \begin{bmatrix} Var[v_{11}] & Var[v_{12}] \\ Var[v_{21}] & Var[v_{22}] \end{bmatrix} \Rightarrow \det Var[v] \geq 0 \Rightarrow Var[v_{11}] \cdot Var[v_{22}] - Var[v_{12}] \cdot Var[v_{21}] \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{Var[v_{11}] \cdot Var[v_{22}] \geq Var[v_{12}] \cdot Var[v_{21}]}$$

Si noti che in questo caso il vettore delle variabili casuali ha dimensione pari a 2. In generale una matrice è definita positivamente quando il suo determinante è maggiore di zero. Quindi se:

$$Var[v] = \begin{bmatrix} Var[v_{11}] & Var[v_{12}] \\ Var[v_{21}] & Var[v_{22}] \end{bmatrix}$$

e $\det Var[v] > 0 \Rightarrow Var[v_{11}]\, Var[v_{22}] - Var[v_{12}]\, Var[v_{21}] > 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{Var[v_{11}] \cdot Var[v_{22}] > Var[v_{12}] \cdot Var[v_{21}]}$$

allora $Var[v]$ è definita positivamente. Siccome la matrice varianza è simmetrica, si ottiene che: $\underline{Var[v_{12}] = Var[v_{21}]}$, e più in generale si ha: $\underline{Var[v_{1m}] = Var[v_{m1}]}$.

Si considerino ora due grandezze variabili casuali v_1 e v_2. Il numero reale ρ definito nella seguente maniera:

$$\rho = \frac{E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])]}{\delta[v_1]\,\delta[v_2]}$$

prende il nome di COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE. Si noti che il numeratore di questa espressione è la covarianza $Var[v_{12}]$.

Si noti inoltre che tale coefficiente di correlazione è sempre compreso tra -1 e $+1$. Quando $\rho = 0$, allora le due variabili v_1 e v_2 sono incorrelate e quindi si ha:

$$\rho = 0 \Rightarrow \frac{E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])]}{\delta[v_1]\,\delta[v_2]} = 0 \Rightarrow E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])] = 0$$

Si dimostra che, condizione necessaria e sufficiente affinché le due variabili v_1 e v_2 siano scorrelate è che:

$$E[v_1 v_2] = E[v_1] \cdot E[v_2].$$

Vediamo la dimostrazione:

$$E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])] = E[v_1 v_2 - v_1 E[v_2] - v_2 E[v_1] + E[v_1]E[v_2]] =$$
$$= E[v_1 v_2] - 2E[v_1]E[v_2] + E[v_1]E[v_2] = E[v_1 v_2] - E[v_1]E[v_2] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$E[v_1 v_2] = E[v_1]E[v_2].$$

Anche qui si può definire la matrice $\rho(v)$ come MATRICE DI CORRELAZIONE così:

$$\rho(v) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \cdots & \bar{c}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_{m1} & & \bar{c}_{mm} \end{bmatrix}$$

dove si ha: $\bar{c}_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}$

Ovviamente $\rho(v)$ è simmetrica, e ha gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a 1. Questo si ha perché: $\bar{c}_{ii} = \dfrac{c_{ii}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}} = 1$ perché $j = i$, e quindi $\sqrt{c_{ii} c_{jj}} = \sqrt{c_{ii} \cdot c_{ii}} = \sqrt{c_{ii}^2} = c_{ii}$
Poi per $i \neq j$ si ha:

$$|\bar{c}_{ij}| \leq 1 \quad \forall i \neq j.$$

Inoltre $\rho(v)$ è semidefinita positiva. Definiamo ora un PROCESSO STOCASTICO come una sequenza di variabili casuali $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Quindi un processo stocastico è caratterizzato da una propria varianza e da un proprio valor medio. In generale un processo aleatorio dipende dal tempo e dall'esito s. Quindi in generale si scrive:

$$v(t,s)$$

Come già detto, anche un processo aleatorio è caratterizzato da un valor medio $E[v(t,s)]$ e da una varianza $Var[v(t,s)]$. Ma grazie al valor medio, la dipendenza del processo dall'esito scompare, e si ottiene:

$$E[v(t)],\ Var[v(t)]$$

Analizziamo anche la covarianza, ottenendo: $\gamma(t_1,t_2) = E[(v(t_1) - E[v(t_1)]) \cdot (v(t_2) - E[v(t_2)])]$.
Analogamente per il coefficiente di correlazione:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{Var[v(t_1)]}\,\sqrt{Var[v(t_2)]}}$$

Si noti però che se pongo $t_1=t_2=t$ ottengo: $\gamma(t,t)=E[(v(t)-E[v(t)])^2]=Var[v(t)]$.
Quindi la varianza di un generico processo $v(t)$ è uguale alla covarianza $\gamma(t,t)$ quando gli istanti temporali t_1 e t_2 sono tra loro equivalenti. Si noti che $v(t)$ è un processo stocastico, cioè un processo caratterizzato da un valor medio $E[v(t)]$ e da una varianza $Var[v(t)]$, che cambia da istante a istante. Noi ci concentreremo esclusivamente sui processi stocastici stazionari. Un processo stocastico generico $v(t)$ è STAZIONARIO quando:

1) $E[v(t)]=\bar{m}$
2) $\gamma(t_1,t_2)=\bar{\gamma}(\tau)$ con $\tau=t_2-t_1$.

*Un esempio di processo stocastico stazionario è il RUMORE BIANCO (WHITE NOISE). Esso è definito nella seguente maniera:

$$WN: \quad 1)\ E[v(t)]=0 \qquad 2)\ \gamma(\tau)=\begin{cases}0, & \text{per } \tau\neq 0\\ \lambda^2, & \text{per } \tau=0\end{cases} \Rightarrow WN(0,\lambda^2)$$

Prendiamo in esame il seguente esempio:

$$v(t)=3\eta(t)+7\eta(t-1) \quad \text{con } \eta(t)\sim WN$$

Supponiamo per comodità che $E[\eta(t)]=\bar{m}$. Si ha:

$$E[v(t)]=E[3\eta(t)]+E[7\eta(t-1)]=3E[\eta(t)]+7E[\eta(t-1)]=$$
$$=3\bar{m}+7\bar{m}=10\bar{m}$$

NB: Vale un'importante proprietà: $E[cv(t)]=cE[v(t)]$ con c = costante.

Infine si chiama FUNZIONE DI CORRELAZIONE la seguente funzione: $\tilde{\gamma}(t_1,t_2)=E[v(t_1)v(t_2)]$.
Si noti che se $E[v(t_1)]=E[v(t_2)]=0$, allora la funzione di correlazione è uguale alla funzione di covarianza, e si scrive:

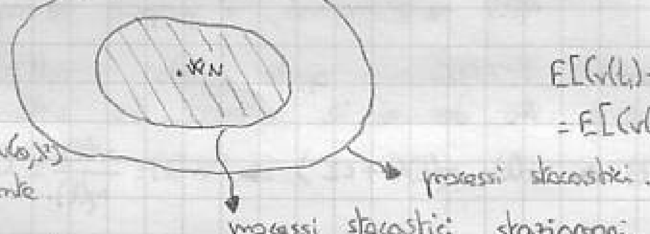
$$\tilde{\gamma}(t_1,t_2)=\gamma(t_1,t_2)$$

Infatti: $\tilde{\gamma}(t_1,t_2)=E[v(t_1)v(t_2)]=E[(v(t_1)-\underbrace{E[v(t_1)]}_{0})\cdot(v(t_2)-\underbrace{E[v(t_2)]}_{0})]$

$$\Downarrow$$

$$E[(v(t_1)-0)(v(t_2)-0)]=\gamma(t_1,t_2)=$$
$$=E[(v(t_1))(v(t_2))]=\tilde{\gamma}(t_1,t_2).$$

Quindi ricapitolando abbiamo:



Consideriamo ora il seguente esempio:

$$v(t)=\eta(t)+c\eta(t-1) \quad \text{con } \begin{cases}\eta(t)\sim WN(0,\lambda^2)\\ c=\text{costante}\end{cases}$$

Vogliamo studiare le caratteristiche del processo $v(t)$. Analizziamo il suo valor medio:

$$E[v(t)]=E[\eta(t)]+E[c\eta(t-1)]=0+cE[\eta(t-1)]=0+c\cdot 0=0.$$

Analizziamo ora la funzione di covarianza:

$$\gamma(t_1,t_2)=E[(v(t_1)-E[v(t_1)])(v(t_2)-E[v(t_2)])]$$, ma se $t_1=t_2=t \Rightarrow \gamma(t,t)=E[(v(t)-\underbrace{E[v(t)]}_{0})\cdot(v(t)-\underbrace{E[v(t)]}_{0})]=$
$=E[(v(t)\cdot v(t))]=E[v(t)^2]$

Quindi la varianza del processo $v(t)$ assume la seguente forma:

$$\gamma(t,t)=Var[v(t)]=E[(v(t)^2)]=E[(\eta(t)+c\eta(t-1))^2]=E[(\eta(t)^2+c^2\eta(t-1)^2+$$
$$+2\eta(t)c\eta(t-1))]=E[\eta(t)^2]+E[c^2\eta(t-1)^2]+E[2\eta(t)c\eta(t-1)]=$$
$$=\lambda^2+c^2E[\eta(t-1)^2]+2cE[\underbrace{\eta(t)\eta(t-1)}_{0}]=\lambda^2+c^2\lambda^2=(1+c^2)\lambda^2.$$

Perciò si nota facilmente che se la costante $c=0$, si ottiene la varianza del rumore bianco. Infatti:

$$(1+c^2)\lambda^2, \quad \text{per } c=0 \Rightarrow \lambda^2$$

Supponiamo ora di voler calcolare $\gamma(t_1,t_2)$ con $t_1=t$ e $t_2=t+1$. Quindi si ottiene:

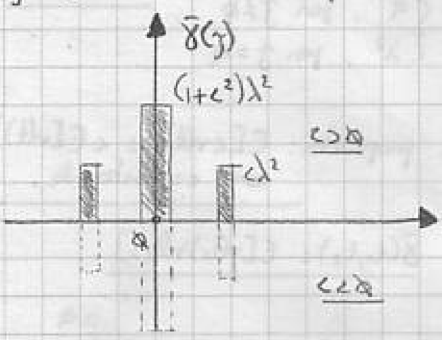
$$\gamma(t_1,t_2)=E[(v(t_1)-\underbrace{E[v(t_1)]}_{0})\cdot(v(t_2)-\underbrace{E[v(t_2)]}_{0})]=E[(v(t_1)v(t_2))]=E[(v(t)v(t+1))]=E[(\eta(t)+c\eta(t-1))\cdot($$

$$(\eta(t+1)+c\eta(t))] = E[(\eta(t)\eta(t+1) + c\eta(t)^2 + c\eta(t-1)\eta(t+1) + c^2\eta(t-1)\eta(t))] = E[\underbrace{\eta(t)\eta(t+1)}_{0}] + E[c\,\eta(t)^2] + E[c\underbrace{\eta(t-1)\eta(t+1)}_{0}] + E[c^2\underbrace{\eta(t-1)\eta(t)}_{0}] = 0 + cE[\eta(t)^2] + 0 + 0 = c\lambda^2.$$

Quindi si ha che $\gamma(t,t-1) = c\lambda^2$. Proviamo a calcolare $\gamma(t,t+2)$:

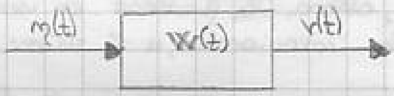
$$\gamma(t,t+2) = E[v(t)v(t+2)] = E[(\eta(t)+c\eta(t-1))\cdot(\eta(t+2)+c\eta(t+1))] = E[(\eta(t)\eta(t+2) + \eta(t)c\eta(t+1) + c\eta(t-1)\eta(t+2) + c^2\eta(t-1)\eta(t+1))] = E[\underbrace{\eta(t)\eta(t+2)}_{0}] + E[c\underbrace{\eta(t)\eta(t+1)}_{0}] + E[c\underbrace{\eta(t-1)\eta(t+2)}_{0}] + E[c^2\underbrace{\eta(t-1)\eta(t+1)}_{0}] = 0$$

Possiamo concludere affermando che $\gamma(t,t+2) = 0$ e per simmetria che anche $\gamma(t,t-2) = 0$, e quindi sappiamo quanto vale la funzione di covarianza per differenti valori di t. Quindi il processo $v(t)$ è un processo stazionario in quanto $E[v(t)] = 0$ e $\gamma(t_1,t_2) = \tilde{\gamma}(\tau)$ per $\tau = t_2 - t_1$. Quindi la funzione di covarianza viene così rappresentata:



Si noti la simmetria della funzione di covarianza.

* Facciamo ora la seguente osservazione. Supponiamo di avere un sistema così fatto:



con $v(t) = \eta(t) + c\eta(t-1)$

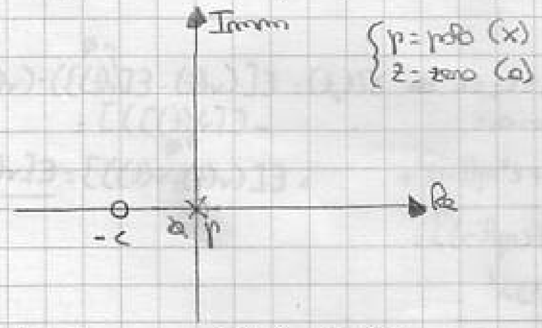
Noi vogliamo sapere che valore ha la funzione di trasferimento $W(z)$. Noi sappiamo che:

$v(t) = W(z)\eta(t) \Rightarrow W(z) = \dfrac{v(t)}{\eta(t)}$, e cioè che $W(z)$, che è la funzione di trasferimento tra l'uscita e l'ingresso, è proprio il rapporto tra queste due.

Se definiamo l'operatore RITARDO in questo modo: $\eta(t-1) = z^{-1}\eta(t)$, introducendo cioè l'operatore z (operatore che descrive il ritardo nei sistemi discreti), si può scrivere:

$$v(t) = \eta(t) + cz^{-1}\eta(t) \Rightarrow v(t) = \eta(t)(1+cz^{-1}) \Rightarrow W(z) = \frac{v(t)}{\eta(t)} = (1+cz^{-1}) = (1+c/z) = \frac{z+c}{z}$$

La $W(z)$ è la funzione di trasferimento di un sistema dinamico che ha uno zero in $-c$ e un polo nell'origine, come qui di seguito mostrato:



$\begin{cases} p = \text{polo } (\times) \\ z = \text{zero } (o) \end{cases}$

* Si noti che $v(t) = \eta(t) + c\eta(t-1)$ è la RAPPRESENTAZIONE NEL TEMPO del processo $v(t)$. Supponiamo ora di avere due processi:

$$v_1(t) = \eta(t) + c\eta(t-1)$$
$$v_2(t) = \eta(t-1) + c\eta(t-2)$$

Calcoliamo $\gamma_1(\tau)$ e $\gamma_2(\tau)$. Si ha:

$$\gamma_1(\tau) = E[(\eta(t)+c\eta(t-1))\cdot(\eta(t+1)+c\eta(t))] = c\lambda^2 \quad \text{(ad un passo)}$$

$$\gamma_2(\tau) = E[(\eta(t-1)+c\eta(t-2))\cdot(\eta(t)+c\eta(t-1))] = E[\eta(t-1)\eta(t) + c\eta(t-1)^2 + c\eta(t-2)\cdot\eta(t) + c^2\eta(t-1)\eta(t-2)]$$
$$= E[\underbrace{\eta(t)\eta(t-1)}_{0}] + E[c\eta(t-1)^2] + E[c\underbrace{\eta(t)\eta(t-2)}_{0}] + E[c^2\underbrace{\eta(t-1)\eta(t-2)}_{0}] = cE[\eta(t-1)^2] = c\lambda^2 \quad \text{(ad un passo)}$$

Quindi $\gamma_1(\tau) = \gamma_2(\tau)$, e questo ci fa capire che ci possono essere processi stocastici che hanno una diversa rappresentazione nel tempo, ma che forniscono media e covarianza uguali. Infatti anche il valor medio è lo stesso:

$$E[v_1(t)] = E[\eta(t) + c\eta(t-1)] = E[\eta(t)] + cE[\eta(t-1)] = 0 + 0 = 0$$
$$E[v_2(t)] = E[\eta(t-1) + c\eta(t-2)] = E[\eta(t-1)] + cE[\eta(t-2)] = 0 + c \cdot 0 = 0$$

Consideriamo ora il seguente processo: $v(t) = c_0\eta(t) + c_1\eta(t-1) + \dots + c_m\eta(t-m)$. Se osserviamo il processo notiamo che esso è costruito mediante una combinazione lineare dei valori assunti dal rumore bianco su un arco temporale che va da t a $t-m$. Al crescere di t, la finestra temporale si sposta passando all'intervallo da $t+1$ a $t-m+1$. Quindi questo processo $v(t)$ viene costruito come una media mobile sul rumore. Quindi questo processo $v(t)$ viene detto PROCESSO MA, di ordine m, e si scrive $MA(m)$. I parametri $c_0, c_1, \dots, c_m$ sono i parametri che identificano il processo $v(t)$. Bisogna ricordarsi che tale processo è sempre un processo stazionario e quindi $\gamma(t_1,t_2) = \tilde{\gamma}(\tau)$ con $\tau = t_2 - t_1$. Usando l'operatore di ritardo z si ha:

$$v(t) = c_0\eta(t) + c_1 z^{-1}\eta(t) + c_2 z^{-2}\eta(t) + \dots + c_m z^{-m}\eta(t) = \eta(t)(c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m})$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}}$$

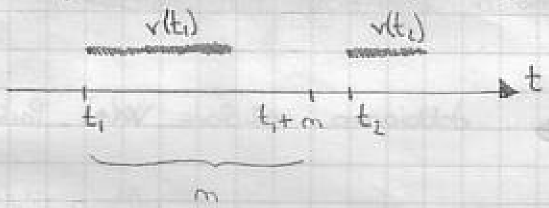
Quindi: $$W(z) = \frac{v(t)}{\eta(t)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m} = \frac{c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m}{z^m}$$

$$\eta(t) \longrightarrow \boxed{W(z)} \longrightarrow v(t)$$

Si può notare che $W(z)$ ha m poli nell'origine e m zeri sparsi qua e là in base ai valori dei parametri.

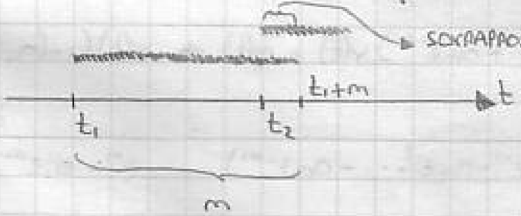
Proviamo ora a calcolare la funzione di covarianza $\tilde{\gamma}(t_1,t_2)$:

- se t_1 e t_2 distano più di m istanti temporali, $\tilde{\gamma}(t_1,t_2) = 0$. Possiamo dimostrare questo fatto graficamente:



come si può notare i due processi sono scorrelati (correlazione nulla).

- Se t_1 e t_2 distano meno di m istanti temporali, si ha la sovrapposizione degli istanti di tempo. Quindi la correlazione non è più nulla. Graficamente si ha:



SOVRAPPOSIZIONE $\rightarrow \gamma \neq 0$ oppure correlazione non nulla.

Quindi possiamo affermare che se $\tau = t_2 - t_1$, e per esempio $\tau > 0$, si ha che il campione $\eta(t_1)$ che compare in $v(t_1)$ con coefficiente c_0 compare anche nell'espressione di $v(t_2)$ con coefficiente c_τ. Analogamente per $\eta(t_1-1)$ che compare in $v(t_1)$ con coefficiente c_1, compare anche in $v(t_2)$ con coefficiente $c_{\tau+1}$. Quindi generalizzando si ha:

$$\gamma(t_1,t_2) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t_2-t_1| > m \\ (c_0c_\tau + c_1c_{\tau+1} + \dots + c_{m-\tau}c_m)\lambda^2 & \text{per } |t_2-t_1| \geq 0 \text{ e } < m \end{cases} \qquad \text{con } \underline{\tau = t_2 - t_1}$$